2010학년도 정시모집

자연계열 논술고사 문항설명 및 채점총평

2010. 7

서울대학교 입학관리본부

목 차

2010학년도 정시모집 논술고사 (자연계열)

I 시행 개요

1 개념 및 성격

◦ 우리 대학교의 논술고사는 개별 교과 지식의 단순 암기가 아니라, 교과 영역간의 전이과정에서 발현되는 통합적·창의적 사고력을 측정하며, 고등학교 교과과정에 나와 있는 내용을 토대로 다각적이면서도 심층적인 사고 과정을 통해 문제 상황을 재구성하고, 창의적으로 문제를 해결하는 과정과 논리적으로 서술하는 능력을 측정하는 과정 중심형 시험이다.

◦ 논술은 고등학교 교육과정을 통하여 학생의 내면에서 길러지는 통합적 사고력의 신장을 지향하며, 우리 대학교의 논술을 대비하기 위해서는 교과별로 분리되어 이루어지는 학습이 아니라, 서로 다른 교과들에서 얻어진 지식을 넘나들며 소통하는 학습을 통해 지식의 영역 전이 능력을 갖추는 것이 필요하다.

◦ 이를 위해 단순 문제 풀이식이나 일방적인 주입식의 수업방식에서 벗어나, 학생들과 상호 소통하며 사고력을 신장시키는 교육으로의 변화가 요구된다.

2 시행

◦ 대상: 자연계열 모집단위 1단계 합격자

◦ 자연계열 모집단위
  · 문항 수: 4문항
  · 고사시간: 300분(1, 2번 문항 150분; 3, 4번 문항 150분)
  · 답안분량: 논제별로 답안 분량 제한은 없음(연필 사용 허용)

3 출제 방향 및 취지

출제 과정에서 가장 중요하게 고려하였던 점은 1) 고등학교 교과서 지문과 주제 활용, 2) 사교육을 통해 급조되거나 암기된 지식이 아니라 공교육을 통해 길러지는 비판적 사고력과 창의적 문제해결능력 측정, 3) 교육과정의 정상적인 운영을 통한 공교육의 질적인 향상에 기여한다는 것이었다.

이를 위해 고등학교 교과과정에서 다루고 있는 기본적인 개념과 원리를 바탕으로 이와 관련된 다양한 정보를 제공하였으며, 중등교육과정을 이수하며 습득한 수학과 과학적 지식을 쓰나미, 호흡, 나선, 별 등 구체적인 자연 현상에 적용하여 과학적인 모형을 구상하고 통합적인 추론을 유도할 수 있는 논제들로 문항을 구성하였다. 평가 과정에서는 깊이 있는 사고와 통합적 추론능력을 가장 중요한 기준으로 삼았다.

각 문항의 소재와 제시문 내용은 고등학교 교육과정과의 연관성이 높도록 선정하였다. 논술에서 교과서의 내용을 최대한 활용하는 것은 학생들이 사교육에 의존하지 않고도 스스로 충분히 준비할 수 있도록 하고, 동시에 학생들이 논술을 준비하는 과정이 입시 위주의 단순 반복학습과 지식 암기에서 벗어나 자기주도적 학습능력과 토론 등을 통한 사고능력을 배양할 수 있는 바람직한 교육의 한 과정으로 정착되는 데 기여하고자 함이다.

Ⅱ 문항설명 및 학생답안

1 총평

출제된 문항은 모두 중등교육과정에서 다루어진 친숙한 주제를 다루고 있다. 그러나 단순히 답을 찾는 문제가 아니라, 주제와 관련된 자료와 정보를 분석하여 구체적인 자연현상에 적용할 수 있는 과학적인 모형을 구상하고 논리적으로 추론해야 하는 문항이다. 논술고사에서는 결론을 도출하는 과정에서 어떤 논거로 논의를 전개하느냐가 매우 중요하며, 따라서 논제 해결 과정에서 제시문의 정보를 적절히 활용해야 한다.

그럼에도 불구하고, 채점 과정에서 공통적으로 지적된 문제점은 바로 제시문의 활용에 관한 것이었다. 이 문제는 두 가지로 나누어 볼 수 있는데, 하나는 많은 학생들이 제시문의 내용을 무시한 채 기존에 습득한 지식을 단순히 나열하여 출제의도와 무관한 답안을 작성했다는 점이고, 다른 하나는 제시문을 '지나치게 적극적으로 활용'하여 제시문의 내용을 단순히 재조합했다는 점이다. 특히 후자는 2009학년도까지 두드러진 답안 경향이 아니었으나, 2010학년도에는 어렵지 않게 발견할 수 있었다. 2010학년도 정시모집 논술고사 문항이 고등학교 교육과정과 깊이 연계되어 대체로 평이한 수준이었다는 의견이 많았음에도 불구하고, 대부분의 평가자들은 학생들이 작성한 답안의 내용과 수준이 예년에 비해 떨어진다는 의견을 공통적으로 내놓고 있다. 이는 위에서 지적한 문제점이 심화되고 있기 때문으로 보인다. 제시문은 문제해결을 위해 필요한 배경지식(조건)과 정보를 제공하고 있지만, 이는 논제 해결을 위한 '도구'일 뿐이며, 제시문 자체가 해결책은 아니다. 따라서 주어진 정보를 활용할 경우 반드시 논제와 연결된 고리를 찾아내야 하며, 단순히 주어진 정보를 재구성하는 것은 논제에 대한 설명이 될 수 없다. 친숙한 주제라고 생각하여 제시문과 논제를 무시하고 '익숙한' 방법으로 답안을 작성하게 되면, 논제의 핵심을 놓치거나 이와 무관한 답안이 만들어진다.

각 논제들은 통합적 추론을 요구하고 있기 때문에 개별 논제에 한정하지 말고 논제들의 관계에 대하여 생각해 보아야 한다. 또한 어떠한 원칙이 항상 적용될 수 없다는 것을 보여주기 위해서 성립하지 않는 경우 하나를 제시할 수 있으나, 하나의 예가 성립하다고 하여 이를 일반화시키는 것은 오류가 될 수 있다. 그리고 적절한 인용이나 예시는 논리 전개를 더 명확하게 해 줄 수도 있으나, 그렇지 못한 인용이나 예시는 논제에 대한 학생의 이해 부족을 드러내기도 한다.

결국 학생 스스로 생각하여 문제를 해결하는 능력을 기르지 않는다면, 다양한 논제가 출제되는 논술고사에서 통합적 추론과 종합적 사고를 보여주는 답안을 작성하기는 쉽지 않아 보인다. 교과서의 내용을 암기해야 할 지식으로 받아들이지 말고, 기본 원리와 개념에 대한 이해, 여러 원리와 개념에 대한 통합적 적용, 비판적 사고력과 유연한 사고력을 배양하기 위한 토양으로 활용해야 한다.

※ 예시된 답안은 문항에 대한 이해를 돕기 위해 각 논제별로 실제 학생들의 답안을 조합한 가상의 답안임

2 문항 1

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 해일, 너 왜 그랬어

해저 지각이 융기·침강하거나 해안가에 산사태가 나거나, 운석이 바다에 떨어지는 것과 같이 급격하게 해수면 높이가 변하면 해일이 생긴다. 이를 쓰나미(Tsunami)라고 부르는데, 우리 나라에서는 지진해일이라고도 한다.

2004년 12월 인도네시아 근처 심해에서 규모 9.0 가량의 해저 지진이 일어났다. 이 해저 지진이 원인이 되어 인도네시아를 비롯한 주변 인도양 해안가에 거대한 해일이 일어났다. 인도네시아에서 수천 km 이상 떨어진 아프리카 해안가에도 해일이 일어나 많은 피해가 발생했는데, 과학자들은 이 해일의 원인도 인도네시아 지진 때문이었다고 발표하였다.

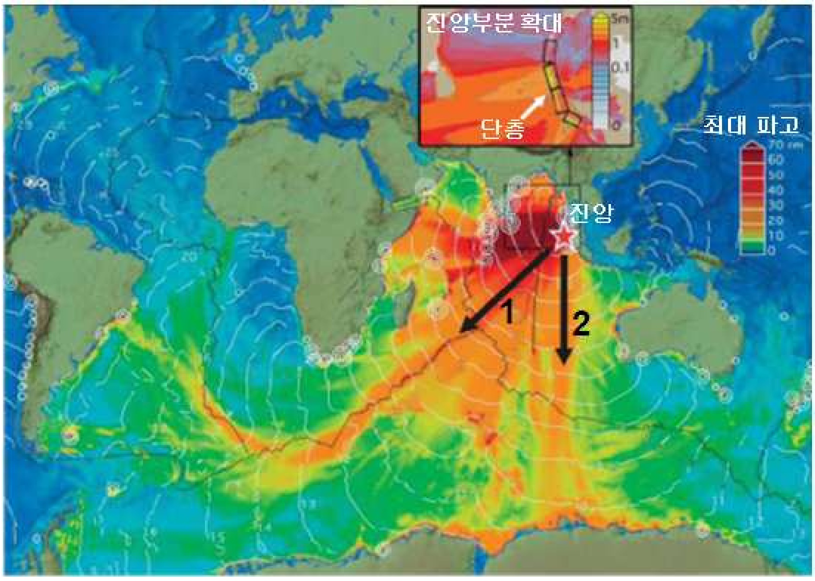
물질의 한 부분에 변화가 생기고, 그 변화가 물질을 따라 차례로 퍼져 나가는 것을 파동이라고 하며, 바다에서 일어나는 쓰나미와 호숫가에서 볼 수 있는 동심원 물결은 장소나 범위는 다르지만 모두 파동에 해당한다.(고등학교 과학, 한국과학창의재단)

(나) 대양의 폭군, 쓰나미의 정체

먼 바다에서는 쓰나미의 파장이 100km 이상이지만, 파고는 1m 정도에 불과해 쓰나미를 관측하기 어렵다. 인도네시아 해저 지진 때도 먼 바다 위에 있던 사람들은 피해를 상대적으로 덜 보았다. 쓰나미의 이동 속도는 약 시속 900km로 매우 빠르다. 그런데 해안에 가까이 올수록 수심이 얕아짐에 따라 파의 속도가 느려지고 파고는 높아져, 엄청난 파괴력으로 해안을 강타한다.(『교양으로 읽는 과학의 모든 것 Ⅱ』, 한국과학창의재단)

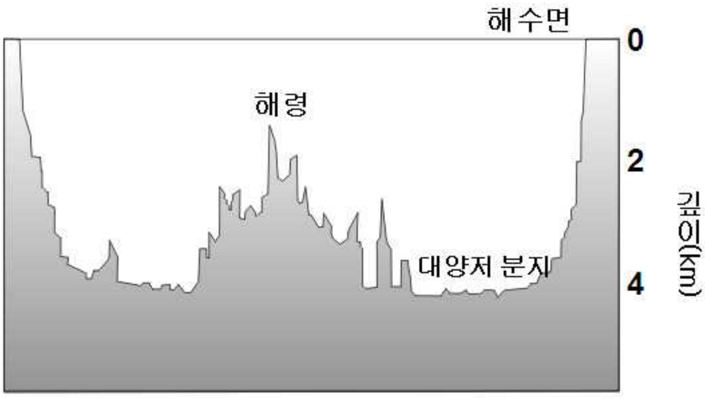
(다) 해저지형

대양의 중앙부에는 수심이 약 4km 정도의 심해저 평원이 있다. 심해저 평원에는 [그림 3]처럼 평탄한 대양저 분지와 해령이 있다. 해령은 전체 길이가 약 65,000km에 달하는 거대한 산맥으로 경사가 급하고 불규칙하며 폭은 약 1,000km, 수심은 약 2km이다. 미국의 서부 해안에서 시작된 해령은 동태평양, 남태평양, 인도양을 지나 아프리카 남쪽 대양을 거쳐 대서양 중심부를 관통하여 북극해로 이어진다.(지구과학 Ⅰ 교과서)



[그림 1] 컴퓨터로 모사한 2004년 인도네시아 지진에 의한 쓰나미의 전파 양상


[그림 2] 해저 지형도



[그림 3] 해저 지형의 수직 단면도

(라) 수면파의 전파

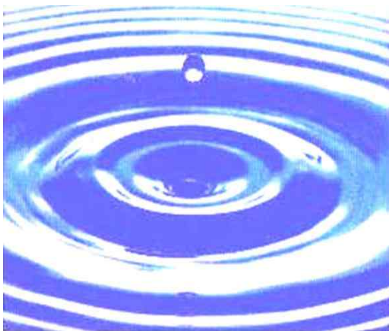
수면파는 [그림 4]와 같이 중력이 복원력으로 작용하여 수면 부근의 물이 진동하면서 에너지를 전달하는 파동 현상이다. 지진으로 인한 쓰나미도 수면파의 일종으로 파장이 수심에 비해 길기 때문에 쓰나미의 속력은 아래 식과 같이 나타낼 수 있다.

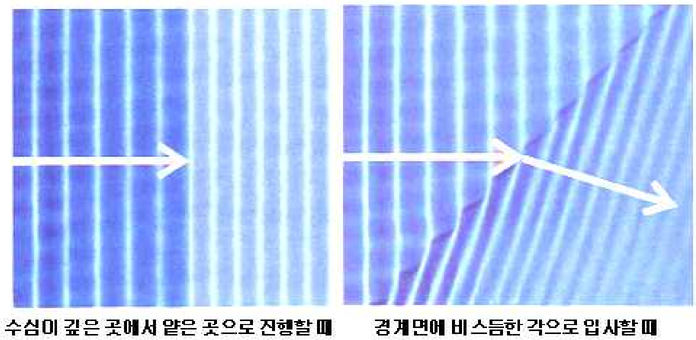
$$v = \sqrt{gH} \qquad (H\text{ :수심, } g(\text{중력가속도}) \simeq 10\mathrm{m/s^2})$$

쓰나미의 세기는 진행 방향에 수직한 단위 면적을 통하여 단위 시간에 전파하는 파동 에너지로 정의 되며, 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$I = 2\pi^2 \rho v A^2 f^2 \quad (\rho\text{:해수의 밀도, } v\text{:파동의 속력, } A\text{:진폭, } f\text{:진동수})$$

파동이 전파될 때 속력이 변하면 [그림 5]와 같이 굴절 및 반사가 일어난다.

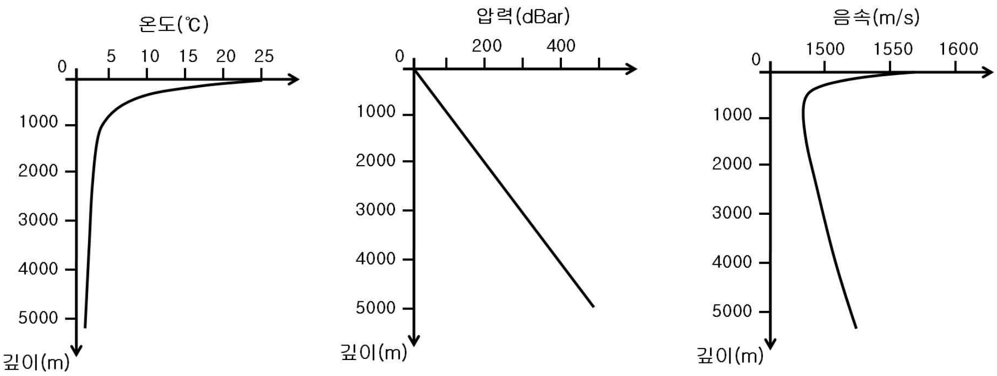

[그림 4] 수면파의 전파



[그림 5] 수면파의 굴절 및 반사

(마) 해양 내부에서 음파의 전파

쓰나미는 해양의 표면을 따라 전파되나 고래가 내는 소리 등 바다에서 발생하는 다양한 음파는 해양 내부를 통해 전파된다. 해양에서 평균 음속은 약 1,500m/s이지만 해양의 온도, 압력 등에 따라 변한다. [그림 6]은 일반적인 중위도 지역 해양에서 온도, 압력 및 음속의 연직분포를 나타낸 것이다.



[그림 6] 깊이에 따른 온도, 압력 및 음속

논제 1. 쓰나미가 먼 바다에서 해안에 가까이 올수록 수심이 얕아짐에 따라 속도가 느려지고 파고는 높아지는 이유를 제시문에 근거하여 논하시오.

논제 2. [그림 1]에서 인도네시아 지진으로 발생한 쓰나미는 복잡한 전파 양상을 보인다. 대표적으로 화살표 1의 방향으로 진행하는 파동은 아프리카를 우회하는 경로를 따라 띠 모양으로 전파하였고, 화살표 2의 방향으로 진행하는 파동은 거의 직진하여 남극에 도달하였다. 방향 1과 방향 2에서 서로 다른 전파 양상을 보이는 이유를 제시문에 주어진 정보를 활용하여 논하시오.

논제 3. 해양에서 고래들은 수백 km 떨어진 거리에서도 의사소통을 할 수 있다. 그 원리를 [그림 6]에 근거하여 설명하고, 해양 연구에 어떻게 활용할 수 있는지 논하시오.

출제의도 및 문항설명

◦ 자연 재해 중 하나인 쓰나미(지진 해일)를 소재로 고등학교 과학과 물리 I에 나오는 파동에 대한 기본 개념을 다루고 있다. 주어진 제시문의 내용을 종합적으로 이해·분석하고 실제 자연에서 일어나는 다양한 현상에 적용하도록 하여 학생의 통합적 추론능력을 평가하고자 하였다.

출전 및 참고 교과서

◦ 쓰나미의 기본적인 전파 양상을 이해하는 데 필요한 쓰나미 및 파동 관련 정보를 교과서 내용을 중심으로 제시하였다.
- 제시문 (가) : 쓰나미의 기본적인 개념, 원리 및 실제 사례 (고등학교 과학, 한국과학창의재단, p434~437)
- 제시문 (나) : 쓰나미의 전파 속도 (『교양으로 읽는 과학의 모든 것 Ⅱ』, 한국과학창의재단, p92)
- 제시문 (다)~(마) : 해양에서 쓰나미의 속도 변화를 추론할 수 있는 해저 지형, 파동, 음파의 전파에 대한 설명으로 내용의 일부는 고등학교 과학교과에서 발췌하였고 일부는 고등학교 과학교과 내용을 토대로 작성 (지구과학 Ⅰ 교과서, 천재교육, p 128~129 등)

논제, 학생 답안, 채점평

❑ 논제 1

자연의 주요 원리인 에너지보존 법칙을 적용하여, 파동을 만들어낸 에너지는 보존되어야 한다는 전제를 세우고, 수심이 급격하게 얕아지는 해안가로 파동이 전파되어 올 경우 속도 변화에 의해 파동의 진폭이 어떻게 변할지 제시문에 주어진 여러 요인들을 고려하여 논리적으로 설명하도록 하였다.

수심에 따른 쓰나미의 속도(속력)는 제시문 (라)에 $v=\sqrt{gh}$로 주어져 있기 때문에 해안가에서 쓰나미의 속도가 느릴 때 파고가 높아지는 이유를 설명하면 된다. 단위 파장 당 파동의 에너지는 진폭과 주파수의 제곱에 비례하기 때문에 파고(진폭)가 높아지면 파장 당 파동 에너지는 증가하게 되지만, 에너지 보존 법칙에 의해 파동을

만들어낸 에너지는 항상 보존이 되어야 한다. 이는 쓰나미가 전파되는 동안 공간적인 에너지의 분포는 달라질 수 있지만 에너지의 총합은 항상 일정해야 한다는 것을 의미한다. 이러한 개념을 이해하고 논제에 대한 답안을 작성한 경우가 많았으나, <학생 답안 2>의 경우와 같이 바닷물의 이동을 모델로 논의를 전개하거나, 주어진 제시문의 내용을 단순히 재조합한 답안은 좋은 평가를 받지 못했다.

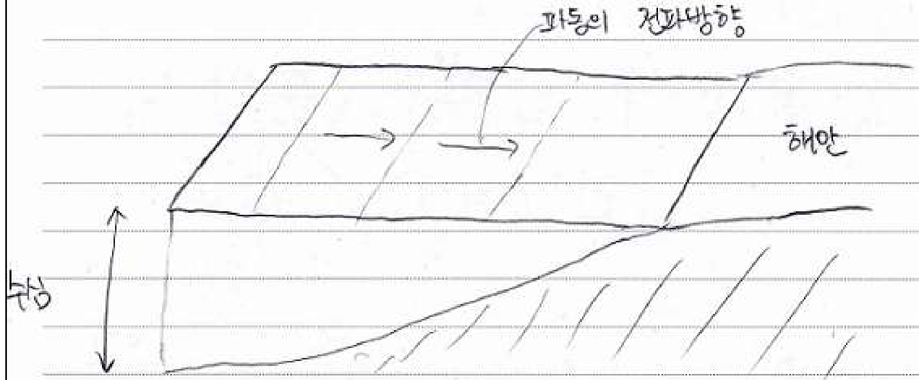
<학생 답안 1>

파동의 전파에 따른 에너지 손실이 없다는 가정을 통해 실제 파동 에너지는 감소하여도 파동을 만들어 낸 총 에너지는 보존되어야 한다는 개념을 설명하였다. 또한 평면파 가정을 통해 쓰나미의 진폭과 속도의 관계를 해석하고, 쓰나미의 전파 양상이 원형파와 비슷할 것이라는 점을 추론하여 이를 통한 진폭의 변화 양상을 기술하여 좋은 평가를 받았다. 다만, 수심이 달라져도 파동이 진행하는 면적이 같다는 가정에서, 쓰나미가 수면을 따라 전파하는 파동이기 때문이라는 점을 명확히 제시하지 않고 있다.

