2014학년도 수시모집 논술전형

논술고사 해설지 (자연계열)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

Ⅰ. 내용영역 및 출제 의도

문항	교육과정 내용영역			출제의도 (평가영역)
	과목	대단원	중단원	
1	수학Ⅱ	미분법	여러 가지 함수의 미분법(매개변수)	계산능력, 이해능력
	적분과 통계	적분법	정적분	
2	수학Ⅱ	함수의 극한과 연속	함수의 극한	이해능력, 논리적 사고력, 문제해결능력
	기하와 벡터	이차곡선	포물선	
		벡터	벡터의 내적	
3	수학	순열과 조합	조합	분석 및 추론능력, 문제해결능력
	적분과 통계	순열과 조합	이항정리	
4	수학Ⅱ	미분법	도함수의 활용(속도와 가속도)	이해능력, 분석 및 추론능력, 문제해결능력
	적분과 통계	정적분의 활용	회전체의 부피	

*** 전반적으로 고등학교에서 학습한 다양한 내용의 범위에서, 이공계학생에게 필요한 계산능력 및 이해정도와 이를 활용하여 결론을 논리적 비약 없이 잘 서술할 수 있는 논리적 사고력, 분석 및 추론 능력, 문제해결능력을 평가하고자 하였다.**

Ⅱ. 문항별 예시답안

[문제 1]

(a)

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{y\frac{dx}{dt}} = \frac{-2x\cos x - \sin x}{-\cos x} = 2x + \tan x$$

(b)

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = 2x + \tan x$$

좌변과 우변을 각각 x에 대하여 적분하면

$$\int \frac{d(\ln y)}{dx}\, dx = 2\int x\, dx + \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

이므로

$\ln y = x^2 - \ln\cos x + C$ (C 는 적분상수)이다.

그런데 $x = 0$일 때 $y = 3$이므로 $C = \ln 3$ 즉, $\ln y = x^2 - \ln\cos x + \ln 3$ 이다.

따라서 $y = \dfrac{3e^{x^2}}{\cos x}$ 이다.

[문제 2]

(a)

조건 (1)에 의하여 $\overrightarrow{QP}=(t,-1)$ 과 수직인 벡터 $\overrightarrow{QR_i}$은 $(1,t)$와 평행하다. 그러므로 직선 $y=tx+1$는 R_1과 R_2를 지난다. 조건 (2)에 의하여, 준선 $y=-1$과 초점이 $Q(0,1)$인 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$위에 R_1과 R_2가 존재한다. 즉, R_1과 R_2는 직선 $y=tx+1$과 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$의 교점이다. R_1과 R_2의 x좌표 α, β는 방정식 $x^2-4tx-4=0$의 근이다.

그런데 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=4t$, $\alpha\beta=-4$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR_1}\cdot\overrightarrow{PR_2}&=\left(\alpha-t,\frac{\alpha^2}{4}\right)\cdot\left(\beta-t,\frac{\beta^2}{4}\right)\\&=(\alpha-t)(\beta-t)+\frac{\alpha^2\beta^2}{16}\\&=\alpha\beta-t(\alpha+\beta)+t^2+\frac{(\alpha\beta)^2}{16}\\&=-4-4t^2+t^2+1\\&=-3t^2-3\end{aligned}$$

(b)

$x^2-4tx-4=0$의 근은 $2t\pm\sqrt{4t^2+4}$ 이므로 R의 x좌표를 α라고 하면 $\alpha=2t-2\sqrt{t^2+1}$이다. 세 점 $O(0,0)$, $R\left(\alpha,\frac{\alpha^2}{4}\right)$, $S\left(-\alpha,\frac{\alpha^2}{4}\right)$를 지나는 원의 중심은 y 축에 있으므로 원의 방정식은 $x^2+(y-r)^2=r^2$ 이다. 이 원이 점 R을 지나므로

$$\alpha^2+\left(\frac{\alpha^2}{4}-r\right)^2=r^2,$$

$$\alpha^2+\frac{\alpha^4}{16}-\frac{r\alpha^2}{2}=0,$$

$r=2+\frac{\alpha^2}{8}=2+\frac{(t-\sqrt{t^2+1})^2}{2}$ 이다. 그런데,

$\lim_{t\to\infty}\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{t+\sqrt{t^2+1}}=0$ 이므로, $\lim_{t\to\infty}r(t)=2$ 이다.

[문제 3]

이항정리에서 n이 자연수일 때, $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_k\,a^{n-k}\,b^k$이므로 다음이 성립한다.

$$(a+b)^{2n}-(a-b)^{2n}=2\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{2n-(2k-1)}\,b^{2k-1},$$

$$(a+b)^{2n-1}-(a-b)^{2n-1}=2\sum_{k=1}^{n}{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{(2n-1)-(2k-1)}\,b^{2k-1}$$

(a)

$a\in A$이고 a의 자리의 숫자 중 1의 개수가 $2k-1$인 a의 개수는, 먼저 자리의 숫자 1의 위치를 2014곳 중에서 $2k-1$ 곳 선택하고, 나머지 $2014-(2k-1)$ 곳은 2, 3, 4, 5 중 어느 하나를 선택하는 방법의 수이므로, ${}_{2014}\mathrm{C}_{2k-1}\,4^{2014-(2k-1)}$이다.

