

2013학년도 수시모집 일반전형

논술고사 문제지 자연계열 B형

[논술고사 시간 17:00 ~ 19:00]

모집단위	학부·과	수험번호	성명
------	------	------	----

【 수험생 유의사항 】

1. 답안작성 시 제목은 달지 말 것.
2. 수험번호, 성명 등 자신의 신상과 관련된 사항을 답안에 드러낼 경우 부정행위로 간주함.
3. 답안지 작성 시 필기구는 반드시 흑색펜을 사용할 것. (청색/적색펜 및 연필은 사용 불가)
4. 문제지와 답안지의 문제번호가 일치하는지 반드시 확인할 것.(불일치시 0점 처리)
5. 글자수의 제한은 없으나 각 문항별 답안 작성 구역을 벗어날 경우 0점 처리함.
6. 답안지 수정은 두줄로 긋고 새로 작성하여야 함.(수정테이프는 사용할 수 없음)



서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

※ 풀이과정을 반드시 기술할 것. 기술의 형식과 내용은 평가의 중요한 요소임.

[문제 1]

자연수 n 을 자연수 m 으로 나누었을 때 몫이 q 이고 나머지가 r 인 경우 $n = mq + r (0 \leq r < m)$ 로 나타낼 수 있다. 다음 물음에 답하여라.

- (a) $4^{2000} - 1$ 이 5^4 의 배수임을 보여라.
- (b) $503^{2000} - 1$ 이 5^4 의 배수임을 보여라.
- (c) 2012^{2000} 을 5^4 으로 나눈 나머지를 구하여라.
- (d) 2012^{2002} 을 10^4 으로 나눈 나머지를 구하여라.

[문제 2]

두 무한수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 에 대하여 새로운 수열 $\{c_n\}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} \quad (n \geq 1) \quad (\text{즉, } c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1, \quad \dots)$$

이 때, $\{c_n\} = \{a_n\} \diamond \{b_n\}$ 이라고 하자.

수열 $\{a_n\}$ 을 $\{a_n\} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ 로 나타낼 때, 다음은 연산 \diamond 을 적용한 예제이다.

$$\begin{aligned} (0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, \dots) \diamond (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots) &= (0, 1, 3, 3, 2, 0, 0, \dots) \\ (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \diamond (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

모든 무한수열들의 집합을 S 라고 하면, 연산 \diamond 는 S 에서 정의된 연산이다. 임의의 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 에 대하여 $\{a_n\} \diamond (\{b_n\} \diamond \{c_n\}) = (\{a_n\} \diamond \{b_n\}) \diamond \{c_n\}$ 이 성립한다.

다음을 만족하는 수열을 $\{e_n\}$ 이라고 하자.

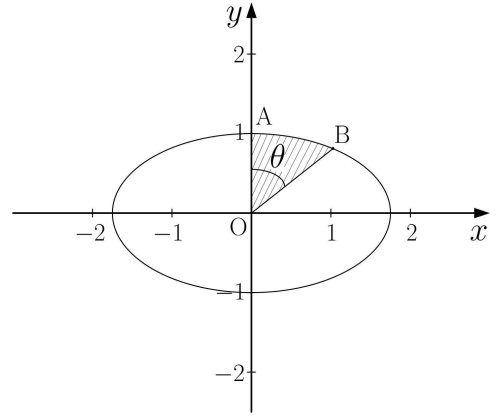
임의의 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\{a_n\} \diamond \{e_n\} = \{a_n\}$ 이다.

다음 물음에 답하여라.

- (a) 수열 $\{e_n\}$ 을 구하여라.
- (b) 임의의 자연수 m 에 대하여 수열 $\{a_n\} = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ 을 m 번 반복 연산하여 얻은 수열 $\underbrace{\{a_n\} \diamond \dots \diamond \{a_n\}}_m$ ($m=2$ 인 경우, $\{a_n\} \diamond \{a_n\}$ 을 의미함)의 일반항을 구하여라. (단, 증명할 필요 없음)
- (c) 수열 $\{3^{n-1}\} = (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$ 에 대하여 $\{3^{n-1}\} \diamond \{b_n\} = \{e_n\}$ 을 만족하는 수열 $\{b_n\}$ 을 구하여라. 또한 수열 $\{n \cdot 3^{n-1}\} = (1, 6, 27, 108, \dots)$ 에 대하여 $\{n \cdot 3^{n-1}\} \diamond \{c_n\} = \{e_n\}$ 을 만족하는 $\{c_n\}$ 을, $\{b_n\}$ 을 이용하여 나타내어라.

[문제 3]

그림과 같이 좌표평면에 장축의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이고 단축의 길이가 2인 타원이 있다. 타원 위의 점 B가 점 A(0,1)에서 출발하여 시계 방향으로 돌고 있다. 이 때, $\angle AOB = \theta$ 라 하자. 다음 물음에 답하여라.



(a) 선분 OB의 길이를 θ 를 이용하여 나타내어라.

(b) 시각 $t(0 \leq t \leq 1)$ 에서 $\theta = 2\pi t^2$ 이다. $\theta = \frac{\pi}{4}$ 인 순간에 점 B의 속력을 구하여라.

(c) 두 선분 OA, OB와 타원으로 둘러싸인 빗금 친 영역을 x 축 둘레로 회전시켜서 생긴 회전체의 부피 $V(\theta)$ 를 구하고, $V(\theta)$ 의 θ 에 대한 변화율이 최대가 되는 θ 를 구하여라. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.)