논제 1.

파동이 전파할 때, 에너지의 손실은 없다고 가정하자.

아래의 그림과 같이 수심이 깊은 곳에서 얕은 곳으로 진행하고, 파면이 해안선에 평행한 파동을 생각해 보자.



<그림 1.1 쓰나미의 특성을 알아보기 위한 모델>

그림 1.1의 경우 수심이 달라져도 파동이 진행하는 면적은 같다(*) 파동이 전파할 때 에너지의 손실은 없다고 가정하였으므로 파동의 세기는 수심이 깊은 곳과 얕은 곳이 같아야 한다.

제시문 (가)에서 주어진 것과 같이 파동의 세기는 다음과 같이 나타내어진다.

$$I = 2\pi^2 \rho v A^2 f^2 \quad \langle 식\ 1.1 \rangle$$

여기서 해수의 밀도 ρ와 파동의 진동수 f가 수심의 변화에도 일정하다고 가정하면, 다음과 같은 식이 성립한다

$$v_1 A_1^2 = v_2 A_2^2$$ (첨자 1과 2는 각각 앞쪽과 깊은곳을 나타냄) 〈식 1.2〉

그런데 수면파의 속력은 다음과 같이 주어진다.

$$v = \sqrt{gH} \quad \langle 식\ 1.3 \rangle$$

식 1.3을 식 1.2에 대입하면 아래와 같다.

$$\sqrt{gH_1}\, A_1^2 = \sqrt{gH_2}\, A_2^2 \quad \langle 식\ 1.4 \rangle$$

$H_1 < H_2$ 이므로 식 1.3에서 $v_1 < v_2$이고, 식 1.4에서 $A_1 > A_2$를 만족한다.
즉, 수심이 얕아짐에 따라 쓰나미의 속도는 느려지고 진폭(혹은 파고)은 커진다.

그림 1.1의 모델을 사용해 진앙지에서 1m의 진폭을 가진 파도가 해안가에서 얼마나 큰 진폭을 갖는지를 계산해보자.

해안가에서의 수심을 1m라 하자. 그럼 해안에서의 파도의 속력은 식 1.3에 의해 $\sqrt{10}\,m/s \approx 3.1m/s$ 이다. 그리고 제시문(나)에서 주어진것과 같이 진앙지에서의 속도는 $900km/h = 250m/s$ 라 하자.

이 때 식 1.2에 의해

$$3.1 \times A_{해안}^2 = 250 \times A_{진앙}^2$$

이 성립한다. $A_{진앙} = 1m$라 하고 계산하면 $A_{해안} \approx 9m$ 가 된다.

그렇지만 실제 쓰나미의 경우 한 점에서 파동을 발생시킨 원형파와 비슷하고, 진앙지로부터 거리가 멀어질수록 파동이 전파되는 면적이 증가하기 때문에 그림 1.1의 모델에서 사용한 가정(*)은 성립하지 않는다 이 경우 진앙지로부터 거리가 멀수록 파동이 전파되는 면적이 증가하기 때문에 수심이 얕아질수록 (진앙지로부터 거리가 멀어질수록) 파동의 세기는 감소하고, 이것은 실제 해안에서의 진폭이 위에서 구한 값보다 작다는 것을 의미한다.

<학생 답안 2>

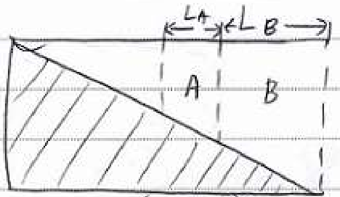
에너지 보존의 관점이 아니라 바닷물이 흘러가는 모델을 사용하여 문제에 접근하였으나, 실제 쓰나미가 발생한 지역의 바닷물이 해안으로 흘러가는 것은 아니라는 점을 생각하지 못하고 논의를 전개하였다.

논제1)

파동의 속력은 매질이 바뀌면 변화하게 된다. [그림 5] 에서와 같이 수심이 달라지면 파의 진행속도도 변하게 된다. 즉, 파동이 액체인 매질을 통해 전파될 때 수심이 얕아지면 바닥과의 마찰이 증가하게 되어 속도가 느려진다. 따라서 수면파의 일종인 쓰나미도 수심이 깊은 먼 바다에서 수심이 얕은 해안가로 오면서 속도가 줄어든다. 이 때, 쓰나미의 파장이 수심에 비해 길기 때문에 그 속력 V는

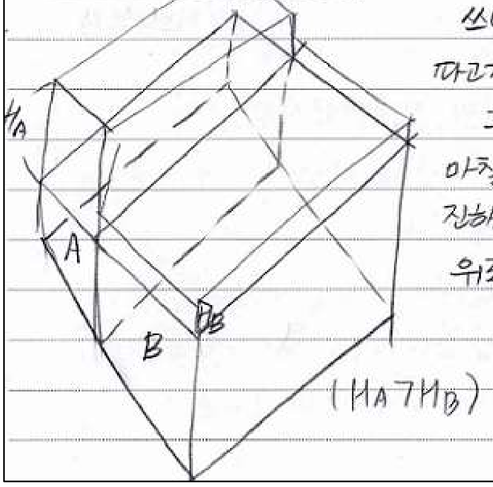
$V = \sqrt{gH}$ 로 나타내지으로 이를 통해서도 수심이 얕아지면 쓰나미의 진행속도도 낮아짐을 알 수 있다.

이렇게 해안가에 다가오면서 쓰나미의 속도가 줄게 되어도 이동하는 바닷물의 양은 거의 일정하다. 즉,



왼쪽 그림에서 쓰나미가 B부분을 이동할 때 t시간 동안 이동한거리가 L_B라면 A부분은 같은 시간 동안 이동할때는 L_A정도의 거리만 이동할 수 있다. 따라서 바닷물의 부피를 고려했을 때, 쓰나미가 B에서 A로 진행하면 A부분의 파고가 더 높아야 한다. ($H_A > H_B \Rightarrow V_A \fallingdotseq V_B$)

그리고 해안가로 다가올수록 바닥에 의한 마찰의 영향이 더 크게 작용하므로 바닷물의 진행이 어렵게된다. 따라서 진행하지 못하고 위로 올라오게 된다



❑ 논제 2

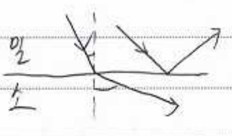
주어진 해저의 지형에 대한 정보와 파동 개념에 대한 이해를 토대로 2차원적인 쓰나미의 속도 변화를 유추하고, 이에 따라 전파 양상이 어떻게 바뀔 수 있는지 설명하도록 하였다.

해수면의 높이는 지역에 따라 크게 달라지지 않기 때문에 쓰나미의 전파 속도를 결정하는 수심은 해저 지형에 따라 변하게 된다. 중앙해령(해령)은 비교적 평탄한 심해저 평원에 높게 솟아있는 해저 산맥으로, 해령이 위치하고 있는 지역의 수심은 다른 지역보다 급격하게 낮아지기 때문에 해령의 수평적 모양에 따라 띠 모양의 저속도대가 만들어지게 된다. 해양의 수심이 항상 일정하다면 인도네시아에서 발생한 쓰나미는 [그림 4]와 같이 동심원의 파면을 그리면서 전파하게 되나, 복잡한 해저 지형의 영향으로 전파 양상도 복잡해지게 된다. 제시문 (라)에 주어진 수면파의 전파를 참고하여 논의를 전개하도록 유도하였다. 설명과정에서 <학생 답안 1>에서와 같이 전반사라는 용어를 사용하지 않았어도 파동이 저속도대 내부에 갇히게 된다는 개념을 이해하고 설명한 경우는 좋은 평가를 받았으나, 단순히 굴절에 의해 우회할 수 있다고 설명하거나 <학생 답안 2>와 같이 논제에서 묻고 있는 바와 상관없이 논의를 전개한 답안은 좋은 평가를 받지 못했다.

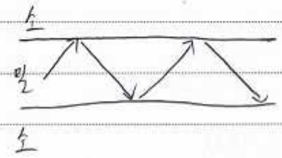
<학생 답안 1>

해령에 의해 쓰나미 전파 속도가 느린 지역이 생긴다는 점을 관찰하였고, 쓰나미가 전파 속도가 낮은 해령으로 직접 입사할 경우와 각도를 가지고 입사할 경우에 일어날 수 있는 현상들을 개념적으로 잘 설명하여 좋은 평가를 받았다.

2. 쓰나미는 논제 1에서 구했듯 수심이 얕은 곳에서 속력이 빨라진다. 그런데 화살표 1의 방향은 그림 2의 아프리카 대륙을 감싸며 지나가는 해령과 평행한 방향임을 알 수 있다. 파장이 속력이 느린 곳(밀한 곳)에서 속력이 빠른 곳(소한 곳)으로 이동할 때는 그림 (가)와 같이 입사각에 비해 반사각이 크고 입사각이 매우 크다면 전반사가 일어나기도 한다. 해령부분은 주위의 대양저분지에 비해 수심이 2km 가량 더 얕다. 따라서 해령 위쪽 부분은 대양저 분지 위쪽에 비해 더 밀한 곳이라 할 수 있다. 인도네시아 지진으로 발생한 파동 중 화살표 1 방향으로 향한 진동은 약간의 파동은 주위의 대양저분지로 빠져나갔어도 대부분의 파동은 그림 (나)에서 보듯 마치 광섬유와 비슷한 원리로 전반사를 하며 해령부분을 따라가게 된다.

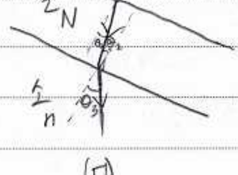


(가)



(나)

화살표 2의 방향으로 향하는 파동은 처음에는 대양저분지를 지나다가 매우 작은 입사각으로 해령부분을 지나가게 된다 (그림 (다)) 서로 다른 밀도를 가진 매질을 통과할 때는 다음과 같은 식이 성립한다 $n\sin\theta_1 = N\sin\theta_2$ 두 경계면이 평행하기 때문에 밀한 곳(N)에서의 굴절각과 입사각은 θ_2로 같다 따라서 $N\sin\theta_2 = n\sin\theta_3$ 이므로 $n\sin\theta_1 = n\sin\theta_3$, $\theta_1 = \theta_3$ 이므로 화살표 2 방향으로 가는 파동은 거의 직진하여 남극에 도달하게 된다



(다)

<학생 답안 2>

쓰나미와 지진파를 구별하지 못하였고, 쓰나미의 전파와 관계가 없는 지각운동을 이용하여 설명하려고 하였다. 제시문에서 논제를 해결하는 데 필요한 방향을 제시하고 있음에도 불구하고, 이에 대한 이해가 불충분하여 논제의 요구와 다른 논의를 전개하였다.

논제2)

화살표 1의 방향과 경로를 살펴보면 해령을 따라 아프리카를 우회하는 경로임을 알 수 있다. 화살표 2의 경로도 역시 남극쪽을 향해 직선으로 뻗어있는 해령을 따른 경로이다. 따라서 방향 1과 방향 2가 차이나는 이유는 쓰나미의 진행경로에 있는 해령이 뻗어있는 경로차이에 의한 것임을 알 수있다.

쓰나미가 해령을 따라 이동하게되는 이유는 [그림1]의 진앙부분에서 일어난 단층이 원인이 되어 쓰나미가 발생했기 때문이다. 즉, 단층에 의한 지진이 발생한 진앙의 진동이 해저 지형 중에서 가장 지각운동이 활발한 해령을 따라 전달되었기 때문에 쓰나미의 진행이 해령을 따라 일어났고 이에 따라 화살표 1과 2의 경로차이가 발생했다.

❑ 논제 3

해양의 깊이에 따른 온도, 압력, 음속 그래프의 해석과 논제 2의 결론으로부터, 약 1,000m 깊이에서 음파가 먼 거리까지 전파될 수 있는 원리를 유추하도록 하였다. 또한 이 원리가 해양 연구에 어떻게 활용할 수 있는지를 추론하도록 하였다.

제시문에 주어진 그래프를 해석하여 저속도대가 파동의 전파에 미치는 긍정적인 영향을 고려하여 해양 내부에 존재하는 음파의 저속도대를 어떻게 활용할 수 있을지 추론하면 된다. 일부 학생들이 음파의 저속도대 활용 방안으로 해저 지형 탐사를 거론하였으나, 논제 3에서는 음파가 수평적으로 멀리 전파될 수 있는 성질을 이용한 활용 방안에 대해 묻고 있기 때문에 수직적인 음파의 전파가 중요한 해저 지형 탐사는 적절한 예가 될 수 없다.

<학생 답안 1>

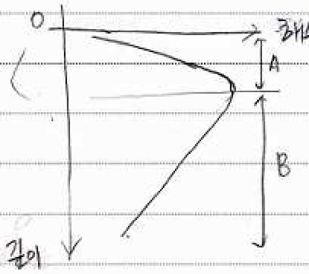
제시문에서 주어진 음속 변화 그래프를 비교적 정확하게 해석하였으며, 주어진 음속 구조에서 음파가 손실 없이 전파될 수 있는 이유를 개념적으로 잘 설명하여 좋은 평가를 받았다.

논제3) 쓰나미는 수면을 따라 전파되는 경우여서 $v = \sqrt{gH}$ 의 속력식을 따랐다. 그러나 고래가 내는 소리를 비롯한 다양한 음파는 해양 내부를 통해 전파된다. 이때 역시 파동에너지 I 진동수 f가 일정하다고 가정할 수 있고 전파시 진폭 A의 변화가 없다고 가정하자.

$I = 2\pi^2 \rho v A^2 f^2$ 에서 $v = \frac{I}{2\pi^2 A^2 f^2} \frac{1}{\rho} = C \cdot \frac{1}{\rho}$ (C: 일정한 상수)

즉 음파의 전파 속도는 해수 밀도에 반비례할 것이다.

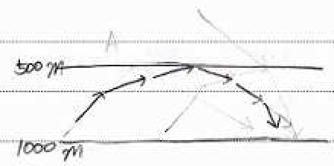
해수의 밀도는 압력에 비례하고 온도에 반비례한다. [그림 6]의 깊이에 따른 온도, 압력 그래프를 바탕으로 <그래프 1>을 추정할 수 있다.



A구간은 온도증가에 따른 해수밀도 감소요인이, B구간은 깊이증가에 따른 압력증가가 주요 요인이다. 이는 [그림 6]의 깊이에 따른 음속 그래프와 반비례 관계이다.

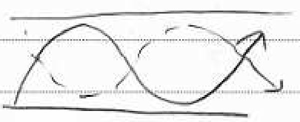
<그래프 1>

깊이 약 500 ~ 1000 m 정도에서 음속이 가장 작은 구간이 존재한다. 이 구간에서 <그림 1>의 A와 같이 전반사와 굴절이 일어난다. 파동의 전파 방향이 연속적으로 변하는 이유는 매질 밀도 분포가 연속적이기 때문이다.



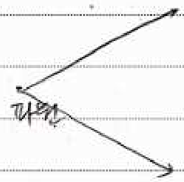
<그림 1>

따라서 <그림2>와 같이 파동이 이 구역을 따라 발산하지 않고 진행한다. <그림3>과 같이 진행함에 따라 파동에너지가 분산되지 않으므로 고래들은 먼 거리에서도 의사소통을 할 수 있다.



<그림 2>

이를 해양 연구에 이용하여 원거리 해양 탐사, 레이더 같은 탐지 장치에 활용할 수 있다.



<그림 3>

<학생 답안 2>

단순히 음파의 전파 속도가 빠르기 때문에 고래들이 원거리에서도 의사소통이 가능하다고 해석하였으나, 이는 논제를 정확히 이해하지 못한 답변으로 좋은 평가를 받을 수 없다.

<논제 3>

고래가 포유류이며 항온동물임을 생각하면 고래는 온도가 비교적 높은 수심 500m 이내에 서식한다고 생각할 수 있다. (또한 주기적으로 숨을 쉬러 수면으로 올라오는 점도 고려하였다)

[그림 6]의 음속에 대한 그래프를 통해 수심 500m 이내는 비교적 음속이 빠른 것을 알 수 있다.

가령 두 고래가 150km 떨어져 있다 하더라도 해양에서는 공기중의 음속인 340m/s 보다 월등하게 빠른 1500m/s 가량이기 때문에 100초에 한마디씩 주고받을 수 있어 의사소통에 문제가 없다.

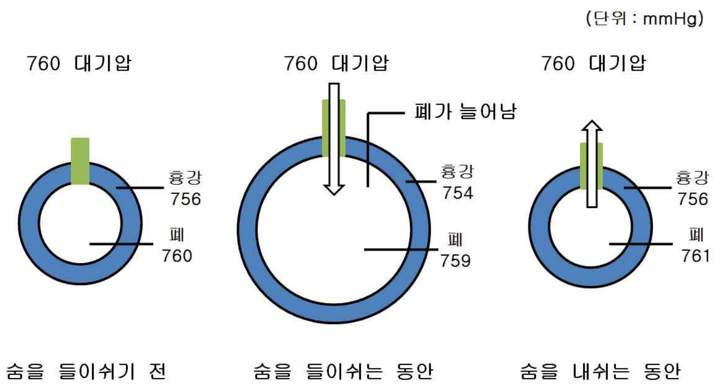
이를 이용해 해양에서의 새로운 통신 방법이나 고래와의 의사소통일 고래를 이용한 해양탐사를 해양연구로 활용할 수 있다

3 문항 2

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가)

공기 중에서 폐를 통해 호흡을 하는 동물도 있고 물에서 아가미를 통해 호흡하는 동물도 있다. 호흡의 목적은 산소를 받아들이고 이산화탄소를 내보내는 것이다. 인간의 호흡은 늑간근과 횡격막의 상하 운동에 의해 일어난다. 즉, 늑간근이 수축하여 늑골을 끌어올리고, 횡격막이 아래로 내려가면 흉강의 부피가 커진다. 이에 따라 흉강 내의 압력이 낮아지므로 외부의 공기가 폐 속으로 들어온다. 반대로, 늑간근과 횡격막이 이완하면 흉강의 부피가 감소되어 흉강 내의 압력이 높아지므로 폐 속의 공기가 외부로 밀려 나간다. 기도를 통해 들어온 공기는 폐포에 이르게 되는데 폐포의 표면은 모세혈관이 감싸고 있어 기체 교환이 일어난다. 폐포의 수는 약 3억 개 정도가 있는데, 하나의 폐포는 지름이 0.1mm에 지나지 않지만 전체 표면적은 약 70m^{2}에 달한다. 보통 성인은 일상적인 활동을 위해 1분당 8L의 공기를 흡입한다. (생물 Ⅰ 교과서)



[그림 1] 호흡 운동시 흉강과 폐의 기압 변화

기체	대기의 성분비 (부피(%))	사람의 들숨 성분비 (부피(%))	사람의 날숨 성분비 (부피(%))	물 용존 기체의 성분비 (부피(%))	물 1kg당 용존 기체의 질량(mg)
질소	78.08	78.62	74.50	64.7	14.0
산소	20.95	20.84	15.70	33.3	6.5
이산화탄소	0.03	0.04	3.60	1.5	85.0

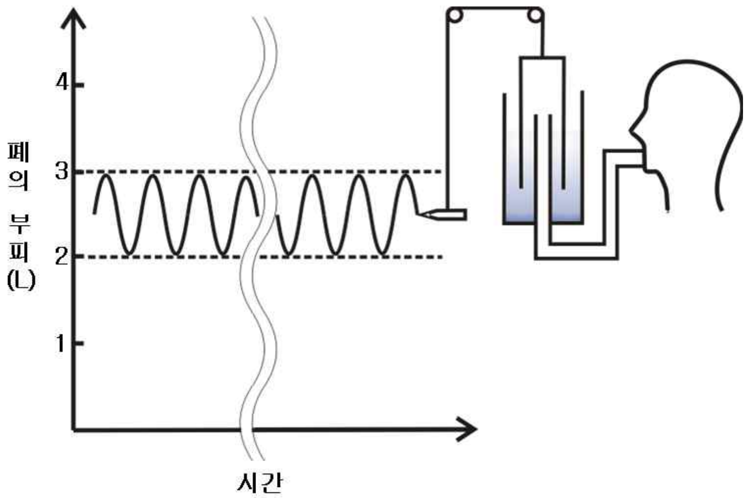
<표 1> 20°C, 1기압에서 대기, 물, 사람의 들숨, 날숨 내 주요 기체의 성분비

* 20°C 에서 물의 밀도는 1g/cm^3, 공기의 밀도는 1.18g/L 이다.