따라서

$$2m=2\sum_{k=1}^{1007}{}_{2014}\mathrm{C}_{2k-1}\,4^{2014-(2k-1)}\,1^{2k-1}=(4+1)^{2014}-(4-1)^{2014}=5^{2014}-3^{2014}$$ 이다.

그런데 5^{2014}의 일의 자리의 숫자가 5, 3^{2014}의 일의 자리의 숫자가 9이므로 $2m$의 일의 자리의 숫자는 6이다.

(b)

(a)과 같은 방법으로 $a\in A$이고 a의 자리의 숫자 중 1의 개수가 $2k-1$, 2의 개수가 $2l-1$인 a의 개수는

$${}_{2014}\mathrm{C}_{2k-1}\cdot{}_{2014-(2k-1)}\mathrm{C}_{2l-1}\cdot 3^{2014-(2k-1)-(2l-1)}$$

이므로 다음이 성립한다.

[1] $2\sum_{l=1}^{1007-k}{}_{2014-(2k-1)}\mathrm{C}_{2l-1}\,3^{2014-(2k-1)-(2l-1)}\,1^{2l-1}=4^{2014-(2k-1)}-2^{2014-(2k-1)}$

[2] $2\sum_{k=1}^{1007}{}_{2014}\mathrm{C}_{2k-1}\,4^{2014-(2k-1)}=5^{2014}-3^{2014}$, $2\sum_{k=1}^{1007}{}_{2014}\mathrm{C}_{2k-1}\,2^{2014-(2k-1)}=3^{2014}-1^{2014}$

따라서 $4n=5^{2014}-2\cdot 3^{2014}+1$이고, 5^{2014}의 일의 자리의 숫자가 5, 3^{2014}의 일의 자리의 숫자가 9이므로 $4n$의 일의 자리의 숫자는 8이다.

[문제 4]

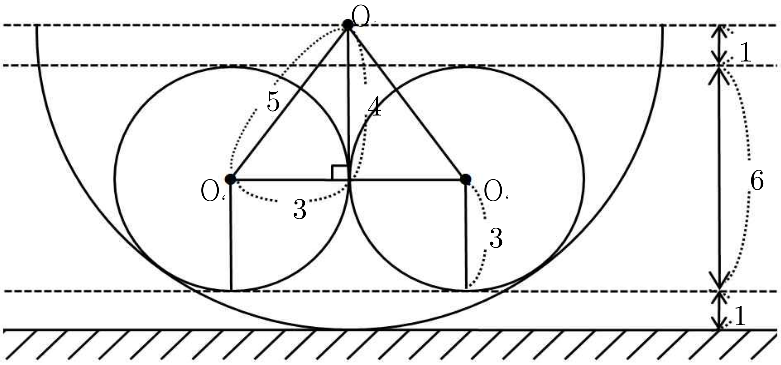
(a)

$x^2+(y-r)^2=r^2$ 에서 $x^2=r^2-(y-r)^2=2ry-y^2$ 이므로, 회전체의 부피 공식을 이용하면

$$\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h(2ry-y^2)dy=\pi\left[ry^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^h=\pi\left(rh^2-\frac{1}{3}h^3\right)$$

(b)

용기의 단면을 보면 작은 원 두 개가 서로 외접하고 동시에 큰 원에 내접하므로 삼각형 $\triangle O_1O_2O_3$는 밑변의 길이가 6cm, 빗변이 5cm인 이등변삼각형이다. 따라서 용기와 쇠공의 관계는 다음과 같다.



용기 안의 물의 양은 105π이고 (a)번 결과에 의해서 높이 1일 때와 높이 7일 때의 용기의 부피는 각각

$\frac{23\pi}{3}=\pi\left(8\times1^2-\frac{1}{3}\times1^3\right)$, $\frac{617\pi}{3}=\pi\left(8\times7^2-\frac{1}{3}\times7^3\right)-2\pi\left(3\times6^2-\frac{1}{3}\times6^3\right)$ 이다.

따라서 수면의 높이는 쇠공의 중간에 있고, 그때의 높이를 h라 하면 (a)로부터 부피는

$V=\pi\left(8h^2-\frac{1}{3}h^3\right)-2\pi\left\{3(h-1)^2-\frac{1}{3}(h-1)^3\right\}=\frac{\pi}{3}(h^3+42h-20)$이다.

따라서 채워진 물이 105π되는 순간, 수면의 높이는 방정식 $105\pi=\frac{\pi}{3}(h^3+42h-20)$의 해이므로 이것을 풀면

$h^3+42h-335=(h-5)(h^2+5h+67)=0$이고,

$h=5$ 이다. 또한 V의 식을 시간에 대해서 미분하면

$\frac{dV}{dt}=(\pi h^2+14\pi)\frac{dh}{dt}$인데 $\frac{dV}{dt}=21\pi$, $h=5$이므로 수면 높이의 속력은 $\frac{dh}{dt}=\frac{7}{13}$이다.