[문제 1] (총 100점)

(a) (총 40점)

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$는 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하고 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$이므로,

구간 $[1,\infty)$에서 $f(x)$의 증가와 감소는 아래 표와 같다.

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

[20점]

$2\le x\le 3,\ x\ne e$이면 $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{e}$ 이므로

$$\int_2^3 \frac{\ln x}{x}\,dx < \int_2^3 \frac{1}{e}\,dx = \frac{1}{e}$$

이다.

[20점]

(b) (총 60점)

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$는 구간 $[1,2]$에서 증가하므로

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx < \int_1^2 \frac{\ln 2}{2}\,dx = \frac{\ln 2}{2}$$

이고, 구간 $[3,n+1]$에서 감소하므로

$$\int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,dx = \sum_{k=3}^{n}\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,dx < \sum_{k=3}^{n}\int_k^{k+1} \frac{\ln k}{k}\,dx = \sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}$$

이다. [30점]

$\ln n < \ln(n+1)$이고 $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln x}{x}\,dx < \frac{1}{e}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{(\ln n)^2}{2} < \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 = \int_1^{n+1}\frac{\ln x}{x}\,dx &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{\ln x}{x}\,dx + \sum_{k=3}^{n}\int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x}\,dx \\ &< \sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k} + \frac{1}{e} \\ &= \ln\left(2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots n^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{e}\end{aligned}$$

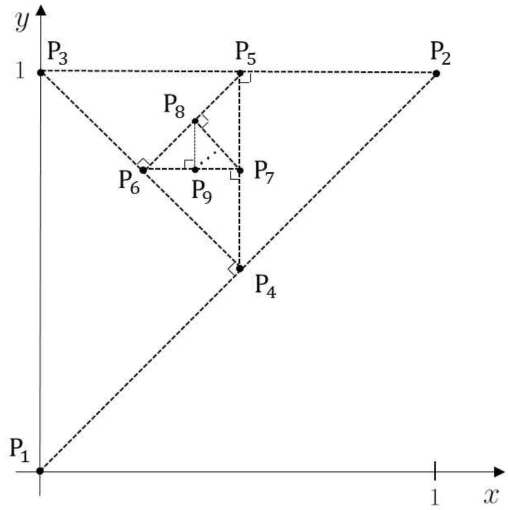
이다.

[30점]

[문제 2] (총 100점)

(a) (총 10점)

점 P_n을 좌표평면에 표시하면 아래 그림과 같다.



$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$는 직각이등변삼각형이므로, $\ell_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ell_n$이다. 따라서 ℓ_n은 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$인 등비수열이므로

$$\ell_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}$$

이다.

[10점]

(b) (총 20점)

그림을 참고하여 $\overrightarrow{v_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$의 처음 8개의 항을 차례로 구해보면

$$\overrightarrow{v_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \overrightarrow{v_2} = (-1,0),\ \overrightarrow{v_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\ \overrightarrow{v_4} = (0,1),$$

$$\overrightarrow{v_5} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\ \overrightarrow{v_6} = (1,0),\quad \overrightarrow{v_7} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \overrightarrow{v_8} = (0,-1)$$

이고, 그 이후부터는 이 8개의 항이 반복된다. 따라서 $\overrightarrow{v_{8n}} = (0,-1)$이다.

[20점]

(c) (총 70점)

$\overrightarrow{v_n}$의 x좌표를 a_n이라 하면, 자연수 k에 대하여

$$a_{8k-7} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ a_{8k-6} = -1,\ a_{8k-5} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ a_{8k-4} = 0,$$

$$a_{8k-3} = \frac{-1}{\sqrt{2}},\ a_{8k-2} = 1,\quad a_{8k-1} = \frac{-1}{\sqrt{2}},\ a_{8k} = 0$$

이다. P_n의 x좌표를 x_n이라 하면, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} + \overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$$x_{n+1} = x_n + a_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}$$

[30점]

이다. 따라서

$$x_{1001} - x_1 = \sum_{n=1}^{1000}(x_{n+1} - x_n) = \sum_{n=1}^{1000} a_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}$$

이다. 그런데 $x_1 = 0$이므로

$$x_{1001} = \sum_{n=1}^{1000} a_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}$$

[10점]

이다. 이제

$$b_n = a_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2},\ c_k = b_{8k-7} + b_{8k-6} + b_{8k-5} + b_{8k-4} + b_{8k-3} + b_{8k-2} + b_{8k-1} + b_{8k}$$

라고 하면 $b_{8k-7} + b_{8k-6} = b_{8k-3} + b_{8k-2} = b_{8k-4} = b_{8k} = 0$이므로

$$c_k = b_{8k-5} + b_{8k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4k-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4k-1} = \frac{6}{2^{4k}}$$

이다. 따라서

$$x_{1001} = \sum_{n=1}^{1000} b_n = \sum_{k=1}^{125} c_k = \sum_{k=1}^{125}\frac{6}{2^{4k}} = \frac{6}{16}\cdot\frac{1-\frac{1}{16^{125}}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{5}\left(1-2^{-500}\right)$$

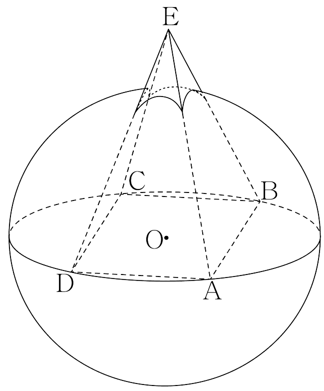
이다.