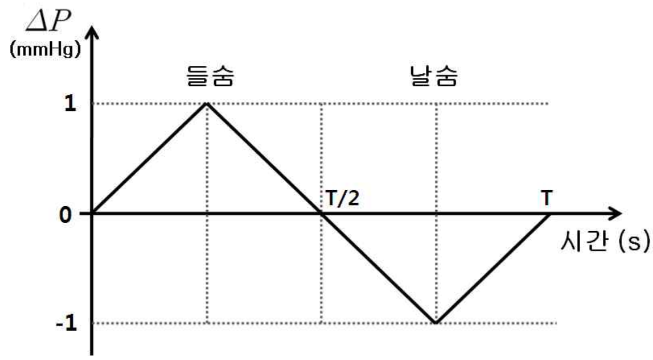
* 20°C 에서 기체의 물에 대한 용해도(g/L·기압)는 질소 0.019, 산소 0.043, 이산화탄소 1.69 이다.

(나)

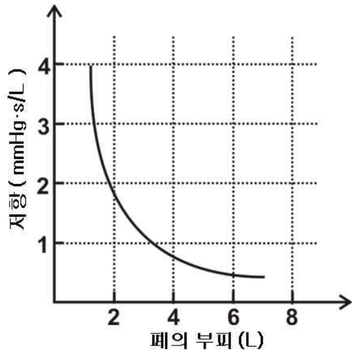
[그림 2]는 사람이 호흡하는 동안 폐의 부피변화를 나타낸다. 사람이 Δt 동안 들이마신 공기의 양을 ΔV라고 하면, 단위시간당 폐로 들어오는 공기의 유입량 Q는 $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$로 표현할 수 있다. 사람이 1회 호흡하는 동안 시간에 따라 변하는 대기와 폐사이의 기압차 ΔP는 [그림 3]과 같이 단순화시켜 생각할 수 있다. 공기가 폐로 흡입되는 동안 호흡기관의 기하학적 구조 및 공기의 점성도에 의해 공기의 흐름이 방해를 받는데, 이때의 저항 R은 $\dfrac{\Delta P}{Q}$로 표현되며, 폐의 부피에 따라 [그림 4]와 같이 변한다.



[그림 2] 사람이 호흡 하는 동안 폐의 부피 변화



[그림 3] 시간에 따른 대기와 폐 사이의 기압차이 (T: 1회 호흡에 걸리는 시간)



[그림 4] 폐 부피에 따른 저항

논제 1. 공기가 물보다 더 효과적인 호흡 환경일 수 있다. 그 이유를 물과 공기의 기체조성, 기체의 확산, 호흡을 위한 근육 운동에 필요한 에너지량의 관점에서 논하시오.

논제 2. 대기 중 이산화탄소 농도 증가는 온실효과로 인해 지구 온난화를 유발한다. 이산화탄소와 온도의 증가가 육상에서 폐호흡을 하는 정온동물과 수중에서 아가미호흡을 하는 변온동물의 호흡 가스 교환 작용에 어떤 영향을 미칠 수 있는지 추론하시오.(단, 이산화탄소와 온도의 영향을 각각 분리해서 설명하고, 제시문에 주어진 정보를 활용하시오.)

논제 3. [그림 3]에서 대기와 폐의 최대 기압 차이는 1mmHg에 불과하다. 사람이 1분에 16회 호흡할 때, 1mmHg의 기압 차이가 일상적 활동에 필요한 분당 8L의 공기를 유입하는 데 충분함을 보이시오.

논제 4. 폐포 내부의 표면에는 얇은 수막이 형성되어 있다. 정상아보다 일찍 태어난 미숙아의 경우 폐포 내의 세포가 계면활성제를 제대로 만들지 못해 폐포를 부풀려 호흡하는 데 어려움을 겪을 수 있으며 이로 인해 사망할 수도 있다. 이를 유아호흡장애증후군이라고 하며, 다른 동물로부터 얻거나 인공적으로 합성된 계면활성제를 직접 폐포 내에 뿌려주는 방법으로 치료하기도 한다. 유아호흡장애증후군이 생기는 원인과 계면활성제를 이용한 치료법이 유용한 이유를 물과 계면활성제의 분자 구조와 상호 작용의 관점에서 추론하시오.

출제의도 및 문항설명

◦ 물과 공기는 모든 생명 활동과 자연 현상이 만들어지는 가장 중요한 조건이다. 오늘날 지구 환경은 온난화와 더불어 급격한 변화를 보이고 있으며 이는 생태계의 변화를 초래할 수 있다. 동물의 호흡을 통해 지구 환경 변화가 생태계에 미칠 영향을 중등교육과정에서 배운 기본적인 과학적 개념에 기초하여 통합적으로 이해하고 논리적으로 추론할 수 있는지 평가하고자 하였다. 이를 위해서 단순한 지식의 나열이 아니라 주어진 자료를 이용하여 과학적인 근거를 토대로 결론을 도출하도록 제시문과 논제를 구성하였다.

출전 및 참고 교과서

◦ 제시문 (가)에서는 사람의 호흡기 구조와 들숨과 날숨이 일어나는 기본 원리를 설명하였다. (생물 I, 도서출판 형설, p 82~86). 또한 호흡 운동에 영향을 끼치는 물과 공기의 물리·화학적 특성에 대한 몇 가지 자료를 제시하였다.

◦ 제시문 (나)에서는 교과서의 내용을 참고하여 사람이 호흡하는 동안 폐의 부피가 어떻게 변화하는지를 설명하고, 호흡 현상을 역학적 모형으로 단순화하여 접근할 수 있음을 보여주었다.

논제, 학생답안, 채점평

❑ 논제 1

공기로부터 산소를 얻는 것이 물에서 산소를 얻는 것보다 여러 측면에서 효과적일 수 있는 이유를 묻고 있다. 제시문에 설명된 물과 공기의 물리·화학적 특성에 대한 이해를 토대로 확산 현상과 호흡을 위한 생물의 에너지 소모량 관점에서 이를 설명하도록 하였다.

호흡가스의 교환 속도는 주변 환경과 호흡기관간의 기체 분압차, 호흡매질의 밀도 및 점성 등에 의해 영향을 받는다. <표 1>로부터 단위부피당 공기와 물의 산소함유량, 밀도 등을 확인할 수 있다. <학생 답안1~4>는 제시문에 주어진 자료를 비교하여 공기가 물보다 더 효과적인 호흡매체임을 설득력 있게 설명하였다. 자연과학 자료를 비교하여 논의 전개에 활용할 경우 비교 단위를 일치시켜야 함이 기본이다. 또한 근육운동에 필요한 에너지량의 관점에서 물은 공기보다 점성이 높기 때문에 가스 교환 표면으로 공기를 움직이는 것보다 물을 움직이는데에 더 많은 에너지가 필요하므로

생물의 호흡 에너지 소모 측면에서 공기가 물보다 효율적이다. 이를 물리적 일량의 관점에서 접근한 시도는 참신하였다.(<학생 답안 1>과 <학생 답안 4>)

반면, <학생 답안 5>처럼 기본 단위 환산을 하지 못한 경우나, <학생 답안 6>과 같이 논제의 핵심과 동떨어진 지식을 단순히 나열한 경우는 좋은 평가를 받지 못했다.

<학생 답안 1>

논제 1.

공기와 물의 기체조성을 보면 공기보다 물의 산소 조성비가 크다는 것을 알 수 있다. 하지만, 공기와 물 1L 당 들어있는 산소의 절대값을 비교하자면, 물의 밀도는 $1g/cm^3$ 이므로 $1kg/L$ 가 된다. 물 1kg에 녹아 있는 산소의 질량은 6.5mg 이므로 물 1L 에 들어있는 산소는 6.5mg 이다. 반면에 공기 1L 들어 있는 산소의 양을 구하면, 공기 1L의 기체의 몰수를 kmol 이라 하면, 질소의 분자량 : 28, 질소의 몰분율 : $\frac{4}{5}$, 산소의 분자량 : 32, 산소의 몰분율 : $\frac{1}{5}$, 공기 1L의 질량 1.18g 에서 $28 \times \frac{4}{5}k + 32 \times \frac{1}{5} \times k = 1.18$

$k = \frac{118}{20 \times 144}$ mol 이고 산소의 질량은 $\frac{32}{5}k \cdot g$ 이므로 $\frac{32}{5}k = \frac{32}{5} \times \frac{118}{20 \times 144} \fallingdotseq 0.253g = 253mg$ 가 된다. 따라서 공기가 물보다 단위부피당 산소를 많이 가지고 있는 것이다. 그리고 물의 경우가 이산화탄소의 조성비가 높아 호흡을 하는데 악영향을 준다.

또, 기체는 물보다 공기에서 확산속도가 빠르므로 공기가 물보다 산소와 이산화탄소의 확산을 빠르게 할 수 있다.

마지막으로 호흡을 위한 근육의 에너지의 양을 비교해 보자. 한번의 호흡에 1L의 공기나 물이 들어갔다 나온다고 가정하고, 호흡기의 길이를 lm이라 하자. 물 1L의 질량은 1kg 이고, 공기 1L의 질량은 1.18g 이다. 이때 날숨을 하는데 소모되는 에너지는 $E = mgl$ (g는 중력가속도, m은 물질의 질량) 이므로 공기의 경우 $1.18gl$ ~~g~~ m/s^2 이 소모되고, 물의 경우 $1000gl$ gm/s^2 이 소모된다. 따라서 공기의 경우가 호흡을 하는데 필요한 에너지가 적어 효율적이다.

위에 제시된 사실에 근거하면 물의 경우보다 공기의 경우가 더 효과적인 호흡환경임을 알 수 있다.

<학생 답안 2>

[논제 1] <표 1> 에서 대기의 기체성분비와 물 용존기체의 성분비를 비교해 보면 물속 환경에서 산소와 이산화탄소의 분압이 모두 공기중 환경보다 높음을 알 수 있다.
기체교환은 폐포 또는 아가미의 모세혈관과 외부환경의 기체 분압차이에 의한 확산으로 일어나는데 물속에선 이산화탄소의 비중이 공기중보다 훨씬 크므로 이산화탄소의 배출이 더 느리게 이루어진다.
또한 기체의 혼합물인 공기에 비해 액체상태인 물은 입자들이 밀한 정도가 매우 크다. 밀한 매질에서 기체의 운동은 더 많은 방해를 받으므로 기체의 확산 속도가 느려진다. 이로인해 기체교환의 효율도 떨어진다. (물의 밀도: $1g/cm^3$, 공기의 밀도 $1.18g/L$)
물은 공기보다 점성이 더 큰 매질이므로 호흡기관을 통과할 때 더 큰 저항에 부딪히며 이 저항을 극복하기 위해 더 많은 근육운동이 필요하므로 에너지 소모량도 커진다.
이처럼 물속에선 기체교환의 효율성이 떨어지고 호흡을 위해 필요한 에너지 소모량도 크므로 공기가 물보다 더 효과적인 호흡환경이라 할 수 있다.

<학생 답안 3>

논제2. 공기가 물보다 더 효과적인 호흡환경일 수 있다는 것을 보기위해 세가지 관점을 분석해볼 수 있다.
첫번째 관점이 물과 공기의 기체조성의 관점이다. 물 1L와 공기 1L를 비교해보자. 물 1L의 질량은 1kg이므로 <표1>에 의해 O_2 6.5mg을 포함한다. 공기의 경우 1L에 20.95%의 부피를 O_2가 차지한다. 공기의 밀도는 1.18g/L 이므로 공기 1L에는 1.18g의 입자가 포함되어 있다. 이때, 질소, 산소, 이산화탄소의 분자량을 같다고 보면 1.18g 중 약 20%가 산소이므로 산소는 약 220mg이 포함되어 있다. CO_2의 관점에서 볼 수도 있는데 O_2와 같이 계산하면 물 1L속엔 85mg 공기 1L속엔 $1.18g \times \frac{0.03}{100} \fallingdotseq 35mg$이 포함되어 있다. 호흡의 목적이 O_2를 흡수하고 CO_2를 방출하는 것이므로 O_2가 많고 CO_2가 적을수록 좋은 호흡환경이라고 볼 수 있는데 기체조성의 관점에서 공기속에 물에비해 더 많은 O_2와 더 적은 CO_2가 포함되어 있으므로 공기가 물보다 더 나은 호흡환경이다.
두번째로 기체의 확산의 관점에서 볼수 있다. 기체의 경우 분압이 높은 곳에서 낮은 곳으로 확산이 일어난다. 그러므로 분압차가 클수록 확산이 잘 일어난다. 기체조성의 관점에서 나타난 결과 공기가 물에 비해 더 높은 O_2분압과 더 낮은 CO_2 분압을 가진다. 즉, O_2, CO_2의 체내와 분압차 모두 공기에서 크므로 (P_{O_2}: 공기>물>체내, P_{CO_2}: 체내>물>공기 로 볼 수 있다.) 기체확산의 관점에서 O_2가 CO_2에 비해 유리하다.
세번째로 호흡을 위한 근육 운동에 필요한 에너지량의 관점에서 볼 수 있다. 기체의 경우 압력차이에 따른 이동이 쉬워 공기호흡환경에서는 늑간근, 횡경막운동 만으로도 충분하다. 반면, 물속에서 호흡하는 경우 아가미호흡과 같은 호흡이 필요하고, 산소가 용해되어 있는 (공기와 접하고 있는 수면근처) 물쪽으로 직접 이동하여야 한다. 즉, 공기호흡에서는 기체를 이동시킴으로써 다른 근육의 작용이 필요없지만 수중호흡에서는 직접다니면서 호흡해야 하므로 호흡에 필요한 근육의 에너지 소모에 더불어 이동에의한 에너지 소모가 더해져, 공기호흡이 수중호흡에 비해 유리하다.
호흡에 사용되는 에너지 측면에서 볼 때.

<학생 답안 4>

논제1.

공기가 물보다 효과적인 호흡 환경임을 다음과 같이 나누어 생각해보자.

① 물과 공기의 기체 조성

제시문 (가)의 <표1>로부터, 대기의 부피 성분비와 물 용존 기체의 성분비 중 CO_2의 비율이 물에서 대기보다 약 40배 많음을 알 수 있다.
CO_2 농도가 높다는 것은 혈중 CO_2 농도 역시 높아져 헤모글로빈의 산소포화도 역시 떨어지므로, 호흡효율이 낮을 것이다.
또, 단위부피의 공기와 물을 호흡할 때 드는 에너지 양이 같다고 가정하고, 분당 8L의 유체를 흡입한다고 가정하자. 그러면, 8L의 공기를 흡입했을 때(식1)와 8L의 물을 흡입했을 때(식2) 흡입한 O_2의 양은,

(식1): $n = 8L \times \frac{1}{5} / 0.08 \times 300 \fallingdotseq \frac{1}{15}$ mol (이상기체 상태방정식 이용, n: 몰수)

(식2): $8L \times 1kg \times \frac{1cm^3}{1g} \times 6.5mg/kg \cdot 1mol/32g \fallingdotseq \frac{1}{640}$ mol

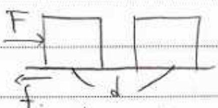
따라서 얻은 O_2의 양이 공기중에서 물보다 약 40배 많다.

② 기체의 확산

공기는 기체이고, 물은 액체이므로, 분자운동은 기체인 공기에서 더 활발하고, 따라서 확산속도도 공기에서 빠를 것이다. 따라서, 횡격막의 수축운동이 아닌 순수한 기체의 확산에 의한 기체교환 효과는 공기에서 더 클 것이다. 또, 물속에서는 CO_2 농도가 커서 혈중 CO_2 농도가 클 것이므로, 물에서(아가미) 기체교환이 일어날 때, CO_2의 확산은 공기중에서 클 것이라 추정할 수 있다.

③ 근육운동에 필요한 에너지 량,

제시문 (마)의 자료로부터, 물의 밀도는 공기의 약 1000배임을 알 수 있다. 즉, 물이 공기보다 무거움을 알 수 있는데, 이는 호흡할 때, 근육이 같은 정도 운동할 때 더 많은 에너지를 들여야 함을 의미한다. 즉, (그림1)과 같이 비유하면, 밀도가 증가하는 효과는 마찰력 f가 증가한 효과와 같으므로, 해준 일의 양 F.d 에서 F가 증가해 일의 양 역시 증가한다. 즉, 호흡을 위해 근육운동에 필요한 E는 물속에서가 공기중에서보다 클 것이다.



(그림1)

①,②,③으로부터 호흡효율은 공기가 물보다 좋아, 공기가 물보다 더 좋은 호흡환경일 것이다.

<학생 답안 5>

[논제1] 제시문(가)의 <표1>에 따르면 공기중 산소의 부피비는 20.95%인데 비해 물의 용존기체중 산소의 부피비는 33.3%이다. 호흡은 산소를 받아들이고 이산화탄소를 내보내는 활동인데, 실제적으로 흡수가 불가능한 질소보다는 산소의 양이 호흡에서는 중요하므로 기체조성의 측면에서 물이 더 유리하다.

기체는 폐포내에서 분압차에 의한 확산 방식으로 교환된다. 논의를 전개하기 위하여 아가미도 같은 방식으로 기체를 교환한다고 가정하면 기체교환시 중요한것은 기체의 절대량이 아닌 분압이 된다. 따라서 산소의 분압이 높은 물쪽이 상대적으로 공기보다 유리하다.

마지막으로 근육운동에 필요한 에너지량은 단연 폐가 더 많다. 왜냐하면 아가미의 경우 물의 흐름에 따라 열고 닫는 것만을 반복하면 기체교환이 가능한 반면, 폐는 없던 압력차를 만들어내기 위해 근육을 수축시켜야 하기 때문이다. 덧붙이자면 아가미는 유체 안에서 운동하므로 베르누이의 정리에 의해 필요한 힘이 더 줄어들게 된다 (그림1.참고) (∴유체의 흐름에 의한 힘 발생)

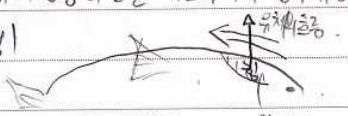
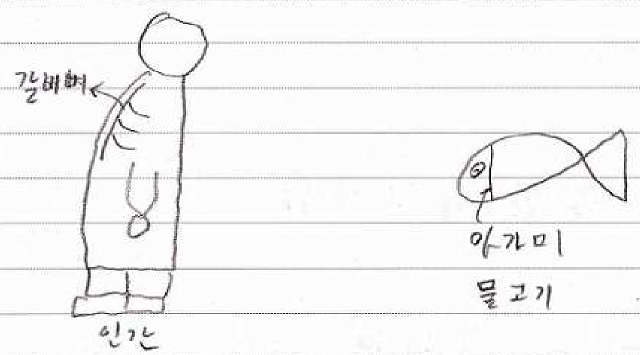


그림 1.

<학생 답안 6>

[논제 1]

물과 공기 1L의 산소 용존 기체의 질량을 비교하면 물은 1L가 1kg이고 여기에 6.5mg의 산소가 녹아 있다고 <표1>을 참조하면 알 수 있다 공기 1L의 경우에 밀도가 1.18g/L 이고 질소가 산소에 가벼운데 비해 질소의 부피비가 더 크므로 산소의 공기중 질량이 약 1.2g 임을 알 수 있다. 기체의 확산을 살펴보면 우리 인간의 폐도 얇은 수분막으로 둘러 싸여져 있으므로 물고기는 물을 통해서 바로 확산이 일어나지만 인간의 경우 녹았다가 다시 확산해야 하므로 어느 정도 시간이 걸린다 호흡을 위한 근육 운동을 살펴 보면



인간의 경우에는 폐를 팽창시키기 위해서 많은 E를 갈비뼈를 들어올리는데 소비하지만 물고기의 경우 매우 쉽게 호흡할 수 있다. 이를 모두 종합해 보면 산소 운반의 측면에서는 물고기가 유리하지만 산소의 양이 공기에 더 많기 때문에 인간은 육상 동물이 된 것일 것이다.

❑ 논제 2

지구 환경의 변화가 육상생물과 수중생물의 호흡에 어떤 영향을 미칠 수 있는지를 논술하도록 하였다. 물과 공기의 기체 조성, 화학적 특성에 대한 이해를 위해 이에 대한 자료가 제시문으로 주어졌다.

이산화탄소와 온도증가가 대기와 물속에 존재하는 산소와 이산화탄소의 분압에 얼마만큼 영향을 미치는지 여부를 <표1>에서 유추할 수 있다. 이 논제는 이산화탄소와 온도 증가가 호흡에 영향을 미치는지 여부를 제시문의 자료를 분석하여 판단하도록 요구하고 있는데, 학생들은 습관적으로 ‘영향을 미칠 것이다’라는 전제하에 논의를 전개한 경우가 많았다. <학생 답안 3>과 <학생 답안 4>에서와 같이 많은 학생들이 이산화탄소와 온도증가가 공기, 폐, 물 속의 산소 및 이산화탄소 분압에 미치는 영향을 분석해보지도 않고, 기계적으로 이산화탄소 증가가 호흡에 영향을 미친다고 기술하였다. 예를 들면, 대기 중의 이산화탄소 성분비가 매우 작기 때문에(0.03%) 대기 중의 이산화탄소 농도가 20% 정도 증가한다고 해도 이산화탄소 분압 변화에 미치는 영향은 무시할 수 있음을 추론할 수 있다. 자연현상을 관찰하고 얻어진 자료를 분석할 때는 다양한 시각이 요구되는데, 학생들은 기계적으로 판단하고 있다. 반면 <학생 답안 1>, <학생 답안 2>와 같이 육상정온동물과 수중변온동물간의 호흡 차이까지도 설득력 있게 논술한 경우도 적지 않았다.

