

모의논술고사 문제지 (자연계열)

[논술고사 시간 : 2시간]

모집단위	학부·과	수험번호	성명
------	------	------	----

【 수험생 유의사항 】

1. 답안작성 시 제목은 달지 말 것.
2. 수험번호, 성명 등 자신의 신상과 관련된 사항을 답안에 드러낼 경우 부정행위로 간주함.
3. 답안지 작성 시 필기구는 반드시 흑색펜을 사용할 것. (청색/적색펜 및 연필은 사용 불가)
4. 문제지와 답안지의 문제번호가 일치하는지 반드시 확인할 것.(불일치시 0점 처리)
5. 풀이과정을 반드시 기술할 것. 기술의 형식과 내용은 평가의 주요한 요소임.
6. 글자수의 제한은 없으나 각 문항별 답안 작성 구역을 벗어날 경우 0점 처리합니다.
7. 답안지 수정은 두줄로 긋고 새로 작성하여야 함.(수정테이프는 사용할 수 없음)



[문제 1]

다음 물음에 답하여라.

(a) 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 의 그래프를 이용하여, 다음 부등식이 성립함을 보여라. [40점]

$$\int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx < \frac{1}{e}$$

(b) n 이 3 이상의 자연수일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라. [60점]

$$\frac{(\ln n)^2}{2} < \ln\left(2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 4^{\frac{1}{4}} \cdots n^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{e}$$

[문제 2]

좌표평면에 세 점 $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(0,1)$ 이 주어져 있다. 자연수 n 에 대하여 점 P_{n+3} 을 점 P_{n+2} 에서 선분 $P_n P_{n+1}$ 에 내린 수선의 발이라 하고, l_n 을 선분 $P_n P_{n+1}$ 의 길이라고 하자.

(a) l_n 의 값을 구하여라. [10점]

(b) 벡터 $\frac{1}{l_n} \overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ 을 \vec{v}_n 이라 할 때, \vec{v}_{8n} 을 구하여라. [20점]

(c) 점 P_{1001} 의 x 좌표를 구하여라. [70점]

[문제 3]

한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형을 밑면으로 하고 높이가 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ 인 정사각뿔 P 가 있다. 반지름의 길이가 1이고, 중심이 P 의 밑면의 무게중심인 구를 S 라고 하자. 구 S 와 정사각뿔 P 의 네 옆면과의 공통부분에서 P 의 밑면의 네 꼭짓점을 제외하면 곡선이 된다. 이 곡선의 길이를 구하여라.

[문제 4]

자연수 n 에 대하여 $x_k = \frac{k}{n}$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$)라 하고, 점 P_k 의 좌표를 (x_k, e^{x_k}) 라 하자.

다음은 모두 만족시키는 점 Q_k, R_k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$)에 대하여 아래 물음에 답하여라.

- (1) $\overline{P_k Q_k} = \sqrt{1+e^{2x_k}}$
- (2) 사각형 $P_k Q_k R_k P_{k+1}$ 이 직사각형이다.
- (3) 점 Q_k 는 함수 $y=e^x$ 의 그래프 아래에 있다.

(a) $\overline{P_k P_{k+1}} = \frac{\sqrt{1+e^{2u_k}}}{n}$ 인 u_k 가 x_k 와 x_{k+1} 사이에 존재함을 보여라. [20점]

(b) 직사각형 $P_{k-1} Q_{k-1} R_{k-1} P_k$ 의 넓이를 A_k 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k$ 의 값을 구하여라. [80점]