[30점]

[문제 3] (총 100점)

오른쪽 그림과 같이 정사각뿔 P의 5개의 꼭짓점을 A, B, C, D, E라 놓고, 다음과 같이 좌표를 도입하자.

$\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$, $\mathrm{C}(-1,0,0)$, $\mathrm{D}(0,-1,0)$, $\mathrm{E}\left(0,0,\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$



[30점]

세 점 A, B, E를 지나는 평면의 방정식은

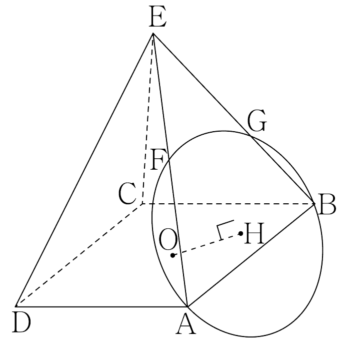
$$x+y+\frac{z}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}=1$$

이다. 이때 원점 O에서 삼각형 ABE에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\mathrm{H}\left(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}-1,\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right)$$

이다.

[20점]



구 S와 위 평면의 공통부분은 오른쪽 그림과 같이 점 A, B를 지나고 중심이 점 H인 원이 된다. 이 원과 삼각형 ABE의 변 AE, BE와의 교점을 각각 F, G라고 하자. (단, 두 점 F, G는 점 A와 B가 아니라고 하자.)

이제 두 점 F와 G의 좌표를 구해보자. 두 점 A와 E를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{1}=-\frac{z}{\sqrt{1+\sqrt{2}}},\ y=0$$

이고, 구 S의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=1$$

이므로, 연립하여 풀면

$$\mathrm{F}\left(\sqrt{2}-1, 0,\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right)$$

이다. 마찬가지로 직선 BE와 구면과의 교점을 구하면

$$\mathrm{G}\left(0,\ \sqrt{2}-1,\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right)$$

이다.

[20점]

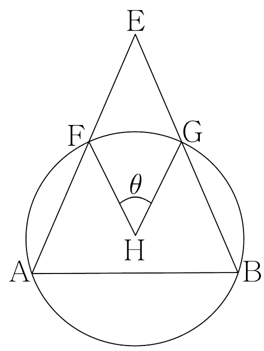
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{HF}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{HG}}$가 이루는 각을 θ $(0<\theta<\pi)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{HF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HG}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{HF}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{HG}}\right|}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로,

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

[20점]



이다. 이때, 부채꼴의 호 $\overset{\frown}{\mathrm{FG}}$의 길이 l은

$$l = \overline{\mathrm{HF}}\,\theta = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\pi$$

이다. 그런데 구하는 곡선의 길이는 호 $\overset{\frown}{\mathrm{FG}}$의 길이의 4배이므로

$$4l = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\pi$$

이다.

[10점]

[문제 4] (총 100점)

(a) (총 20점)

$f(x)=e^x$라 하면, 평균값의 정리에 의해

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(u_k)(x_{k+1}-x_k)=\frac{f'(u_k)}{n}$$

인 u_k가 x_k와 x_{k+1} 사이에 존재한다. 따라서

$$\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}=\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}=\frac{\sqrt{1+e^{2u_k}}}{n}$$

인 u_k가 x_k와 x_{k+1} 사이에 존재한다.

[20점]

(b) (총 80점)

문제 (a)에 의해 $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\dfrac{\sqrt{1+e^{2u_{k-1}}}}{n}$인 u_{k-1}이 x_{k-1}과 x_k 사이에 존재하므로

$$A_k=\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_{k-1}}\cdot\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\sqrt{1+e^{2x_{k-1}}}\cdot\frac{\sqrt{1+e^{2u_{k-1}}}}{n}$$

[10점]

이다. 따라서

$$\frac{1+e^{2x_{k-1}}}{n}\le A_k\le\frac{\sqrt{1+e^{2x_{k-1}}}\sqrt{1+e^{2x_k}}}{n}\le\frac{1+e^{2x_k}}{n}$$

[30점]

이므로

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+e^{2x_{k-1}}\right)\le\sum_{k=1}^{n}A_k\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+e^{2x_k}\right)$$

[10점]

이다. 그런데 정적분 $\displaystyle\int_0^1\left(1+e^{2x}\right)dx$의 정의로부터

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+e^{2x_k}\right)=\int_0^1\left(1+e^{2x}\right)dx=\frac{e^2+1}{2}$$

이다. 그리고

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+e^{2x_{k-1}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+e^{2x_k}\right)+\frac{2}{n}-\frac{1+e^2}{n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+e^{2x_{k-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+e^{2x_k}\right)=\int_0^1\left(1+e^{2x}\right)dx$$

이다. 따라서 극한값의 대소 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{e^2+1}{2}$$

이다. [30점]