<학생 답안 1>

육상
i) 정온동물의 경우

논제2. ① CO_2의 작용

육상에서 폐호흡을 하는 정온 동물의 경우, 폐포에서 일어나는 기체교환의 원동력은 분압차이에 의한 확산이다. CO_2량이 증가되었다는 것은 CO_2의 공기중 부피비가 늘어나, 기체 중 CO_2 분압이 상승하였다는 것을 뜻한다. 곧, 모세혈관→폐포로의 CO_2 확산 작용이 어려워질 수 있다.
(부피비 0.03% 보다 상승)

② 온도의 작용.

지구온난화의 영향으로 온도가 상승하게 되는데, 온도가 상승하게 되면 기체의 분자 운동이 빨라질 것이므로 확산 자체의 속도는 어느정도 빨라질 것이다. 이는 반응속도상수 k가 온도에 의존하는 것과 유사하다. 또한, 정온동물의 경우 온도를 유지하기 위해 에너지를 사용하여야 할 것인데, 주위의 온도가 올라갈 경우 체온 유지를 위해 써야하는 에너지의 양이 줄어들 수 있으므로, 필요한 O_2의 양은 줄고 방출되는 CO_2의 양은 줄어들 수 있다. 이는 외부의 CO_2 농도가 증가하는 것과 대조적인데, 이는 한번 호흡으로 배출하는 CO_2 총량은 감소할 것이라는 것을 뜻한다

외부 | 혈액
← 잘 확산되지 X
$CO_2\uparrow$ | $CO_2\downarrow$

ii) 물속 변온동물의 경우 (0.03%이하)

① CO_2의 작용

(∵헨리의 법칙) (.85mg/L 이상이 될 것임)

. 대기중의 CO_2 분압이 높아지면 물속의 CO2 양이 늘어날 것이다. 그결과 물속에 존재하는 CO_2의 양이 늘어날수 있다. 그결과 정온동물에서 와 마찬가지로 CO_2의 기체교환은 둔화될것이다.

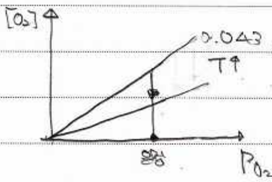
$CO_2 + H_2O \rightleftarrows H_2CO_3 \rightleftarrows H^+ + HCO_3^-$

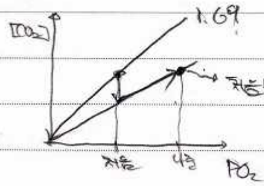
$K = \frac{P_{CO_2}}{[H_2CO_3]}$ $P_{CO_2}\uparrow \rightarrow [H_2CO_3]\uparrow$

왼쪽 그림에 P_{CO_2}가 커질수록 CO_2의 용해도가 높아 질것임을 알수있다.

② 온도의 작용

기체의 용해도는 온도의 영향을 받는다. 곧, 기체의 용해과정은 발열과정이기 때문에, 온도가 높아질수록 기체의 용해도는 떨어질것이다. 이는 르샤틀리에의 원리로 설명할수 있다. 기체의 용해도가 떨어지면, 물속의 O_2와 다른 기체들의 양이 줄어들게되므로 수중 변온동물의 호흡교환은 쉽게 일어나지 못해 산소를 잘 흡수하지 못할것이다. 또한 변온동물은 정온동물과는 달리 온도가 높아져도 대사율을 낮추는 이득을 얻지 못하므로 O_2의 부족현상은 점점 심화될 것이다. 한편 CO_2 역시 온도가 증가하더라도, ①에서 CO_2 분압 증가 효과로 그 양은 크게 줄지는 않을 것이다.





처음보다 크게 줄지 않는다.

$O_2(g) \rightleftarrows O_2(aq)$ $\Delta H < 0$

$k = e^{-\frac{\Delta G^\circ}{RT}} = e^{-\frac{\Delta H^\circ}{RT} + \frac{\Delta S^\circ}{R}}$

$\Delta H < 0$이므로 $T\uparrow \rightarrow k\downarrow$

온도가 증가하면서 용해도가 <표1>의 0.043 g/L·atm보다 낮아진다

<학생 답안 2>

논제 2)

대기중에 CO_2 농도 증가가 일어날 경우 폐호흡을 하는 정온동물의 경우 분압차이에 의한 확산으로 기체를 교환하는데 정맥의 CO_2 분압과 폐포내 기체의 CO_2 분압 차이가 줄어든다. 따라서 기체 교환이 효율적으로 일어나지 못한다. 현재 들숨의 CO_2 성분비는 0.04% 인데 CO_2 농도가 증가해 3.60%를 넘게 되면 체외로 CO_2를 배출할 수 없게 된다.

수중에서 아가미 호흡을 하는 변온동물의 경우도 마찬가지로 분압차이에 의한 확산을 이용해 기체를 교환한다. 대기의 CO_2 분압이 높아지면 온도 변화가 없다고 가정했을때 CO_2의 물에 대한 용해량이 증가하므로 역시 CO_2 배출이 어려워진다.

지구 온난화에 의해 온도가 상승할 경우 공기의 밀도가 감소하고 공기의 점성도가 떨어질 것이라고 예측 가능하다. 또한 기체의 확산이 빠르게 일어나서 폐호흡시 적은 에너지로 빠른 시간내에 많은 양의 기체를 교환할 수 있다. 아가미 호흡을 하는 변온동물의 경우도 마찬가지로 물의 점성도가 감소하고 확산 속도가 증가하므로 호흡운동의 효율이 증가할 것이다. 그러나 CO_2와 O_2의 용해도가 줄어듦으로 인해 수중환경에서 산소 부족을 겪을 것으로 예상된다. 또한 변온동물의 경우 체온 상승에 의해 대사율도 증가하므로 기체 교환의 필요성이 증대된다. 따라서 산소 부족의 영향을 크게 받을 것이다. 정온동물의 경우에는 체온의 변화가 없으므로 대사량은 일정할 것이다. 또는 추운 지역에 사는 동물이었을 경우 대사량이 감소할 수 있다. 이 경우 기체 교환의 필요량이 감소한다.

<학생 답안 3>

논제 2) 이산화 탄소의 농도 증가는 정온 동물과 변온동물의 호흡의 효율성을 떨어뜨린다. 숨을 들이마실 때에 이산화탄소 농도가 높아져 체외로 배출할 수 있는 이산화탄소가 줄어져 이산화 탄소의 농도가 낮았을 때에 비해 같은 양의 이산화탄소를 배출하기 위해 호흡 횟수를 늘려야 하기 때문이다. 또한 이산화탄소 농도 증가로 인해 유발되는 지구 온난화도 호흡에 영향을 미친다. 온도가 증가하게 되면 정온, 변온 동물의 체내에서 호흡량을 조절하는 작용을 하는데 온도가 증가한 상태가 유지되는 상황이므로 산소, 이산화탄소의 흡수량 배출량에 이상이 생기게 되고, 물에 용해될 수 있는 기체량이 줄어 변온 동물의 호흡이 어려워질 것이다.

<학생 답안 4>

논제 2 기체의 조성비는 동물의 호흡 환경의 중요한 요소이다. 따라서 기체의 조성비에 변화가 오면 동물은 이에 맞추어 적응을 해 나가야 하고 이에 적응하지 못한 동물은 도태될 것이다.

I) 이산화탄소 농도의 증가

대기 중의 이산화탄소 농도가 증가하게 되면 육상에서 호흡 운동을 하며 살아가는 정온동물의 호흡에 우선 큰 영향을 주게 될 것이다. 논제 1에서 언급했듯이 이산화탄소의 기체 조성비는 극소량만 차지하면 된다. 그런데 이의 비중이 증가하면 호흡에 곤란을 줄 것이다. 호흡은 기체의 부분압 차이에 의한 기체의 확산에 의해 이루어지는데 외부(여기에서는 대기)의 이산화탄소 농도가 증가하면 내부와의 이산화탄소의 농도 차가 줄어드므로 호흡이 잘 일어나지 않게 된다. 대기의 이산화탄소 농도가 늘어나면 이산화탄소의 부분압이 증가하여 이산화탄소의 물에 대한 해리도가 증가하며 변온동물의 기체 교환에도 어려움이 따르게 된다.

II) 온도의 증가

기체의 용해도는 온도에 반비례한다. 따라서 온도가 높아지면 물에서부터 기체가 해리되어 나온다. 물과 대기의 기체 조성비가 다른데 물은 이산화탄소와 산소의 조성비가 대기에 비해 높다. 이로 인해 대기는 산소와 이산화탄소의 농도가 증가하게 된다. 따라서 I)에서 제시한 같은 논리로 정온동물의 호흡 운동은 어렵게 된다. 변온 동물의 경우 기체의 조성비는 변화가 없지만 양이 많이 줄어들게 되어 호흡하기에 기체가 많이 부족하다.

❑ 논제 3

학생들은 고등학교 생물 교과서에서 '대기와 폐 사이의 기압 차이는 1mmHg이며 한 번의 들숨 동안 0.5L의 공기를 들이마신다.' 라고 학습하였다. 논제 2에서는 이렇게 학습된 생명과학 지식을 물리학적 기본 개념에 적용하여 과연 1mmHg압력차가 0.5L 공기 흡입에 충분한 힘일 수 있는지를 논리적으로 설명하도록 요구하였다. 학생들이 전기회로 개념에서 학습한 전위차, 저항, 전류, 전하량 사이의 관계를 유추할 수 있도록 제시문을 구성하였으며, 특히 적분 개념이 없어도 논의를 전개할 수 있도록 고려하였다.

다양한 접근 방법으로 문제를 해결한 답안이 많았다. <학생 답안 1>처럼 적분을 이용하여 설명하거나 <학생 답안 2>, <학생 답안 3>와 같이 들숨 시 최대 저항을 구한 다음 근사값으로 삼각형의 면적을 구하여 $Q(t)$를 설명한 경우 등 논제를 이해하고 논리적으로 설명을 한 경우는 모두 좋은 평가를 받았다.

반면 <학생 답안 4>, <학생 답안 5>처럼 제시문에 주어진 표에 대한 분석이나 전기저항회로 개념을 적용하지 않고, '압력×시간=삼각형의 면적'이라는 비논리적인 개념을 적용하여 설명한 학생들도 적지 않았다.

<학생 답안 1>

논제3.

제시문 (나)에 따르면 유입량 $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ 이고 저항 $R = \frac{\Delta P}{Q}$ 이다.

따라서 $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{R}$ 이다. 따라서 들이마신 공기의 양 $\Delta V = \frac{\Delta P}{R} \cdot \Delta t$ 이다.

$dV = \frac{\Delta P}{R} \cdot dt$ 이므로 이를 0부터 $\frac{T}{2}$까지 적분하면 ~~$\frac{T}{2}$동안 들이마신공기의 양을 구할수 있다.~~

0부터 $\frac{T}{2}$까지 적분하면 $\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dV = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\Delta P}{R} \cdot dt$ 이다. 이때 우변의 $\int_0^{\frac{T}{2}} \Delta P dt$는

그림 3의 ΔP- 시간 그래프의 0~$\frac{T}{2}$까지의 넓이와 같으므로 $V_{\frac{T}{2}} - V_0 = \frac{1}{R}(1 \times \frac{T}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{T}{4R}$

이다. ($V_{\frac{T}{2}}$ = $\frac{T}{2}$에서의 부피, V_0 = 0에서의부피) 이때 폐의 부피는 2L~3L를 왔다 갔다하므로

폐의 부피가 약 2.5L 일때의 R값을 찾으면 약 1.5이다. 또 1분에 16회의 호흡을 하므로

1회호흡에 걸리는 시간 $T = \frac{60}{16} = 3.75(s)$ 이다.

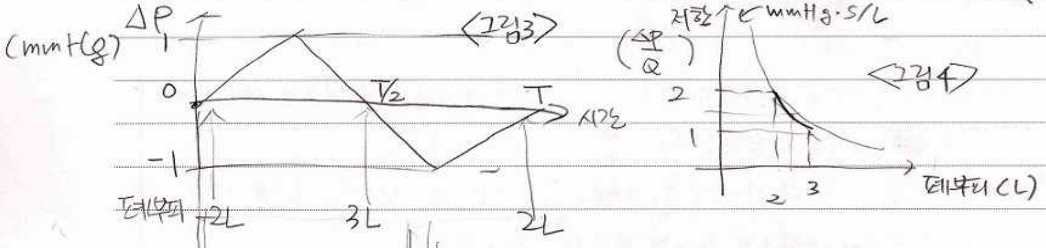
따라서 $V_{\frac{T}{2}} - V_0 = \frac{T}{4R} \fallingdotseq \frac{3.75}{4 \cdot 1.5} = \frac{3.75}{6} = 0.625 > 0.5$ 이다. 즉 1회 호흡시 0.5L보다

많은 양의 공기를 흡입한다는 뜻이다. 1분에 16회호흡을 하므로 1분에 8L 이상의

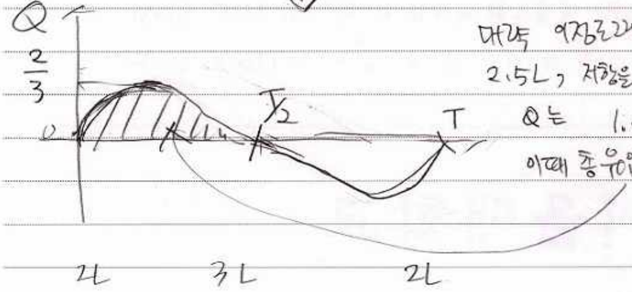
공기를 유입하는데 폐와 대기의 기압차는 1mmHg 정도로 충분하다 할수 있다.

<학생 답안 2>

3. 그림4에 따르면, 평소 사람이 호흡시 폐의 부피가 2L에서 최대 3L로 바뀔때 (그림 2 참고), 저항 R이 약 2 mmHg·S/L 에서 1 mmHg·S/L로 변한다. 저항 R은 $\frac{\Delta P}{Q}$ 이다.



이 두그래프를 이용해 시간에 따른 Q (유입량) 그래프를 유추해보면 ($\Delta P = R \cdot Q$)
R은 2에서 1로 변화



대략 이정도그래프가 나오고, ΔP가 1 일때 폐부피를 2.5L, 저항을 약 1.5로 잡으면 꼭지점에서의 Q는 $1.5Q=1$ $Q=\frac{2}{3}L/s$ 이다.
이때 총유입량은 색칠한 면적이 되므로

색칠한 부분을 삼각형에 유사시켜 면적을 계산하면 (이때 T는 1회호흡 시간으로 1분에 16회호흡하므로 $\frac{60}{16}$초)

$$\frac{2}{3} \times \frac{60}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}L$$

대략 $\frac{5}{8}$L가 나온다. 이것이 1회 유입량이고, 분당 16회 호흡하므로 분당유입 량은

$\frac{5}{8} \times 16 = 10L$, 약 10L가 나온다. 이는 일상적 활동에 필요한 분당 8L 공기를 유입하는데 충분하다.

<학생 답안 3>

논제3. 공기를 흡입할때 받는 저항 $R=\frac{\Delta P}{Q}$ (ΔP: 대기와 폐 사이의 기압차, Q: 단위시간당 폐로 들어오는 공기의 유입량) 인데 $Q=\frac{\Delta V}{\Delta t}$ (단위시간당 폐로 들어오는 공기의 유입량) 이므로

$R=\frac{\Delta P}{Q}=\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{\Delta t}}=\frac{\Delta P \cdot \Delta t}{\Delta V}$ 로 표현할수 있다.

한편 [그림2]에 의하면 폐의 부피는 최소일때 2L, 최대일때 3L 이므로 한번 호흡할때 들이마시는 공기의 양은 1L이다.

문제에서 사람이 1분에 16회 호흡한다고 가정하였으므로, 이는 1회 호흡하는데 3.75초가 걸린다는 의미이다.

그런데 [그림4]에서 폐의 부피가 2L일때의 저항은 2mmHg·s/L 보다 작으므로,

$R=\frac{\Delta P \cdot \Delta t}{\Delta V}=\frac{\Delta P \times 3.75s}{1L}<2mmHg \cdot s/L$

$\therefore \Delta P < \frac{2}{3.75}mmHg$ 이다. ∴ΔP가 1mmHg보다 작아도 분당 8L의 공기를 유입할수 있다.

따라서, 1mmHg의 기압차이로도 일상적 활동에 필요한 공기를 유입하는데 충분하다는 것을 알수있다.

<학생 답안 4>

논제3 사람이 1분에 16회 호흡시 일상적 활동을 위해 1분에 8L의 공기를 유입해야 하므로 1회에 0.5L의 공기를 유입해야 한다. 이때 1회의 들숨에 1mmHg의 기압차이가 난다. 20℃에서 O_2의 물에 대한 용해도는

$$0.047\ g/L\cdot 1기압 \times \frac{1기압}{760mmHg} = \frac{0.047}{760}\ g/L\cdot mmHg$$

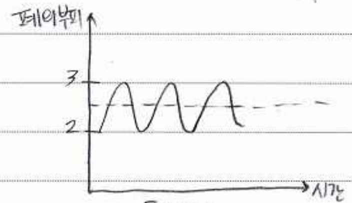
1mmHg의 기압차이로 $\frac{0.047}{760}$ g/L의 O_2가 용해된다. 공기 0.5L 유입시

약 ~~1.18~~ g/L × 0.5L × 0.2 ≒ 0.118g의 O_2가 용해 된다. 이양은 0.5L유입시 1mmHg의 기압차이로 얻는 $\frac{0.047}{760}$ g/L × 0.5 보다 크므로 일상적 활동에 1회의 최대 기압차는 1mmHg로 충분함을 알수 있다.

<학생 답안 5>

논제3.

충분한 양의 공기를 흡입하려 할때 폐의 부피변화를 살펴보자.



[그림2]

제시문에 나온 [그림2]를 참조하면

폐의 부피가 2L 에서 3L 사이로 변하는 것을 알수있다.

폐의 흡기와 호기를 고려할 때, 폐는 0.5L의 부피변화를 가지는 것을 알수 있다. (흡기,호기 따로 생각)

$$2.0L \overset{호기}{\rightleftarrows} 2.5L \overset{흡기}{\rightleftarrows} 3.0L$$

즉 1회 호흡동안 총 1L의 공기가 유입될 수 있다.

사람은 1분에 16회를 호흡하므로, 1분동안 16L의 공기를 유입하는 것이다.

이것은 일상적 활동에 필요한 "8L/분"의 수치의 2배가 되는 충분한 수치이다.

비록 폐와 대기의 압력차이는 1mmHg 이지만, 늑골과 횡격막의 보조적인 운동을 통해 폐의 부피는 1회에 최대 1L까지 공기 유입이 가능하다. 결국 8L/분을 훨씬 넘는 16L/분 까지 공급이 가능해진다.

❑ 논제 4

사람의 호흡에 필요한 폐포의 수축-팽창과 관련된 질병과 치료법을 계면활성제의 화학구조와 결합, 분자 상호작용의 관점에서 논술하도록 하였다. 기본적인 화학적 원리를 얼마나 잘 이해하고 있고 이를 생명현상에 적용하여 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

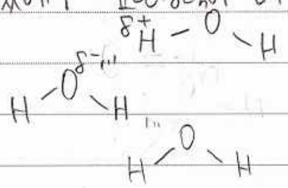
<학생 답안 1>의 경우 물표면의 표면장력을 물분자의 수소결합 구조식으로 보여주며 이 힘이 폐포의 팽창을 어렵게 하여 유아호흡장애증후군을 유발한다는 논리를 가지고 비교적 무난하게 설명하였다. <학생 답안 2>는 계면활성제가 물에 용해되었을 때 물 표면에서 물분자와 어떻게 배열되는지를 설명하고, 이로 인한 표면장력 감소가 치료에 유익한 이유를 잘 기술한 점이 돋보인다.

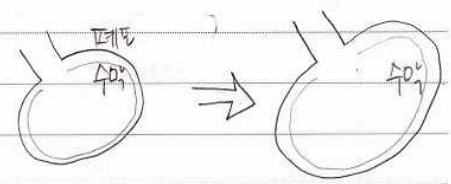
반면, <학생 답안 3>과 같이 계면활성제가 물 분자와 미셀을 형성한다고 답한 경우도 있었다. 그러나 폐포 내의 물 층이 얇고 넓게 펴져 있다고 생각했을 때 작은 구형의 미셀이 표면 물 분자를 안에 넣은 형태로 형성되기가 쉽지 않고, 무엇보다 이런 형태로는 폐포 표면의 표면장력을 미세하게 조절하기 어렵다. 또한 <학생 답안 4> 처럼 폐포 내부 물 층과 유아호흡장애증후군의 연관관계에 대한 설명 없이 계면활성제에 대한 지식을 단순히 나열한 답안이나, 논제를 그대로 옮겨 적으면서 피상적 지식만 나열할 뿐 자신의 논리적 주장을 펴지 못하는 답안(<학생 답안 4, 5>)은 주어진 논제가 요구를 충족하지 못하고 있다.

