[예시 답안 및 채점 기준]

[문제 1]

(a) (총 30점)
직선 l의 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$l : y - a^2 = 2a(x-a) \Leftrightarrow y = 2ax - a^2 \qquad (10점)$$

또한, $m: \ y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x-a) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$ (10점)

점 Q를 구하기 위해 $y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$ 과 $y = x^2$ 의 두 방정식을 연립하여 풀면 다음과 같다.

$$x^2 + \frac{1}{2a}x - a^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x-a)\left(x + a + \frac{1}{2a}\right) = 0 \quad .$$

따라서 Q의 좌표는 $\left(-a - \frac{1}{2a}, \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2\right)$ 이 된다. (10점)

(b) (총 50점)
선분 PQ 의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{PQ} = f(a) = \sqrt{\left(a + a + \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(a^2 - \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{16a^4} + 3} \ . \qquad (10점)$$

$f(a)$와 $f(a)^2$은 같은 a에서 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(a)^2$ 의 최솟값을 구하면 된다.

(10점)

여기서 $g(a) = f(a)^2$ 이라고 놓으면 $g(a) = 4a^2 + \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{16a^4} + 3$ 이 된다.

최솟값을 구하기 $g'(a)$를 계산하면 다음과 같다.

$$g'(a) = 8a - \frac{3}{2a^3} - \frac{1}{4a^5} = \frac{32a^6 - 6a^2 - 1}{4a^5} \quad . \qquad (10점)$$

여기서 윗 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$$g'(a) = \frac{32a^6 - 6a^2 - 1}{4a^5} = \frac{(2a^2-1)(4a^2+1)^2}{4a^5} \quad .$$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $g'(a) = 0$이 되고, $g''(a) = 8 + \frac{9}{2a^4} + \frac{5}{4a^6} > 0$ 이다. (10점)

따라서 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 최솟값을 가진다. 이때 $f(a)$의 최솟값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다. (10점)

(c) (총 20점)

직선 l의 기울기는 $\tan\theta$와 같다. 즉, $\tan\theta = 2a = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 이 된다.

그러므로 삼각함수 성질에 의해, $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이고 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이 된다. (10점)

여기서 $\sin(4\theta) = 2\sin 2\theta\cos 2\theta$ 이고 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 이고 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ 이다.

$\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이고 $\cos 2\theta = -\frac{1}{3}$ 이므로, $\sin 4\theta = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ 이 된다. (10점)

[문제 2]

(a) (총 20점)

코사인 제2법칙에 의해서

$$\cos B = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times (\sqrt{2} + \sqrt{6})} = \frac{1}{2}.$$

그러므로 $B = \frac{\pi}{3}$ 이다. (10점)

외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때, 사인 법칙에 의해서

$$2R = \frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$$

이므로 $R = 2$이다. (10점)

(b) (총 30점)

사인 법칙에 의해서 $\sin C = \frac{2\sqrt{2}}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로, $C = \frac{\pi}{4}$ 이다. 이 때,

$$A = \pi - B - C = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} \ .$$ (10점)

중심각은 원주각의 2배이므로, 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이는 각각

$$\frac{1}{2}R^2\sin(2C),\ \frac{1}{2}R^2\sin(2A),\ \frac{1}{2}R^2\sin(2B)$$

이다. (10점)

그러므로 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이의 비는

$\frac{1}{2}R^2\sin(2C) : \frac{1}{2}R^2\sin(2A) : \frac{1}{2}R^2\sin(2B) = \sin\frac{\pi}{2} : \sin\frac{5\pi}{6} : \sin\frac{2\pi}{3} = 2 : 1 : \sqrt{3}$ (10점)

(c) (총 50점)

삼각형 AOC는 $\angle \mathrm{AOC} = \frac{2\pi}{3}$이고, $\overline{AO} = \overline{OC} = 2$인 이등변 삼각형이다. 그러므로 다음과 같은 좌표를 도입할 수 있다: O(0, 0), C(2,0), A(−1, $\sqrt{3}$). (10점)

점 D는 중심이 (0, 0)이고, 반지름 2인 원 위에 있으므로, 점 D의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ ------ } (1)$$

이다.

삼각형 ACD의 무게 중심을 M(X, Y)라고 하면,

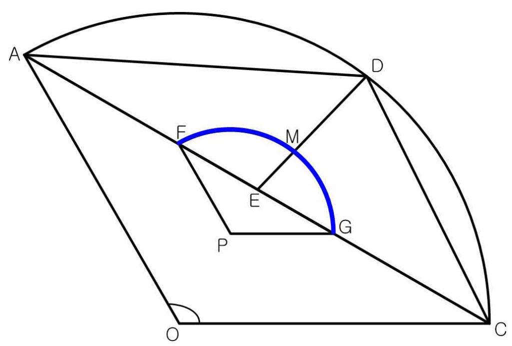
$$(X,\, Y) = \left(\frac{-1+2+x}{3},\, \frac{\sqrt{3}+0+y}{3}\right) = \left(\frac{x+1}{3},\, \frac{y+\sqrt{3}}{3}\right)$$

이다. (10점)