<학생 답안 1>

논제 4.

폐포의 부피가 증가하고 감소함에 따라 그 내부로 공기가 유입되고 유출되면서 호흡이 진행된다 폐포 내부의 표면에는 얇은 수막이 형성되어 있어 물분자들이 존재하는데 물분자간에는 강한 수소결합을 하고 있어서 표면장력이 매우 크다. 폐포를 부풀리게 되면 폐포의

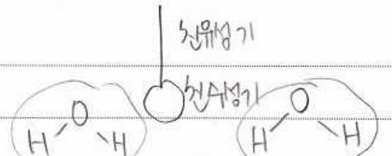




표면적이 증가함에 따라 둘러싸고 있는 수막 또한 넓어져야 하는데 물분자 사이의 강한 인력을 끊기가 매우 어렵기 때문에 폐포를 부풀리는 것이 어려워진다. 따라서 폐포가 잘 부풀어지지 않아 폐포의 압력이 감소하는 정도가 줄어들어서 대기로부터 기체의 유입이 적어지기 때문에 호흡이 어려워진다.

이 때에 친수성기와 친유성기를 모두 가진 계면활성제를 수막 위에 뿌려주게

되면

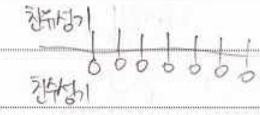


물 분자와 계면활성제가 결합하면서 물분자간의 인력을 약하게 하여 인력을 끊고 수막의 표면적이 넓어지는 것을 수월하게 해 줄 수 있게 된다. 따라서 폐가 부풀수 있게 되어 호흡의 어려움이 줄어들게 된다.

<학생 답안 2>

문제 4)

계면 활성제는 극성을 띠게 되는 친수성기와, 탄소사슬 등의 무극성을 띠게 되는 부분을 가지는 친유성기가 공존하는 구조를 띤다.
그러므로 물에 용해되면 친수성기가 물쪽으로, 친유성기는 물의 바깥쪽으로 배열된다.



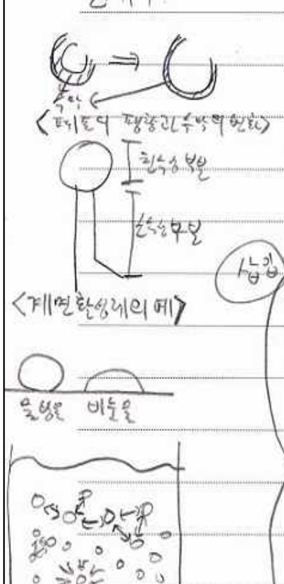
물 분자는 산소의 전기음성도가 수소보다 상대적으로 크고, 비대칭의 굽은형 구조를 띠고 있으므로 극성을 띤다. 따라서 순수한 물의 경우 표면에 있는 물 분자가 수소결합에 의해 안쪽으로 힘을 받게 되는 표면장력이 발생하는데, 계면활성제가 용해되면 물 표면이 위 그림과 같이 바뀌므로 표면의 물 분자가 받던 인력을 계면활성제와 같이 받게 되므로 표면장력이 줄어들게 된다.

폐포 내에는 얇은 수막이 형성되어 있는데, 출생전에는 폐포가 압축되어 있다가 출생 이후에 펴지게 된다. 이때 계면활성제가 만들어지지 않은 미숙아의 경우, 물 속에 계면활성제가 용해되어 있지 않아 물의 표면장력이 강하다. 따라서 폐포가 펴지지 않으므로 유아호흡장애증후군이 발병하게 되고, 계면활성제를 투여해 이를 치료해야 한다.

계면활성제를 투여하면 폐포 수막에서의 표면장력이 낮아져 폐가 펴지는데 도움을 주게 된다.

<학생 답안 3>

문제 4.



계면활성제가 몸에서 하는 역할, 호흡시 폐포의 팽창, 수축에 따른 수막의 표면적 변화 등을 통해 설명하겠다.

계면활성제는 물에 들어가서 물의 표면장력을 떨어뜨린다. 표면장력이란, 표면적을 최소화시키려는 힘인데, 이 힘이 약해지면 그만큼 표면적을 증가시킬 수 있게 된다.

삽입

맨 위의 그림을 보면, 폐에 형성된 수막은, 폐포가 팽창하면 그 표면적이 늘어남을 알 수 있다. 이때, 폐의 세포에서 계면활성제를 잘 합성하지 못하면, 수막의 표면장력을 떨어뜨리기 힘들고 이때 물이 호흡시에 폐포를 팽창시키지 못하게 하는 저항이 거세져서 호흡곤란이 올 수 있다.

이제, 계면활성제가 물의 표면장력을 떨어뜨리는 이유를 보자. 맨 아래의 그림은 미셀이 딱 하나 형성된 이상적인 상황을 가정한 것이다. 물분자를 계면활성제의 친수성 부분이 둘러싸면, 친유성 부분은 자연스럽게 바깥쪽으로 생긴 것이고, 이것이 미셀 안의 물과, 미셀이 둘러싸지 않은 물분자의 상호작용을 약화시킨다. 이때 물이, 계면활성제가 물분자의 표면장력을 약화시킨다.

그래서, 미숙아의 폐에 계면활성제를 뿌려주면, 정상적인 호흡운동을 할 수 있게 되어 이러한 치료법이 매우 유용할 것이다.

<학생 답안 4>

논제4) 세포 내에 계면활성제가 필요한 것은 폐포를 부풀리기 위해서이다.
폐포가 크기를 변할 때 그 상태를 유지하기 위해서는 그것을
잡아주는 것이 필요한데 그 역할은 계면활성제가 해주는 것이다.
계면활성제는 수용성과 지용성을 같이 지녀 한 쪽은 세포 내의
수막에 붙는다. 다른 한 쪽은 세포가 부풀때 몸의 지용성 부분이
결합할 것이다. 그로써 부푼 상태를 유지할 것이다. 그래서 유아 호흡
장애증후군이 계면활성제가 없는 유아에게 생기고 계면활성제를
뿌려줌으로써 치료가능하다.

<학생 답안 5>

논제 4.

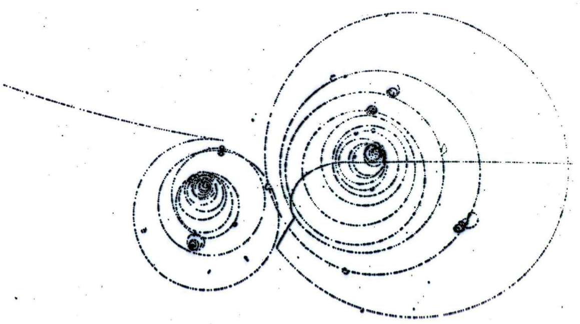
미숙아는 정상아보다 일찍 태어나므로 그 기간동안에 형성되야할 기관들이 성장되지 못한다.
폐포 내의 세포가 계면활성제를 만드는 기작도 그 기간에 형성되는데 미숙아는 그 기작을 할 수 없다.
흉강 내부에는 액체로 가득 차 있고 폐포 안에는 공기가 드나드므로 계면활성제는 친유성기, 친수성기 둘 다 가지고
있어서 폐포를 부풀려 호흡을 할 수 있게 해준다.
따라서 계면활성제를 만들 수 없는 미숙아는 호흡을 제대로 할 수 없기 때문에 유아호흡 장애 증후군이 생긴다.

4 문항 3

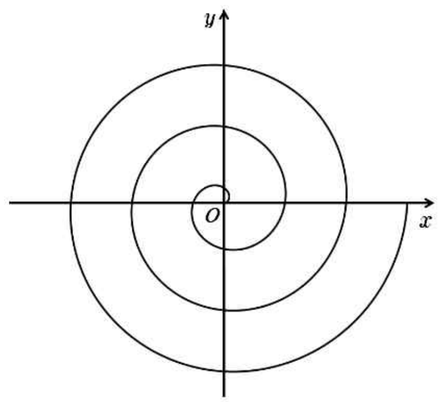
✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가)

20세기 초기에 새로운 입자들의 발견에는 안개상자 실험이 중요한 역할을 하였다. 전하를 띤 입자가 안개 속을 지나갈 때 작은 물방울이 형성되면서 [그림 1]과 같은 자취를 볼 수 있다. 안개상자에 자기장을 함께 걸어 주면 전하를 띤 입자는 자기력에 의하여 원 운동을 하며, 그 반지름은 입자의 운동량에 비례한다. 한편 움직이는 입자는 안개 입자 또는 공기와 부딪혀 연속적으로 조금씩 에너지를 잃어 원 운동의 반지름은 점차 줄어든다. 입자는 나선(와선) 모양을 따라 움직이다가 결국 모든 에너지를 잃고 정지한다.



[그림 1]



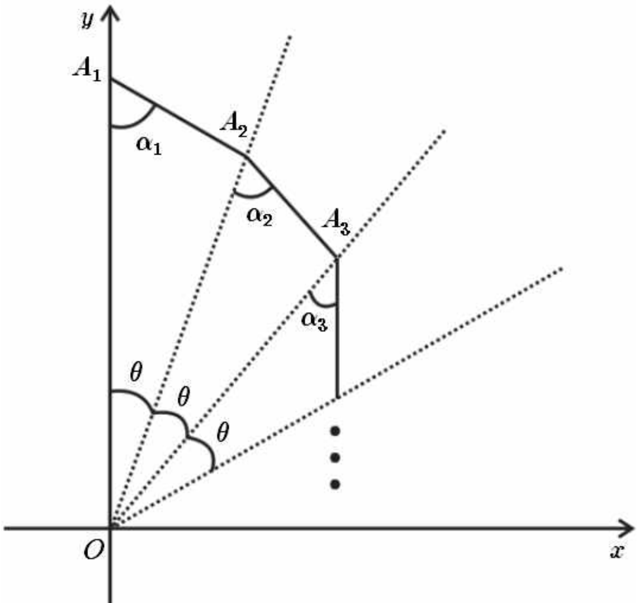
[그림 2]

기원전 250년경 아르키메데스는 한 나선을 연구하였는데, 그것은 좌표평면 위를 움직이는 점의 좌표 (x, y)가 $x = \theta\cos\theta$, $y = \theta\sin\theta$ (단, θ는 매개변수)로 정의되는 곡선으로서, $\theta \geq 0$인 경우 [그림 2]와 같은 자취를 갖는다. 아르키메데스는 자와 컴퍼스만으로는 작도가 불가능한 기하학의 문제들, 예컨대 각의 3등분 문제, 원의 넓이와 같은 정사각형을 찾는 문제 등을 이러한 나선을 사용하여 쉽게 해결할 수 있음을 보였다.

먹잇감을 향해 날아가는 독수리를 하늘 위에서 내려다보면, 독수리는 먹이를 가장 잘 관찰할 수 있는 각도를 유지하면서 날아간다. 독수리가 먹이를 가장 잘 관찰할 수 있는 방향은 날아가고 있는 방향이 아니라, 날아가는 방향에서 일정한 각도를 이루고 있다. 1638년 데카르트가 발견한 로그 나선 또한 이러한 성질을 가지고 있다. 즉, 로그 나선의 각 점에서의 접선과 그 점에서 나선의 중심을 잇는 선분이 이루는 각도는 항상 일정하다. 예를 들어, 좌표평면 위를 움직이는 점의 좌표 (x, y)가 $x = e^{\theta}\cos\theta$, $y = e^{\theta}\sin\theta$ (단, θ는 매개변수)로 주어지는 로그 나선은 각 점에서의 접선과 그 점에서 원점까지의 선분이 이루는 각도가 항상 $\frac{\pi}{4}$이다.

(나)

나선의 형태와 길이와의 관계를 알아보기 위하여 선분으로 이루어진 다각 나선을 생각해보자. [그림 3]과 같이 평면 위의 점 $A_1(0,1)$에서 시작하여 시계 방향으로 각 θ 만큼 회전하되 y축과 각 α_1을 이루도록 하여 선분을 점 A_2까지 긋는다. 같은 방법으로 차례로 각 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots$를 이루면서 선분들이 $\overline{OA_n} \geq \overline{OA_{n+1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$을 만족하며 서로 겹치지 않고 점차 안 쪽 방향으로 전진해 가면서 다각 나선을 만든다. 이와 같은 다각 나선은 주어진 각의 수열 $\{\alpha_n\}$에 따라 다양한 형태로 나타난다.



[그림 3]

(다)

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다. 그러나 일반적으로 그 역은 성립하지 않는다. 예를 들어, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 발산하고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$은 수렴한다는 사실이 알려져 있다. 또한 모든 $n=1,2,\cdots$에 대하여 $0 < a_n \le b_n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다는 것도 알려져 있다. 이 사실을 이용하면 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$이 수렴함을 알 수 있는데, 그 이유는 $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ $(n=1,2,\cdots)$이기 때문이다.

논제 1. 제시문 (나)에 주어진 임의의 수열 $\{\alpha_n\}$에 관하여 각 $\theta = \frac{\pi}{2010}$일 때, 다각 나선이 원점으로 한없이 가까워지지 않을 수도 있음(즉, n이 한없이 커질 때, $\overline{OA_n}$이 0으로 수렴하지 않을 수도 있음)을 예를 들어 설명하시오. 또, 원점으로 한없이 가까워지는 경우에, 다각 나선을 이루고 있는 선분들의 길이의 무한급수

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \cdots$$

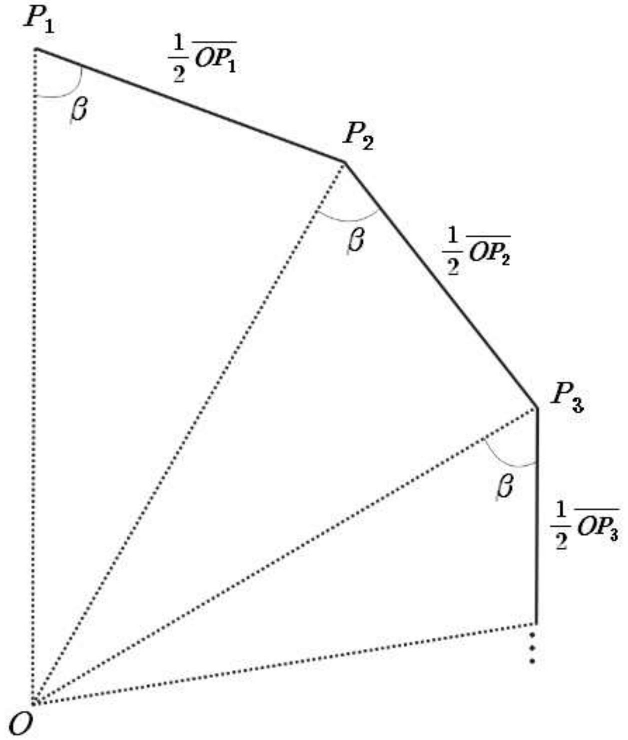
가 항상 수렴하는지 논하시오.

논제 2. 제시문 (나)에 주어진 임의의 수열 $\{\alpha_n\}$에 관하여 $0 < \alpha_1 < \theta < \frac{\pi}{3}$이고 $0 < \alpha_{n+1} \le \alpha_n$ $(n=1,2,\cdots)$일 때, 다각 나선이 원점으로 한없이 가까워짐을 설명하시오. 또, 다각 나선을 이루고 있는 선분들의 길이의 무한급수

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \cdots$$

가 항상 수렴함을 설명하시오.(단, θ는 고정되어 있다.)

논제 3. 이번에는 다음과 같이 일정한 길이마다 정해진 각도로 방향을 바꾸는 형태의 다각 나선을 생각해 보자. 원점이 O인 좌표평면 위에 한 점 P_1이 주어졌다고 하자. 아래 그림과 같이 점 P_1에서 선분 OP_1에 대하여 각 β 방향으로 길이 $\frac{1}{2}\overline{OP_1}$만큼 이동한 점을 P_2라 하자. 이러한 과정을 계속 반복하여, 점 P_n에서 선분 OP_n에 대하여 각 β 방향으로 길이 $\frac{1}{2}\overline{OP_n}$ 만큼 이동한 점을 P_{n+1}이라 하자. n이 한없이 커짐에 따라 점 P_n이 좌표평면에서 어떻게 움직이는지 $\cos\beta$에 관하여 구체적으로 기술하시오.



논제 4. 제시문 (가)의 로그 나선 $x=e^{\theta}\cos\theta$, $y=e^{\theta}\sin\theta$ 위의 한 점 P에서 나선의 접선을 긋고, 원점 O에서 선분 OP에 수직인 직선을 그어 접선과 만나는 점을 Q라고 하자. θ가 $\frac{\pi}{2}$에서 π까지 변할 때, 선분 PQ가 지나간 영역을 구체적인 그림으로 나타내고 그 넓이를 구하시오.

출제의도 및 문항설명

◦ '나선'은 역사적으로나 과학적으로 많은 관심과 연구의 대상이었다. 기원전 250년경 아르키메데스가 나선 연구를 처음 시작하였는데, 그는 연구를 통하여 당시의 다양한 수학적 난제들을 해결하고 이를 실생활에 활용하였다. 나선은 자연에서 빈번히 목격되는 현상으로서 소라껍질이나, 해바라기, 산양의 뿔, 먹잇감을 향해 날아가는 독수리의 비행 등에서 자연스럽게 나타난다. 입자들을 연구하는 안개상자 속의 입자의 궤적 또한 나선 모양이다. 나선은 다음과 같은 의미에서 고등학교 교과과정에서 중요한 주제이다.

- 나선은 곡선으로서 공간 이해력을 요구한다.
- 형태가 다양하여 그 움직임을 이해하기 위해 논리적 사고력을 요구한다.
- 그 길이가 유한일 수도 무한일 수도 있어서 수열과 무한급수에 대한 이해가 동반되어야 한다.
- 나선과 연관하여 그릴 수 있는 도형들의 자취는 다양하고 흥미로운 현상을 보여주는데 이는 지적 호기심을 자극하며 상상력을 유발시킬 수 있다.
- 자연 과학, 사회 과학 등에서 나타나는 현상을 이해하는 데 활용된다.

◦ 각 논제들을 해결하려면 고등학교 수학 10-가, 10-나, 수학 I에 나오는 매우 기본적인 개념의 이해와 수학적 논리력, 추리력, 종합화 능력이 요구되며, 특별한 수학적 기교는 필요하지 않다. 수학적 기교만으로 논제를 해결하고자 하면 오히려 많은 시간이 소요될 수 있다.

출전 및 참고 교과서

◦ 학생들이 공통적으로 이수하는 교과과정을 고려하여 논제 해결에 필요한 설명이 충분히 제시되도록 제시문을 작성하였다.

◦ 제시문 (가)는 도입부로 물리 연구에서 나오는 안개상자와 수학사에서 등장하는 아르키메데스의 나선, 자연 현상에서 나타나는 로그 나선을 이야기 형식으로 소개하였다. 그리고 나선이 왜 흥미롭고 중요한가를 설명하고 로그 나선의 성질로 등각 현상을 제시하여 논제 해결에 도움을 주었다.

◦ 제시문 (나)는 다각 나선을 수학적으로 설명함으로써 학생들에게 상상력을 발휘해 보도록 하였다.

◦ 제시문 (다)는 무한급수의 기본 개념을 설명하여 논제 해결에 필요한 정보를 제공하였다.

◦ 각 논제 별로 교과서에서의 관련 단원은 다음과 같다.

- 논제 1 : 수학 I의 수열과 무한급수

- 논제 2 : 수학 10-나의 사인법칙과 수학 I의 무한등비급수
- 논제 3 : 수학 10-나의 코사인법칙
- 논제 4 : 수학 10-나의 도형

논제, 학생 답안 및 채점평

❑ 논제 1

수학 I에서 배운 수열에 관한 기본 개념의 이해를 요구하고 있다. 각에 따라 변하는 나선의 움직임을 관찰하여, 복잡한 나선의 움직임을 이해하는 데 필요한 기본적인 개념과 원리를 확인하도록 하였다.

논제에서 "제시문 (나)에서 주어진 "이라는 단서가 있었음에도 불구하고, 제시문 (나)의 내용을 고려하지 않고 논제의 해결방안을 제시한 경우가 많이 있었다. 특히, "선분들이 $\overline{OA_n} \geq \overline{OA_{n+1}}$ $(n=1, 2, \cdots)$을 만족하며 서로 겹치지 않고 점차 안쪽 방향으로 전진해가면서 다각 나선을 만든다."라는 조건을 무시한 채 단순하게 원점으로 수렴하지 않는(원점으로 한없이 가까워지지 않는) 예를 들어 설명하는 등 기대와 달리 논제를 제대로 이해한 답안이 매우 적었다. 수학을 문제 풀이 과목으로만 생각하여, 수학의 기본적인 개념과 원리, 그리고 사고 과정을 이해하지 못했기 때문으로 생각된다.

<학생 답안 1>

논제를 잘 이해한 답안이라고 할 수 있다. 다만, 다각 나선이 원점으로 한없이 가까워지지 않을 수도 있음을 설명하기 위해 $\overline{OA_n} = e^{\frac{1}{n}-1}$이 되도록 잡았는데, 마지막에 "$\lim_{n\to\infty} \overline{OA_n} = \frac{1}{e}$이므로 원점에 수렴하지 않는다."라고 결론을 내었더라면 더 좋았을 것이다. 또한

$A_n\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\sin(\theta(\mathrm{n}-1)), \frac{1}{\mathrm{n}}\cos(\theta(\mathrm{n}-1))\right)$ 에서

$\sqrt{\frac{2}{(n+1)^2} - \frac{2\cos\theta}{(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{n+1} < A_nA_{n+1}$ 부등식을 증명하는 과정에서

$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$은 맞지만,

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ 이므로, $\frac{-2\cos\theta}{(n+1)^2} > \frac{-2\cos\theta}{n(n+1)}$이 되어, 부등식이 뒤집어

진다. 올바른 풀이과정은

$$\overline{A_nA_{n+1}} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2\cos\theta}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2n^2+2n+1-2n(n+1)\cos\theta}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{(2-2\cos\theta)n^2+(2-2\cos\theta)n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$> \frac{(2-2\cos\theta)n^2}{n^2(n+1)^2} \quad (\because 2-2\cos\theta > 0)$$

$= \dfrac{2-2\cos\theta}{(n+1)^2}$ 이다.

[문항 3]

논제1)

$\theta = \frac{\pi}{2010}$ 일 때, 임의의 수열 $\{a_n\}$에 관하여 다각나선이 원점에 한없이 가까워지지 않을 수가 있다.

다각나선의 꼭지점 $A_1, A_2, \cdots A_n \cdots$에서 A_n을 원점에 수렴하지 않는 점으로 만들면 된다.

$A_n\left(e^{\frac{1}{n}-1}\sin\frac{\pi}{2010}(n-1),\ e^{\frac{1}{n}-1}\cos\frac{\pi}{2010}(n-1)\right)$ 이라고 하면 (n: 자연수) $A_1(0,1)$ 이므로

$(0,1)$에서 시작한다는 조건을 만족하고 $\overline{OA_n} = \sqrt{e^{\frac{2}{n}-2}\left(\sin^2\frac{\pi}{2010}(n-1) + \cos^2\frac{\pi}{2010}(n-1)\right)} = e^{\frac{1}{n}-1}$, $\overline{OA_{n+1}} = e^{\frac{1}{n+1}-1}$ 이고 $e^{\frac{1}{n}-1} > e^{\frac{1}{n+1}-1}$ 이므로 $\overline{OA_n} \geq \overline{OA_{n+1}}$ 조건을 만족시킨다.

원점으로 한없이 수렴하는 경우에 다각나선 이루는 선분들의 길이의 무한급수 $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \cdots$ 는 항상 수렴하는 것은 아니다.

$\overline{A_nA_{n+1}}$의 일반항은 코사인 제2법칙 써서 구할 수 있다.

$$(\overline{A_nA_{n+1}})^2 = (\overline{OA_n})^2 + (\overline{OA_{n+1}})^2 - 2(\overline{OA_n})(\overline{OA_{n+1}})\cos\theta$$

$$\overline{A_nA_{n+1}} = \sqrt{(\overline{OA_n})^2 + (\overline{OA_{n+1}})^2 - 2(\overline{OA_n})(\overline{OA_{n+1}})\cos\theta} \quad \text{---- ①}$$

$A_n\left(\frac{1}{n}\sin\{\theta(n-1)\},\ \frac{1}{n}\cos\{\theta(n-1)\}\right)$ 이라고 잡으면 $\overline{OA_n} = \frac{1}{n}$이 된다.

$\overline{OA_n} = \frac{1}{n}$을 ($\overline{OA_{n+1}} = \frac{1}{n+1}$) ① 식에 대입을 하게 되면 $\overline{A_nA_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 2\frac{1}{n(n+1)}\cos\theta}$ 가 된다.

$\overline{OA_n} = \frac{1}{n}$을, $\overline{OA_{n+1}} = \frac{1}{n+1}$ ① 식에 대입을 하게 되면 $\overline{A_nA_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-2\frac{1}{n(n+1)}\cos\theta}$ 가 된다.

$\cos\theta \geq 0$ 일 때 $\sqrt{\frac{2}{(n+1)^2}-2\frac{1}{(n+1)^2}\cos\theta} = \frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{n+1} < \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-2\frac{1}{n(n+1)}\cos\theta} = \overline{A_nA_{n+1}}$ 이므로

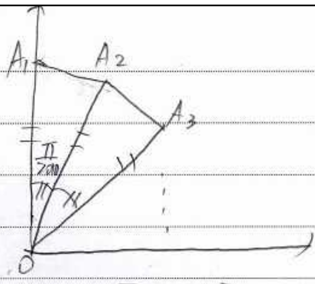
$\sum_{n=1}^{k}\frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{n+1} < \sum_{n=1}^{k} A_nA_{n+1}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2-2\cos\theta}}{n+1}$ 가 ∞로 발산하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} A_nA_{n+1}$ 도 발산한다. 그래서 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots$ 가 항상 수렴한다고 할 수는 없다.

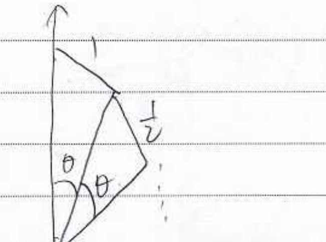
<학생 답안 2>

이 답안은 많은 학생들이 공통적으로 잘못 이해하고 접근한 예를 보여준다. $\overline{OA_n} = \overline{OA_{n+1}}$이 되도록 잡으면, 한 바퀴 돌고 나서 겹치게 되므로 주어진 조건을 만족하지 못하게 된다. $\overline{A_nA_{n+1}} = \frac{1}{n}$이 되도록 잡으면, 길이의 합이 발산하는 것은 맞지만, 이 경우 제시된 방법으로 나선이 만들어 질 수 없다.

논제 1) $\alpha_n = \frac{2009}{4020}\pi$로 일정할 경우 오른쪽의 [그림]과 같이 $\triangle OA_nA_{n+1}$은 이등변 삼각형이 되고 $\overline{OA_n} = \overline{OA_{n+1}}$로 항상 길이가 일정해지기 때문에 $\overline{OA_n}$은 0이 될 수 없다. 즉, 나선이 원점으로 가까이 가지 않는다.



[그림]



<그림-α>

그리고 왼쪽의 <그림-α>와 같이 $\overline{A_nA_{n+1}} = \frac{1}{n}$을 만족한다면 나선이 원점으로 한없이 가까워 지고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 발산하기 때문에 나선을 이루는 선분들의 길이의 급수는 발산할 수 있다. 하지만 $\overline{A_nA_{n+1}} = \frac{1}{n^2}$인 경우는 성립할 수 있으므로 항상 수렴하지도 항상 발산하지도 않는다.

❑ 논제 2

수학 10-나에서 배운 사인법칙을 활용하여 나선의 최종적인 움직임을 관찰하는 논제이다. 이를 통해 수학 I에서 배운 무한등비급수의 수렴에 관한 기본 개념을 이해하고 있는지 평가하고자 하였다.

논제 2에서와 같이 주어진 조건이 항상 성립되는 것을 증명할 때 특정한 경우를 예로 들어 설명하고, 이 경우에 성립되므로 모두 다 성립한다는 논지는 논제에 대한 답안이 될 수 없다.

<학생 답안 1>

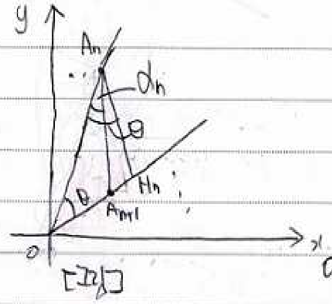
앞의 논제 1의 학생답안과 비슷한 접근 방식이지만, $\overline{A_nA_{n+1}} < \overline{OA_n}$ 임을 그림을 통하여 정확하게 보여주고 있다.

논제2.

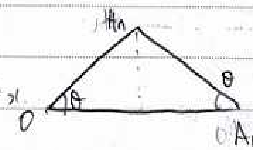
$0 < \alpha_1 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이고, $0 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ 이면,

$0 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \leq \cdots \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이다.

이 때, $\overline{OA_n}$ 의 길이는 다음과 같은 방법으로 알아낼 수 있다.



[그림]



점 A_n에서 각 θ만큼 시계방향으로 회전하되 $\overline{OA_n}$과 각 θ를 이루도록 H_n까지 선분을 그으면, $\alpha_n < \theta$ 이므로 $\overline{OH_n} > \overline{OA_{n+1}}$ 이다.

또한 이등변삼각형 $\triangle OH_nA_n$ 에서

$\overline{OH_n} = \frac{1}{2}\sec\theta\,\overline{OA_n}$ 이므로

$\overline{OA_{n+1}} < \frac{1}{2}\sec\theta\,\overline{OA_n}$ 임을 알 수 있다.

즉 $\overline{OA_n} < \left(\frac{1}{2}\sec\theta\right)^{n-1}\overline{OA_1}$ 으로 나타낼 수 있으며, $\sec\theta < \sec\frac{\pi}{3} = 2$ 이므로,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\sec\theta\right)^{n-1} = 0$ 이다. 따라서 $0 \leq \overline{OA_n} < \overline{OA_1}\left(\frac{1}{2}\sec\theta\right)^{n-1}$ 에서

$0 \leq \lim_{n\to\infty}\overline{OA_n} \leq 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\overline{OA_n} = 0$ 이다. 즉, 이 다각 나선은 원점으로 한없이 가까워진다.

또한, 위 [그림] 을 통해 $\overline{A_nA_{n+1}} < \overline{OA_n}$ 이다.

($\because$ $\overline{OA_n} = \overline{A_nA_{n+1}}$ 이도록 점 A_{n+1}을 잡을 수 없다).

따라서 $0 < \overline{A_nA_{n+1}} < \overline{OA_n}$ 이 되고,

$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{OA_n}$ 이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}$ 또한 수렴한다.

이 때, $\overline{OA_n} < \overline{OA_1}\left(\frac{1}{2}\sec\theta\right)^{n-1}$ 이고, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\sec\theta\right)^{n-1}\overline{OA_1}$ 은

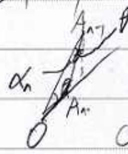
공비가 $0 < \frac{1}{2}\sec\theta < 1$ 인 무한등비급수이므로 수렴한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{OA_n}$ 도 수렴하며, 역시 $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots$ 또한 수렴한다

<학생 답안 2>

이 답안은 문제 해결과정에서 약간의 오류는 있으나, $\overline{OA_n} \le \left(\dfrac{1}{2\cos\theta}\right)^{n-1}\overline{OA_1}$ 임을 잘 관찰하였다. 다만, $\overline{A_kA_{k+1}} < \overline{OA_k}$임을 주장함에 있어서, $\triangle\, OA_kA_{k+1}$ 이 둔각삼각형이라고 주장하고 있으나, 49°, 50°, 81°로 이루어진 삼각형 같은 경우가 생길 수 있기 때문에 둔각삼각형이 되지 않을 수 있다. $\overline{A_kA_{k+1}} < \overline{OA_k}$ 는 맞지만, 설명 과정에 오류가 있는 점은 아쉽다.

(논제 2.) $\alpha_n = \theta$일 때 $\overline{OA_n} = \dfrac{\overline{OA_{n-1}}}{2\cos\theta}$ 을 만족한다



그러나 $\alpha_n \le \theta$라면 $\overline{OA_n} \le \dfrac{\overline{OA_{n-1}}}{2\cos\theta} \le \left(\dfrac{1}{2\cos\theta}\right)^{n-1}\overline{OA_1}$ 을 만족한다.

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\cos\theta > \frac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2\cos\theta} < 1$ 이다

$\therefore$ $n\to\infty$ 일때 $\overline{OA_n} \to 0$; 다각 나선이 원점으로 한없이 가까워짐

$\overline{A_kA_{k+1}} < \overline{OA_k}$ ($\because \triangle OA_kA_{k+1}$은 둔각삼각형) 이므로

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty}\overline{A_kA_{k+1}} < \sum_{k=1}^{\infty}\overline{OA_k} \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2\cos\theta}} = \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta-1}$$

$\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kA_{k+1}}\right)$은 n이 커짐에 따라 그 값이 증가하고, 그 값은 $\dfrac{2\cos\theta}{2\cos\theta-1}$ 를 넘지 못하므로 $\sum_{k=1}^{\infty}\overline{A_kA_{k+1}}$ 은 항상 수렴한다.

<학생 답안 3>

$\theta = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_n = \alpha_{n+1}$ 일 때, 수렴함을 보이게 됨을 제시문 (다)에서 알 수 있다고 했는데, 이에 대한 설명이 없어서 어떻게 알 수 있다는 것인지 확인할 수 없다. 또한 $\alpha_n = \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{6}$ 인 경우만 설명하고, 특정한 경우에 성립하므로 모두 성립한다고 주장하고 있는데, 이는 학생들이 범하는 대표적인 오류 중 하나이다. 하나의 예를 통해 논지를 주장하는 것을 타당하지 않을 수 있다.

논제2 $0 < \alpha_1 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이고 $0 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ 이면 수열 α_n 이 감소함수이고

α_n의 최솟값의 범위가 정해져 있으므로 $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = L$ α_n은 L로 수렴한다고 할수있다.

$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ $\theta < \frac{\pi}{3}$인경우 수렴하는것을 보이려면 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일때 $\alpha_n = \alpha_{n+1}$ 일때 수렴함을

보이면 됨은 다에서 알수있다 $\theta = \frac{\pi}{3}$이고 $\alpha_n = \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{6}$ 이면

$|\overline{OA_{n+1}}| = \frac{1}{2}|\overline{OA_n}|$ 이되어 $\lim_{n \to \infty} |\overline{OA_{n+1}}| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$0 < \alpha_1 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이고 $0 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ 이면 다각내선이

원점으로 수렴한다 고할수 있다.

같은원리에의하여 $\theta = \frac{\pi}{3}$ $\alpha_n = \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{6}$일때

$\overline{A_nA_{n+1}} = b_n$ 이라하면 $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$이되므로

$0 < \alpha_1 < \theta < \frac{\pi}{3}$, $0 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ 이면

$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_nA_{n+1}}$ 이수렴한다 할 수있다.

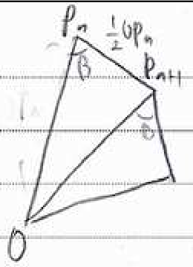
❑ 논제 3

길이에 따라 변하는 나선의 움직임을 관찰하도록 하여, 수학 10-나에서 배운 코사인 법칙을 적절히 활용할 수 있는지 확인하고자 하였다. 이 논제를 해결하기 위해서는 주어진 현상을 분석하고 종합할 수 있는 사고력이 필요하다. 아래 제시된 예시답안 이외에 $\frac{5}{4}-\cos\beta$를 좌표를 통해 구한 경우도 있었다.

<학생 답안 1>

등비수열임을 보이고, 경우에 따라 정확하게 기술하여 좋은 평가를 받았다.

논제3,



이때 제2 cos 법칙을 따라서

$(\overline{OP_n})^2 + \frac{1}{4}(\overline{OP_n})^2 - 2\times\frac{1}{2}(\overline{OP_n})^2\cos\beta = \overline{OP_{n+1}}^2$ 이 성립한다.

$(\overline{OP_n})^2$ 으로 정리하면 $(\overline{OP_n})^2\{\frac{5}{4}-\cos\beta\} = \overline{OP_{n+1}}^2$

$\frac{5}{4}-\cos\beta = \left(\frac{\overline{OP_{n+1}}}{\overline{OP_n}}\right)^2$

$\therefore \frac{\overline{OP_{n+1}}}{\overline{OP_n}} = \sqrt{\frac{5}{4}-\cos\beta}$

OP_n은 $\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\beta}$ 를 공비로 하는 등비수열임을 알 수 있다.

따라서 다음과 같이 세 경우로 나누어 생각할 수 있다.

i) $-1 \le \cos\beta < \frac{1}{4}$

이경우 $\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\beta} > 1$ 이므로 증가수열이되어서 P_n은 무한히 멀어진다.

ii) $\cos\beta = \frac{1}{4}$

이경우 $\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\beta} = 1$ 이되어서 OP_n이 일정하고 P_n은 OP_n을 반지름으로하는 원 위의 점들이 된다.

iii) $\frac{1}{4} < \cos\beta \le 1$

이경우 $\frac{1}{2} \le \sqrt{\frac{5}{4}-\cos\beta} < 1$ 이므로 공비가 1보다작은 감소수열이다.

OP_n은 계속 감소하고 따라서 P_n은 O에 수렴하게 된다.

<학생 답안 2>

이 답안은 등비수열이라는 것을 찾아 내었지만, 이를 정확하게 기술하지 못한 점은 아쉽다. “$\cos\beta < \frac{1}{4}$ 이라면, (...) $\overline{OP_3} > \overline{OP_2}$ 이다. 따라서 P_n은 나선이 더욱 커지는 형태로 발산하게 될 것이다”라고 했으나, $\overline{OP_2} < \overline{OP_3} < \overline{OP_4} < \cdots$ 라고 해서 나선이 발산하는 것은 아니다. 예를 들어, $\overline{OP_n} = 1 - \frac{1}{n+3}$이면 $\overline{OP_n}$은 증가하지만, $\lim_{n\to\infty}\overline{OP_n} = 1$로 수렴할 수 있다. 마찬가지로 $\cos\beta > \frac{1}{4}$인 경우에도 $\overline{OP_1} > \overline{OP_2} > \overline{OP_3} > \cdots$ 라고 해서 $\overline{OP_n}$이 0으로 수렴하는 것은 아니다. 여기에서 중요한 것은 $\overline{OP_n}$이 등비수열이고 공비가 1보다 작은지 혹은 큰지에 따라 0으로 수렴 혹은 발산하게 된다는 점이다.

<문제 3> 먼저 $\overline{OP_1}$의 길이를 a $\overline{P_1P_2} = \frac{1}{2}\overline{OP_1} = \frac{1}{2}a$로 놓자.
그러면 $\overline{OP_2}$의 값은 $\sqrt{a^2+(\frac{1}{2}a)^2 - 2\cdot a\cdot\frac{1}{2}a\cdot\cos\beta} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \cos\beta a^2}$ 라고 할 수 있다

만약 $\cos\beta < \frac{1}{4}$이라면 $\overline{OP_2} > \overline{OP_1}$ $\overline{OP_3}$과 $\overline{OP_2}$ 또한 같은 방식으로 구하면 $\overline{OP_3} > \overline{OP_2}$
따라서 $\cos\beta < \frac{1}{4}$이라면 P_n은 나선이 더욱 커지는 형태로 발산하게 될 것이다.
만약 $\cos\beta = \frac{1}{4}$ 이라면 $\overline{OP_2} = \overline{OP_1}$ $\overline{OP_3}$과 $\overline{OP_2}$ 또한 같은 방식으로 $\overline{OP_3} = \overline{OP_2}$
따라서 $\cos\beta = \frac{1}{4}$이라면 P_n은 원점과 a의 거리를 갖는 원의 위에 위치하게 될 것이다
만약 $\cos\beta > \frac{1}{4}$ 이라면 $\overline{OP_2} < \overline{OP_1}$ $\overline{OP_3}$과 $\overline{OP_2}$ 또한 같은 방식으로 $\overline{OP_3} < \overline{OP_2}$
따라서 $\cos\beta > \frac{1}{4}$ 이라면 P_n은 원점을 향해 수렴하는 나선형을 가질 것이며 수렴하는 속도는 $\cos\beta$의 크기가 클수록 더 크다고 추론할 수 있다.

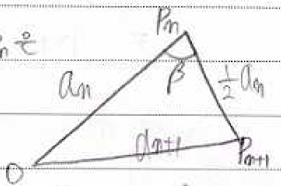
<학생 답안 3>

$\{a_n^2\}$이 등비수열임을 올바르게 설명하고 있으나, 공비가 1일 때, 즉, $\frac{5}{4}-\cos\beta=1$ 인 경우에 대한 설명이 빠져있다. 이를 고려하여 설명하였다면 좀 더 좋은 평가를 받을 수 있었을 것이다.

논제 3

$\overline{OP_n} = a_n$ 이라 하자.

그렇다면 $\triangle OP_{n+1}P_n$ 은



의 형태로서 코사인 제2법칙에 의해

$a_{n+1}^2 = \frac{5}{4}a_n^2 - a_n^2\cos\beta$ 를 만족한다.

즉 $a_{n+1}^2 = (\frac{5}{4}-\cos\beta)a_n^2$ 이므로

수열 $\{a_n^2\}$은 등비수열이다.

$\therefore a_n^2 = a_1^2 \times (\frac{5}{4}-\cos\beta)^{n-1}$

이때 공비인 $\frac{5}{4}\cos\beta$의 값에 따라서

수열 $\{a_n^2\}$의 수렴하는 지, 발산하는 지가 결정된다.

i) 공비 $\frac{5}{4}\cos\beta<1$ 일 때,

즉 $\frac{1}{4}<\cos\beta<1$ 일 때

수열 $\{a_n^2\}$은 0으로 수렴한다.