그러므로 $x = 3X - 1 = 3\left(X - \frac{1}{3}\right)$, $y = 3Y - \sqrt{3} = 3\left(Y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$이고, 이를 식 (1)에 대입하여 정리하면

$$\left(X - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(Y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{-------}(2)$$

이 된다. (10점)



또한, 삼각형 ACD의 무게 중심은 변 AC의 중점 $E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$과 D를 1: 2로 내분하는 점이므로, 점 D가 A로 접근하면 점 M은 $F\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$로 접근하고, 점 D가 C로 접근하면 점 M은 $G\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$로 접근한다. 그러므로 구하고자 하는 자취는 현 FG에 의해서 잘린 원 (2)의 호가 된다. (단, 경계 제외) (10점)

이 때, 선분 FG의 길이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다. 원 (2)의 중심을 P라 하면,

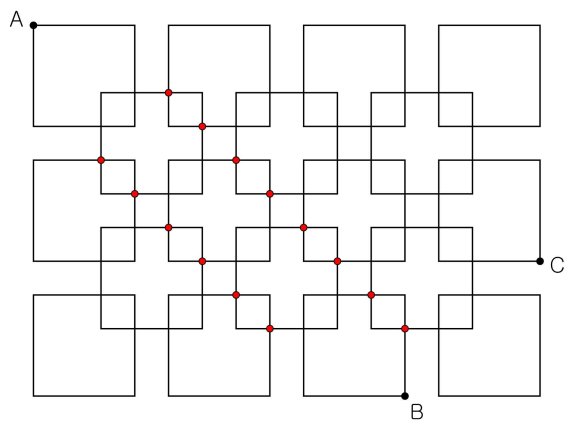
$$\cos(\angle \mathrm{FPG}) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}$$

이므로 각 FPG=$\frac{2\pi}{3}$ 이다. 그러므로 구하는 자취의 길이는 $\frac{2\pi\times\frac{2}{3}}{3}=\frac{4\pi}{9}$ 이다. (원 (2)의 중심이 삼각형 AOC의 내부 즉, 선분 AC의 아랫부분에 있으므로 선분 FG에 의해서 잘린 두 개의 호 중 작은 쪽 호) (10점)

[문제 3]

(a) (총 50점)

점 A에서 점 B로 가는 최단 경로들은 아래의 그림에서 위에 줄지어 있는 8개의 점을 차례로 지나가는 경우와 아래에 줄지어 있는 6개의 점을 차례로 지나가는 두 가지의 경우로 나뉜다. (20점)



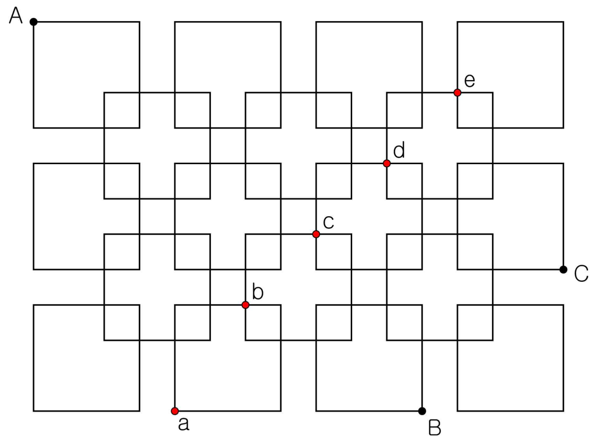
위의 8개의 점을 차례로 지나가는 최단경로의 수는 1×2×2×2×2×2×2×1 = 128개이다. (10점)

아래의 6개의 점을 차례로 지나는 최단경로의 수는 32개이다. (10점)

따라서 총 최단경로의 수는 160개이다. (10점)

(b) (총 50점)

점 A에서 점 C로 가기 위해서는 아래의 5개점 중 하나를 지나야 한다. 이 점들을 아래로부터 차례로 a, b, c, d, e 라고 하자. (15점)



A에서 a까지의 최단경로의 길이는 17. a에서 C까지의 최단경로의 길이는 17이므로, a를 경유하는 최단 경로의 길이는 34이다.

A에서 b까지의 최단경로의 길이는 14, b에서 C까지의 최단경로의 길이는 14이므로, b를 경유하는 최단 경로의 길이는 28이다.

A에서 c까지의 최단경로의 길이는 14, c에서 C까지의 최단경로의 길이는 10이므로, c를 경유하는 최단 경로의 길이는 24이다.

A에서 d까지의 최단경로의 길이는 16, d에서 C까지의 최단경로의 길이는 8이므로, d를 경유하는 최단 경로의 길이는 24이다.

A에서 e까지의 최단경로의 길이는 18, e에서 C까지의 최단경로의 길이는 8이므로, e를 경유하는 최단 경로의 길이는 26이다.

따라서, A에서 C까지의 최단경로는 c 또는 d를 경유하여야 한다. (20점)

A에서 c로 가는 최단경로의 수가 16개이며, c에서 C로 가는 최단경로의 수가 8개이므로, c를 경유하는 최단경로의 수는 128개이다.

A에서 d로 가는 최단경로의 수가 32개, d에서 C로 가는 최단경로의 수가 8개이므로, d를 경유하는 최단경로의 수는 256개이다.

따라서, A에서 C로 가는 최단경로의 수는 384개이다. (15점)