∴ 주어진 다각나선은 한점으로 수렴한다.

ii) 공비 $\frac{5}{4}-\cos\beta>1$ 일 때

즉 $\frac{1}{4}>\cos\beta>-1$ 일 때

수열 $\{a_n^2\}$은 발산

∴ 주어진 다각나선은 한점으로 가까워지지 않는다.

❑ 논제 4

제시문에서 필요한 수학적 내용을 확인하고, 로그 나선과 관련된 기하학적 성질을 추론하도록 하였다. 특히 이 논제는 수학 10-가, 10-나의 교육과정 내용에 대한 기본적인 이해만으로 충분히 문제를 해결할 수 있으나, 오히려 어렵게 적분과 벡터를 이용하면 많은 계산이 필요하기 때문에 시간을 소모할 수 있다. 따라서 이 논제를 해결하는 데 있어서는 수학적 논리력, 추리력, 상상력 등이 중요하다.

즉, 제시문의 내용에서 $\angle QPO$는 항상 $\frac{\pi}{4}$이고, $\angle POQ$는 직각이므로 각 OQP도 $\frac{\pi}{4}$임을 알 수 있으므로, 이를 토대로 그림을 그려보면 복잡한 계산을 하지 않고도 쉽게 논제를 해결할 수 있었을 것이다.

<학생 답안 1>

논제를 잘 이해하고 그림을 올바르게 그렸다. $\overset{\frown}{AD}$, $\overline{OA}$ 로 둘러싸인 넓이와 $\overline{OB}$, $\overset{\frown}{BC}$ 로 둘러싸인 넓이가 같다는 것을 잘 관찰하여, 복잡한 계산 없이 논제를 잘 해결하여 좋은 평가를 받았다.

논제4.

OP에서의 접선식은 P일때 $\theta = \theta_0$라 하면 다음과 같다.

$$y = \frac{dy}{dx}(x - e^{\theta_0}\cos\theta_0) + e^{\theta_0}\sin\theta_0 = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}(x - e^{\theta_0}\cos\theta_0) + e^{\theta_0}\sin\theta_0$$

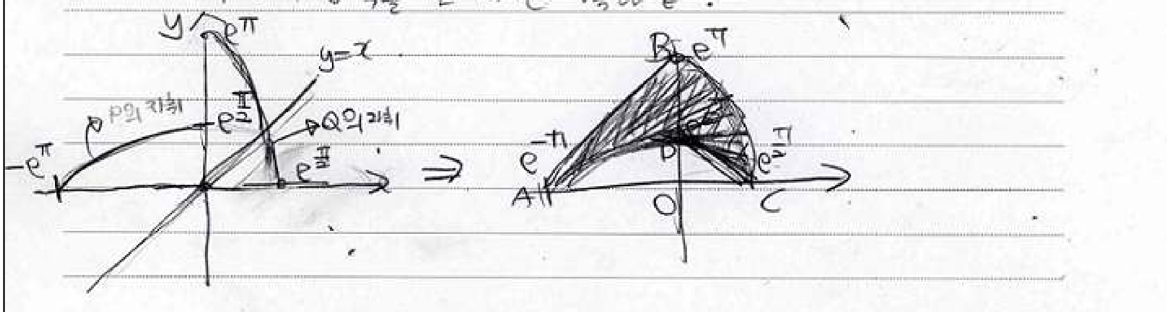
$$= \frac{e^{\theta_0}(\sin\theta_0 + \cos\theta_0)}{e^{\theta_0}(\cos\theta_0 - \sin\theta_0)}(x - e^{\theta_0}\cos\theta_0) + e^{\theta_0}\sin\theta_0 = \frac{\cos\theta_0 + \sin\theta_0}{\cos\theta_0 - \sin\theta_0}(x - e^{\theta_0}\cos\theta_0) + e^{\theta_0}\sin\theta_0$$

선분 OP의 기울기는 $\frac{e^{\theta_0}\sin\theta_0}{e^{\theta_0}\cos\theta_0} = \tan\theta_0$이므로 직선 OQ의 식은

$y = -\frac{1}{\tan\theta_0}x$가 되며 따라서 Q의 좌표를 계산해보면

$Q = (e^{\theta_0}\sin\theta_0, -e^{\theta_0}\cos\theta_0)$가 된다. 즉 P의 좌표가 (x, y)일때 Q의 좌표는 $(y, -x)$가 된다. 즉 P를 y축대칭후 $y=x$에 대칭시킨것이 Q가 된다.

θ가 $\frac{\pi}{2}$에서 π까지 변하므로 P의 좌표 x는 0에서 $-e^{\pi}$까지 변하며 y는 $e^{\frac{\pi}{2}}$에서 0까지 변한다. 또한 $x^2+y^2=e^{2\theta}$ 위에 x, y가 존재한다. 따라서 PQ의 영역을 도시하면 다음과 같다.



여기서 곡선 AD와 OA로 둘러싸인 넓이와 OB와 곡선 BC로 둘러싸인 넓이가 같으므로

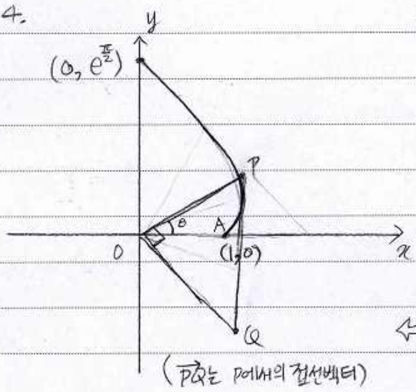
PQ가 그리는 영역의 넓이는 $\frac{1}{2}(e^{\pi})^2 - \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}})^2 = \frac{1}{2}(e^{2\pi} - e^{\pi})$가 된다.

<학생 답안 2>

주어진 논제에 대하여 매우 정확한 설명을 하고 있으나, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$를 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$로 착각하여 문제를 해결한 점은 매우 아쉽다.

논제 4.

$P\begin{pmatrix} x = e^{\theta}\cos\theta \\ y = e^{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OP} = (e^{\theta}\cos\theta, e^{\theta}\sin\theta)$ $\quad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{e^{2\theta}\cos^2\theta + e^{2\theta}\sin^2\theta} = e^{\theta}$



기본적으로 $(\cos\theta, \sin\theta)$는 원이다. 그런데 $|\overrightarrow{OP}|$은 e^{θ}이므로 반지름이 점점 증가하는 원으로 생각할 수 있다.

$\overrightarrow{OP}_{\theta=0} = (1, 0)$, $\overrightarrow{OP}_{\theta=\frac{\pi}{2}} = (0, e^{\frac{\pi}{2}})$

⇦ 즉 이와같은 그래프가 된다.

($\overrightarrow{PQ}$는 P에서의 접선벡터)

임의의 점 $P(e^{\theta}\cos\theta, e^{\theta}\sin\theta)$에서 Q의 좌표를 구해보면,

제시문에 따르면 P에서의 접선과 $\overline{OP}$가 45°를 이룬다고 하였으므로

$\angle OPQ = 45^{\circ}$ 이다. 즉

그리고 $\angle POQ = 90^{\circ}$ 이므로 삼각형POQ는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{OP} = \overline{OQ}$

위에서 $|\overrightarrow{OP}| = e^{\theta}$ 였으므로, $|\overrightarrow{OQ}| = e^{\theta}$ 이다.

그리고 매개변수 $\theta \Rightarrow \angle POA = \theta$ 이므로

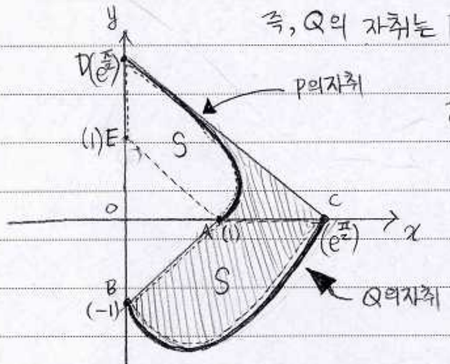
$\angle QOA = \theta - \frac{\pi}{2}$ 이다.

결국 $\overrightarrow{OQ}$의 크기는 e^{θ}이고, 동경은 $\theta - \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overrightarrow{OQ} = (e^{\theta}\cos(\theta - \frac{\pi}{2}), e^{\theta}\sin(\theta - \frac{\pi}{2}))$ 이다.

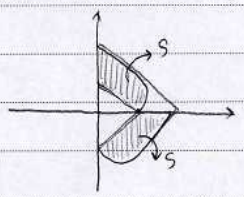
그런데, $\overrightarrow{OQ}$는 결국 각각의 P에 대해 90°만큼 시계방향으로 회전시킨 것이다.

즉, Q의 자취는 P의자취를 원점에 대해 90°만큼 시계방향으로 회전시킨것이다.



결국 구하는 면적은 빗금친 부분이 된다.

그런데 선분 $\overline{AB}$와 x축, 그리고 Q의자취로 둘러싸인 부분의 면적을 S라고하면, 동일한 넓이의 부분이 1사분면에도 존재한다.



$\overline{PQ}$ 자취의 넓이 $= \square EACD = \triangle COD - \triangle AOE$

$$= \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}})^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{1}{2}(e^{\pi} - 1)$$

$$\boxed{\therefore \frac{1}{2}(e^{\pi} - 1)}$$

5 문항 4

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

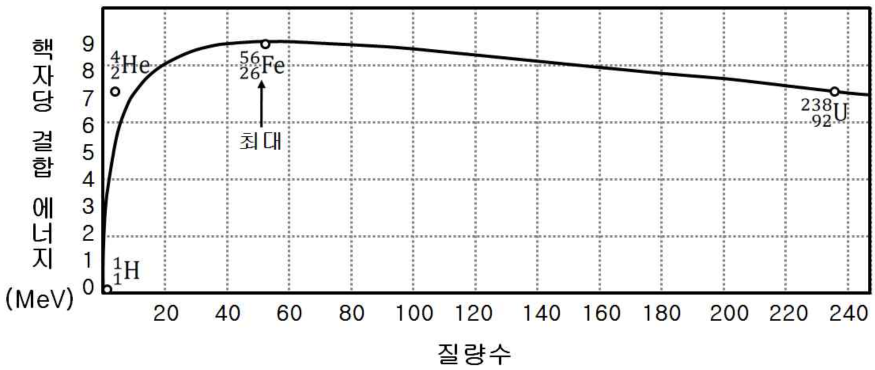
(가) 원자핵

원자핵은 핵자로 불리는 양성자와 중성자로 구성되어 있다. 전하를 띤 양성자들은 원자핵 속에서 서로 매우 가까운 거리에 있으므로 강한 전기적 반발력이 작용한다. 그럼에도 불구하고 양성자들이 원자핵 속에 계속 결합되어 있을 수 있는 것은 핵자들 사이에 작용하는 핵력 때문이다. 핵력은 매우 강한 인력이지만 $1\times10^{-15}\mathrm{m}$ 정도의 아주 짧은 거리 안에서만 작용한다. 원자핵을 개개의 핵자들로 모두 분리하는 데 필요한 에너지를 결합 에너지라고 하며 그 값은 원자핵의 종류에 따라 다르다. 원자핵의 질량은 원자핵을 구성하는 핵자들 질량의 단순 합보다 적은데 그 질량 차이는 원자핵의 결합 에너지에 비례한다. 질량수가 A인 원자핵은 총 A개의 핵자로 구성되는데 이 원자핵의 결합 에너지를 질량수로 나눈 핵자당 평균 결합 에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$(\text{핵자당 평균 결합 에너지})=\frac{[A\times M(1)-M(A)]\times c^2}{A}$$

$\mathrm{M(A)}$는 원자핵의 질량, $\mathrm{M(1)}$은 핵자 1개의 질량으로 $1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}$이며 빛의 속도의 제곱 c^2은 아인슈타인의 특수 상대성이론에서 질량-에너지 등가 관계식 $E=mc^2$의 비례상수이다.

[그림 1]은 핵자당 평균 결합 에너지가 원자핵의 질량수(A)에 따라 변하는 경향을 나타낸 그래프이다.



[그림 1] 핵자당 결합 에너지

핵 반응에서는 반응 전후 원자핵들의 결합 에너지의 차이에 해당하는 에너지가 방출되거나 흡수된다.

(나) 원자 및 분자

원자는 원자핵과 전자로 구성되어 있다. 원자 안에서 전자는 다음의 특성을 갖는다.

① 전자의 에너지 상태는 불연속적인 특정한 값만을 갖는다. 이 값들은 각 원소마다 독특하다.

② 낮은 에너지 상태에 있는 전자가 높은 에너지 상태로 변화할 때는 두 에너지 상태의 차이 값만큼의 에너지를 흡수하여야 한다. 반대로, 높은 에너지 상태에 있는 전자가 낮은 에너지 상태로 내려올 때는 해당 크기의 에너지를 방출한다.

예) 백열등처럼 연속 스펙트럼을 가진 빛을 네온 기체에 통과시키면 네온 원자의 전자 에너지 상태에 따라 특정 위치에서 검은 선들이 나타나는 흡수 스펙트럼이 얻어진다.

[그림 2] 네온 기체의 흡수 선 스펙트럼 ($1\mathrm{nm} = 1 \times 10^{-9}\mathrm{m}$)

분자는 원자들이 결합하여 만들어진다. 분자내의 원자들이 움직이는 진동 운동은 다음과 같은 특성을 갖는다.

① 분자의 진동 에너지는 불연속적인 특정한 값들을 갖는다. 이 값들은 각 분자마다 독특하다.

② 분자의 진동 운동이 낮은 에너지 상태에서 높은 에너지 상태로 변화할 때는 두 에너지 상태의 차이만큼 에너지를 흡수한다. 반대로 높은 에너지 상태에 있는 진동 운동은 에너지를 방출하며 낮은 에너지 상태로 내려간다.

분자의 진동 에너지는 $100\mathrm{kJ/mol}$ 이하의 값이며 적외선 영역(파장 $1\mu\mathrm{m}$ 이상)에 해당한다. 원자 내의 전자 에너지는 이 보다 큰 값을 가지며 가시광선 ($400\mathrm{nm} \sim 700\mathrm{nm}$) 또는 자외선 영역에 해당하고, 원자핵 내의 핵자들의 결합 에너지는 이 보다 백만 배 이상 크다.

물질의 열에너지는 입자의 운동, 분자의 내부 진동, 원자의 전자 에너지 등 다양한 에너지의 합으로 나타낼 수 있다. 절대온도 T에서 열에너지는 대략 kT만큼의 값을 갖는다.(k는 볼츠만 상수로 $1.4 \times 10^{-23}\mathrm{J/K}$이다.)

(다) 별

별이 탄생하는 곳은 우주 공간에서 기체와 먼지입자가 풍부하게 모여 있는 성간 구름 영역이다. 성간 구름의 온도는 매우 낮아서 절대온도 10K까지 이르기도 한다. 이 기체 구름 내에서 입자들 간에 서로 작용하는 중력에 의해 구름이 수축하면, 중력에너지가 열에너지로 바뀌게 되고, 기체 구름의 밀도와 온도를 상승시킨다. 이 과정이 계속 진행되면서 핵융합이 일어나기에 충분한 고온·고압 조건이 기체 구름의 중심부에 만들어지면, 별이 탄생하며 주위 기체는 별의 대기를 형성한다. 별의 내부에서는 양성자 4개가 헬륨 핵으로 융합되는 반응에서 헬륨 핵의 결합 에너지에 해당하는 약 26MeV의 에너지가 방출되며 별이 빛난다. 질량이 충분히 큰 별들의 경우는 내부의 압력과 온도가 더 높아지면서 헬륨 핵들이 탄소, 산소 등으로 융합하는 반응들이 에너지를 발생시켜 별은 계속 빛나게 된다. 이 후, 별의 내부 온도는 더 높아져 탄소, 산소 등이 실리콘, 마그네슘 등으로 융합하며 에너지를 발생한다. 이러한 과정을 거치면서 중심부가 점차 무거운 원소들로 변하고 마지막으로 철 핵이 형성된다.

핵융합에 필요한 연료를 모두 소모한 별은 중력으로 수축하기 시작하여 결국 초신성 폭발에 이르게 된다. 초신성 폭발은 은하에서 종종 관측되는데, 1602년 우리 은하계에서 폭발한 초신성에 대한 기록이 조선왕조실록에 남아 있으며 동시대의 케플러도 이를 관측하였다.

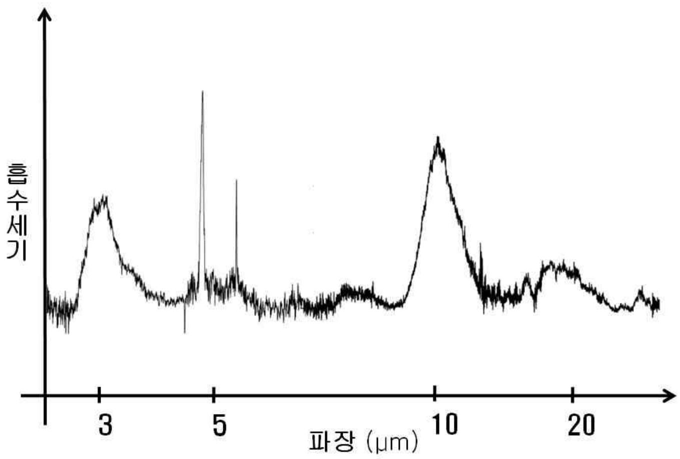
논제 1. 천체 망원경 기술의 발전에 힘입어 별 빛의 스펙트럼을 분석하는 분광 분석적 천체관측이 가능하게 되었다. 관측 스펙트럼 영역도 가시광선뿐 아니라 자외선 및 적외선 영역까지 확장되었으며, 지구 대기의 영향을 없애기 위해 인공위성에 탑재시킨 천체 망원경을 사용한다.

1-1. 지구에 도달하는 별 빛이 별과 지구사이에 존재하는 성간 구름 영역을 통과하는 경우, [그림 3]과 같이 적외선 스펙트럼에서 다양한 흡수 봉우리들이 관찰된다. 이 자료에 의거하여 성간 구름에 물분자가 존재할 가능성에 대해 논하시오.

[참고자료: O-H 작용기의 진동 운동에너지에 해당하는 빛의 파장은 다음과 같이 계산된다.

$$\lambda = 7.6 \times 10^{7}\ \mathrm{m} \times \sqrt{M_{\mathrm{H}} / 1\mathrm{kg}}$$

여기서 λ는 빛의 파장, M_{H}는 수소원자의 질량($1.67 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$)이다.]



[그림 3]

1-2. 별 빛의 스펙트럼에는 적외선을 포함하는 연속 스펙트럼 위에 가시광선과 자외선 영역에 검은 흡수선들이 나타난다. 별 빛이 성간 구름 영역을 거치지 않고 직접 지구로 도달하는 경우에는 [그림 3]과 같은 적외선 영역의 흡수 봉우리들은 관찰되지 않는다. 이로부터 별의 대기와 성간 구름에 존재하는 물질들이 어떻게 다른지를 유추하고, 차이가 나타나는 이유를 두 환경의 온도 효과로 설명하시오.

논제 2. 태양의 내부에서는 양성자 4개가 모여 한 개의 헬륨 원자핵을 만드는 핵융합 반응이 일어나고 있다. 태양 내부의 온도는 약 $1.6\times10^{7}\mathrm{K}$ 정도이며 여기서 수소는 양성자(H^{+})의 형태로 존재한다. 양성자들이 핵융합을 일으키려면 이들 사이의 거리가 핵력의 작용범위 이내에 있을 때만 가능하다. 고정되어 있는 양성자를 향해 다른 한 개의 양성자가 $2\times10^{-11}\mathrm{m}$의 거리에서 다가가는 경우를 생각하여 보자. 양성자는 전하를 지니고 있어 둘 사이의 거리가 r일 때, 전기력 $F=\dfrac{9\times(1.6)^2\times10^{-29}\mathrm{Nm}^2}{r^2}$의 밀어내는 힘이 존재한다.

다가가는 양성자가 상호 반발력에 의하여 되돌아가기 시작하는 거리를 유효숫자 한자리 근사로 구하고, 고전물리적인 방법으로는 핵융합이 일어날 수 없음을 보여라.(양성자를 고전적인 기체분자로 생각하면, 양성자의 평균운동 속도는 $v=\sqrt{\dfrac{3kT}{M_{\mathrm{H}}}}$ 로 주어진다. 여기서 k는 볼츠만 상수로 $1.4\times10^{-23}\mathrm{J/K}$의 값을 가지며 M_{H}은 양성자의 질량으로 $M_{\mathrm{H}}=1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}$이다.)

논제 3. [그림 1]을 근거로 별에서의 핵융합 반응은 철 원자핵의 생성까지만 진행되는 이유를 논하고, 이와 관련하여 인류가 핵에너지를 이용할 수 있는 두 가지 원리를 설명하시오.

출제의도 및 문항설명

◦ 우주 현상의 기반이 매우 작은 소립자부터 원자, 분자 세계에 있다는 발견은 현대 과학의 중요한 업적 가운데 하나이다. 우주의 시작 및 진화 과정을 실험실에서 재현하고 그 결과를 실제 관측 결과와 비교하여 이해하는 과정에는 여러 학문 분야가 융합되어 있다.

◦ 이 문항에서는 별의 다양한 성질을 물리·화학적으로 측정하는 과정과 별 내부에서 일어나는 현상을 다루고 있다. 물리, 화학, 지구과학 교과서에서 배운 기본적인 개념과 제시문의 내용을 토대로 별과 관련된 현상을 분석하고, 과학적 사고를 통하여 논리적인 결론을 이끌어 내는 능력을 평가하고자 하였다. 또한 관련 내용이 과학적 호기심뿐 아니라 인류의 미래 에너지 문제에 중요한 해법을 제시할 수 있다는 것도 생각해 보도록 하였다.

출전 및 참고 교과서

◦ 과학 교과서와 과학 교양서적의 내용을 참고하여 논제해결에 필요한 정보를 제공하였다.

◦ 제시문 (가) : 원자핵의 구성 물질과 결합 에너지 (물리 II 교과서, 교학사, p 332~333. 존그리빈, 『사람이 알아야 할 모든 것 과학』, 들녘, p 626~628)

◦ 제시문 (나) : 에너지 상태 변화에 따른 원자와 분자의 특성 (화학 II 교과서, 교학사 p 117~118. 화학 II 교과서, 도서출판 형설, p 102~106. 물리 II 교과서, 교학사, p 158. 『교양으로 읽는 과학의 모든 것 I』, 한국과학창의재단, p 301~ 303)

◦ 제시문 (다) : 별의 탄생과 소멸에 대한 설명 (지구과학 I 교과서, 중앙교육, p 185. 지구과학 II 교과서, 교학사, p 204~206. 『교양으로 읽는 과학의 모든 것 I』, 한국과학창의재단, p 16~26. 최무영, 『최무영 교수의 물리학 강의』, p390~401)

논제, 학생답안 및 채점평

❑ 논제 1

고교 과학과정에서 다루는 소립자, 원자핵, 원자, 분자에 대한 지식을 활용하여, 천문학적 관찰을 설명하는 논제이다. 우주를 이루는 다양한 물질과 현상들이 기본적인 물리·화학적 법칙에 의해 지배된다는 사실을 논리적으로 유추할 수 있도록 유도하였다. 특히 성간 물질과 별의 대기에 중점을 두어, 이들을 구성하는 원자 및 분자들을 알아내는 방법과 천체 환경의 자연 현상을 설명하도록 하였다.

➲ 논제 1-1

<학생 답안 1>

제시문은 원자, 분자의 에너지가 연속적인 값이 아니라 불연속적인 특정한 값을 가지고 있으며, 그 값은 분자 또는 원자마다 독특하다고 말하고 있다. 여기에서 에너지의 흡수 또는 방출에서도 특정한 값만이 가능하며 이 또한 원자나 분자마다 독특하다는 사실을 도출하고, 에너지의 흡수를 나타내는 그래프에서 성간물질의 구성 성분을 알아내고 있다. O-H기의 흡수에너지는 주어진 식을 통하여 쉽게 확인되므로, 그래프에서 해당하는 흡수봉우리를 찾아낼 수 있다.

논제1

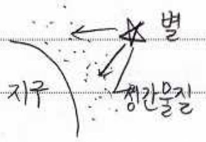
제시문 (나)에 따르면, 분자의 진동에너지는 불연속적인 특정한 값을 가지며, 그 값은 분자마다 독특하다고 하였다. 또한 분자들은 에너지를 받으면 흡수하고, 혹은 방출한다고 나와 있다.
즉, 그 방출·흡수한 양은 분자마다 특정한 값을 가질 수 있다고 추론해 낼 수 있다.
위의 정보를 통해 논제의 그래프의 흡수세기를 통해, 성간구름의 구성성분을 추측해 볼 수 있다

$\lambda = 7.6 \times 10^7\ m \times \sqrt{M_H/kg}$ 에서 $M_H = 1.67 \times 10^{-27}$ kg으로 주어져 있으므로
애의 빛의 파장은
$\lambda_{애} = 7.6 \times 10^7 m \times \sqrt{1.67 \times 10^{-27}} \fallingdotseq 7.6 \times 10^7 m \times \sqrt{16 \times 10^{-28}} = 7.6 \times 10^7 \times 4 \times 10^{-14}$
$\fallingdotseq 3 \times 10^{-6}$ 이 된다. 즉 $\lambda_{애} = 3\mu m$ 가 된다.
즉, 물 분자는 H-O-H 의 구조로 O-H의 빛의 파장에 해당하는 빛을 흡수하게 된다. 이 때, 그래프에서 3μm 부근의 흡수세기가 상대적으로 높음을 볼 수 있다. 따라서 성간 구름에는 물 분자가 존재할 가능성이 있다.

<학생 답안 2>

그래프의 의미를 반대로 이해하여 흡수세기가 높은 사실을 흡수가 잘 되지 않은 것으로 해석하고 물 분자가 존재하지 않는다는 잘못된 결론을 도출하였다.

1-1. O-H 작용기의 진동 운동에너지 빛의 파장 $\lambda = 7.6 \times 10^7 m \times \sqrt{1.67 \times 10^{-27}}$
$= 7.6 \times 10^7 m \times \sqrt{16.7 \times 10^{-26}} \fallingdotseq 3 \times 10^{-5} m$
만약 성간 구름에 물분자가 존재한다면 물분자가 진동에너지에 해당하는 빛의 파장을 흡수하여 공명 현상을 일으키기 때문에 지구에서의 특정한 적외선 스펙트럼에서 흡수세기가 낮아야 한다. (해당 파장에서)



$1\mu m = 1 \times 10^{-5} m$이므로 그림에서 3μm에 해당하는 구간을 보면
흡수세기가 높으므로 성간물질에 물 분자가 존재하지 않다고 할 수 있다.
성간물질에서 흡수가 잘 안된 것이다. 따라서

<학생 답안 3>

성간구름이 흡수하였다가 다시 방출한 별빛의 에너지가 지구에 도달한다는 잘못된 개념을 가진 답안이다. 다시 방출되는 별빛은 모든 방향으로 퍼지므로 지구방향으로 도착하는 별빛의 에너지는 다른 파장의 빛과 비교하여 상대적으로 줄어들게 된다.

[논제1-1] 성간 구름에 물분자가 존재한다면, 지구에 도달하는 별빛이 성간 구름영역을 거치면서
별빛의 에너지를 물 분자가 흡수했다가 다시 에너지를 방출하면서 빛을 지구에 전달해줄 것이다.
이 때 물분자만의 특수한 진동에너지만큼의 빛이 방출되므로, [그림3] 에서의 적외선 스펙트럼에서
물분자의 진동 에너지에 해당하는 파장이 봉우리 모양으로 많이 흡수되었을 것이다.
물분자는 H_2O로 O-H 공유결합 2개로 이루어져 있다. O-H 작용기의 파장
$\lambda = 7.6\times10^7 m \times \sqrt{1.67\times10^{-27}} \doteqdot 7.6\times10^7 \times 1.3\times10^{-14} \doteqdot 10\times10^{-7} = 10^{-6} m = 1000nm$
이며, 2개의 O-H 이므로 물분자는 2000nm의 파장을 가진 빛에너지를 방출할 것이다.
$1\mu m = 1000nm$ 이므로, 물분자의 진동에너지에 의한 파장은 $2\mu m$이고, [그림3] 에서
봉우리로 관찰되기 때문에, 성간구름 영역에 물 분자가 존재할 가능성이 있다고 할 수 있다.

⊃ 논제 1-2

<학생 답안 1>

적외선 영역의 에너지는 분자의 진동에너지에 해당한다는 사실과 별의 온도와 성간 구름의 온도에 해당하는 열에너지를 제시문에서 파악하고, 분자의 존재 유무가 적외선 흡광 봉우리의 존재 유무를 결정한다는 사실을 도출하여 좋은 평가를 받았다.

1-2
. 제시문에 따르면 적외선 영역에 해당하는 에너지는 분자의 진동에너지
뿐이라는 사실을 알 수 있는데. 별의 대기를 통과한 별빛의 스펙트럼에서
적외선 영역의 흡수 봉우리들이 존재하지 않는다는 사실로 미루어보았을 때,
별의 대기에는 공유결합을 가지는 분자성물질들이 존재하지 않는다는 사실을
추리 해볼 수 있다. 제시문(다)에 나와있듯 성간 구름의 온도는 매우 낮고, 따라서
이때의 열에너지는 kT로 표현되므로 아주 작은 값을 갖게 된다. 이러한 상태에서는
핵융합 반응이 일어나지 못하고, 원자끼리 만나면 논제 1-1 에서 계산해본 것과
같이 O-H 따위의 공유결합이 생겨난다. 따라서 빛의 스펙트럼이 성간
물질을 통과하게 되면 적외선 흡수 봉우리를 관찰할 수 있는 것이다. 이와는
달리 별에서는 고온·고압의 상태가 유지되므로, 원자끼리 충돌했을 때 공유결합이
일어나는 것이 아니라, 핵융합이 일어나게 되고, 분자량이 큰 금속원자들이
생성되게 된다. 따라서 별의 대기에는 분자수준의 결합물질이 존재하지 않고
적외선 흡수 봉우리를 관찰할 수 없는 것이다.

<학생 답안 2>

제시문에 주어지지 않은 정보로부터 논의를 전개하여 별빛이 흡수되는 정도를 단순히 온도의 영향이라고 설명하였다. 제시문의 내용을 충실히 이해하였다면 오류를 피할 수 있었을 것이다.

1-2 별빛의 스펙트럼이 성간 구름을 지나올 때와 직접 올 때의 가장 큰 차이점은
적외선 영역에서 흡수 봉우리의 유무이다. 이를 통해 살펴 보면 성간 구름 지역을 거쳐서 온
별빛의 경우 별의 대기에 있는 물질을 뿐만 아니라 '성간 구름의 물질까지 지나서 와서' 흡수 봉우리가 생겼고
그냥 지구를 향해 온 별빛은 별의 대기에 주로 적외선이 흡수되고 않다고 할 수 있다. 그런데 성간 구름을
지나고 안 지나고에 따라 흡수 봉우리가 있고, 없었기 때문에 성간 구름에는 보통 별의 대기가 지니지
않은 S_2, F_2 등의 기체들과 기타 고체들을 가지고 있다고 추론할 수 있다.
그리고 이러한 차이가 나는 이유는 성간지역의 온도가 너무 낮아서 이다. 제시문에서
물질의 열에너지는 다양한 에너지의 합으로 나타낼 수 있다고 하였는데, 그 중 분자의 내부 진동도 들어
가 있다. 따라서 열에너지가 낮으면 진동도 덜하고 없다고 추론할 수 있고, 그로 인해 적외선이
지나가면 잘 흡수할 것이라고 추론할 수 있다. 따라서 흡수 봉우리가 생기는 이유는 보통 별의 온도보다
훨씬 낮은 10K의 온도까지 내려가는 성간 구름지역에서 적외선이 잘 흡수되기 때문이고 결국
이는 온도 때문이라고 할 수 있다.

❑ 논제 2

별 내부에서는 가벼운 원자핵들이 융합하여 새로운 원자핵을 만들어 내는 핵융합 반응을 통하여 에너지가 생성되고 있다. 논제 2에서는 별 내부에서 일어나는 핵융합 반응이 고전물리학의 지식만으로는 설명될 수 없다는 것을 논증하도록 하였다. 그리고 고온 고압 상태에서의 플라즈마를 이해하고 이상기체 모형으로 근사하여 물리학의 기본 법칙 중 하나인 에너지 보존법칙으로 설명하도록 하였다.

논제 2에서 좋은 평가를 받지 못한 경우는 대부분 제시문에 주어진 단위들의 차이를 이해하지 못하여 전혀 다른 개념을 동일시한 잘못을 범한 답안이다. 또한 논제에서 유효숫자 한자리로 근사하라고 요구했으나, 유효숫자의 개념을 이해하지 못하거나 논제의 요구에 주의를 기울이지 않아 이를 지킨 경우가 매우 적었다.

<학생 답안 1>

운동에너지와 위치에너지의 합인 역학적 에너지 보존을 이용하여 쉽게 문제를 해결하였다. 제시문에서 주어진 전기적 반발력이 만들어 내는 위치에너지를 구하고, 태양 내부 온도에 해당하는 양성자의 운동에너지의 합을 구한 후, 이 모든 에너지가 위치에너지로 전환되는 거리를 구하였다. 여기서 구한 거리가 핵융합이 일어날 수 있는

거리보다 훨씬 크기 때문에 고전물리적인 방법으로는 핵융합이 일어날 수 없다는 사실을 잘 설명하고 있으며, 논제에서 유효숫자 한자리로 근사하라고 요구한 점도 잘 따른 답안이다.

논제2)

전기력(F)에 의한 위치 에너지(U)를 구하면 다음과 같다.

$\frac{dU}{d\vec{r}} = -\vec{F}$, ∴ $dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$ 에서 양성자가 멀어지는 경우에는 $\vec{F}$와 $d\vec{r}$의 방향이 같기 때문에 (r_0에서 무한히 멀리 이동)

$$\int_{U_{r_0}}^{U_\infty} dU = \int_{r_0}^{\infty} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{r_0}^{\infty} |\vec{F}||d\vec{r}|\cos 0^\circ = -\int_{r_0}^{\infty} F\,dr$$ 이다. ($|\vec{F}| = F$, $|d\vec{r}| = dr$)

$$-\int_{r_0}^{\infty} F\,dr = -\int_{r_0}^{\infty} \frac{B}{r^2}\,dr = -\left[\frac{B}{r}\right]_{r_0}^{\infty} = -\frac{B}{r_0}$$ (B는 전기력상수)

∴ $\Delta U = -\frac{B}{r_0}$ 이다.

무한히 먼 곳에서는 전기력이 작용하지 않기 때문에 무한히 먼곳에서의 위치에너지는 0이라고 할 수 있다.

즉, $\Delta U = U_\infty - U_{r_0} = -\frac{B}{r_0} = -U_{r_0}$ 라고 할 수 있다.

∴ $U_{r_0} = \frac{B}{r_0}$ (U_{r_0}는 현 위치(r_0)의 위치 에너지)

U_r와 E_k(운동에너지)의 합은 에너지 보존법칙에 의해 그 값이 항상 일정하다. ($U_r + E_k = 1$(상수))

즉, $U_{r_0} + E_{k(r_0)} = \frac{B}{r_0} + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{B}{r_0} + \frac{3}{2}kT$ 은 제시문의 초기조건에 관한 식이므로 제시문의 초기조건을 대입하면

$$U_{r_0} + E_{k(r_0)} = \frac{9\times1.6^2\times10^{-29}}{2\times10^{-11}} + \frac{3}{2}\times1.4\times10^{-23}\times1.6\times10^{7}$$
$$\fallingdotseq 12\times10^{-18} + 3.2\times10^{-16}$$
$$= 3.32\times10^{-16}(J)$$ 이므로

에너지의 총합은 항상 $3.32\times10^{-16}(J)$ 이다. ($U_r + E_k = 3.32\times10^{-16}$)

양성자가 반발력에 의해 되돌아가기 시작하는 위치는 속도가 0이 되는 위치이므로 $U_r = 3.32\times10^{-16}$ 이 되는 위치를 구하면 된다. ($E_k = 0$이 되므로)

$$U_r = \frac{9\times1.6^2\times10^{-29}}{r} = 3.32\times10^{-16}$$

$$\therefore r = \frac{9\times1.6^2\times10^{-29}}{3.32\times10^{-16}} \fallingdotseq 7\times10^{-13}(m)$$

즉, 7×10^{-13}m인 위치에서 되돌아간다.

핵력이 작용하려면 1×10^{-15}m 정도로 가까워져야 하는데 고전물리적인 방법, 즉 양성자의 속도를 높여 충돌시키는 방법으로는 온도가 매우 높은 태양에서조차 7×10^{-13}m 까지 밖에 가까워지지 못하므로 고전물리적인 방법으로는 핵융합이 일어나지 못한다. (1×10^{-15}m는 가까워져야 강한 핵력이 작용하기 때문에 그 인력에 의한 핵자간 결합이 일어날 수 있다)

<학생 답안 2>

양성자의 운동에너지와 전기적 반발력을 등호로 연결하여 에너지와 힘이라는 전혀 다른 물리량을 동일시하는 잘못을 범하였다. 이 같은 경우는 제시문에 주어진 단위들에 주의를 기울였다면 충분히 확인할 수 있는 것으로 자연과학에서 단위의 중요성을 말해주는 예라고 할 수 있다. 아래 답안과 같이 실제로 여러 학생들이 단위에 주의를 기울이지 않아 유사한 잘못을 범하였다.

<논제 2>

두 양성자 간의 거리를 rm라고 할 때, 둘 간에 작용하는 전기적 척력의 크기는

$$\frac{9\times(1.6)^2\times10^{-29}}{r^2}\ N$$

이다.

서로를 향해 다가가던 양성자가 상호 반발력에 의해 되돌아가는 지점은 양성자의 운동에너지와 양성자가 받는 전기력의 크기가 일치하는 지점이다.

양성자를 고전적인 기체분자로 생각할 때, 양성자의 평균 운동속도 $V=\sqrt{\frac{3kT}{M_H}}$ 이므로,

양성자의 운동에너지는 $\frac{1}{2}M_H v^2 = \frac{1}{2}\times M_H \times \frac{3kT}{M_H} = \frac{3}{2}kT$ 이다.

k는 볼츠만 상수로 1.4×10^{-23} J/K 이며, 태양 내부의 온도 T는 약 1.6×10^7K 이므로

양성자의 운동에너지는 $\frac{3}{2}\times1.4\times10^{-23}\times1.6\times10^7$J $= 3.36\times10^{-16}$J 이 된다.

양성자가 받는 전기적 척력의 세기가 운동에너지와 같을 때,

$$\frac{9\times(1.6)^2\times10^{-29}}{r^2} = 3.36\times10^{-16}$$

$$\rightarrow r^2 = \frac{48}{7}\times10^{-13}$$

핵자들 간 핵력이 작용할 수 있는 거리는 1×10^{-15}m 정도인데, 상호간의 반발력에 의해 양성자가 멀어지기 시작하는 거리가 1×10^{-15}m보다 크다.

그러므로 양성자 간의 핵력이 작용하지 못하기 때문에 고전물리적인 방법으로는 핵융합이 일어날 수 없다.

❑ 논제 3

철보다 무거운 원자핵의 생성과정은 아직도 의문으로 남아 있다. 논제 3에서는 별 내부에서의 핵반응이 철 원자핵까지만 진행한다는 것을 원자핵의 성질로부터 정성적으로 추론하도록 하였다. 또한 인류가 원자핵 에너지를 이용할 수 있는 두 가지 원리(핵분열, 핵융합)를 통해 미래의 에너지 문제를 생각해 볼 수 있는 기회를 제공하였다.

<학생 답안 1>

제시문에 주어진 그래프와 태양에서 핵융합이 일어날 때 방출되는 에너지 값을 참고하여, 핵반응에서는 반응 전후 원자핵들의 결합에너지의 차이에 해당하는 에너지가 방출되거나 흡수된다는 점을 도출할 수 있다. 아래 답안은 결합에너지를 중력에 의한 위치에너지로 비유하여 결합에너지가 최대인 철이 가장 안정된 원자핵이라는 사실을 정확하게 추론하였다. 같은 원리로 우라늄과 같은 무거운 원자핵은 분열을 통하여 에너지를 방출할 수 있어 인류는 핵융합 또는 핵분열 과정에서 방출되는 에너지를 이용할 수 있다는 사실을 잘 설명하여 좋은 평가를 받았다.

논제3 핵력을 중력에 대응시키면 중력과 중력에 의한 위치에너지 관계를 생각했을 때, 핵자당 결합에너지가 크다는 것은 중력이 강하게 속박되어 있는 것에 대응되므로 위치에너지는 낮다고 생각할 수 있다. 그림1을 보면 철이 핵자당 결합에너지가 최대이므로 철이 가장 안정할 것으로 추측할 수 있다.

이를 조금더 구체적으로 살펴보자. 제시문(가)를 보면 핵 반응시 반응 전후 원자핵들의 결합에너지 차이에 해당하는 에너지가 방출되거나 흡수됨을 알 수 있다. 핵 끼리 반응할 때 양성자와 중성자는 생기거나 없어지지 않으므로 반응물의 핵자 수와 생성물의 핵자 수는 같게 된다. 핵자당 결합에너지가 E이고 핵자 수가 A이면 전체 결합 에너지는 AE가 되므로 핵반응시 출입하는 에너지는 $A(E_2-E_1)$ - (E_2 : 생성물의 핵자당 결합에너지, E_1 : 반응물의 핵자당 결합에너지) 가 된다. 이 때 $E_2-E_1>0$이면 에너지가 방출되고 $E_2-E_1<0$이면 에너지가 흡수되므로 질량이 작은 원소에서 철로 갈때 에너지를 점점 방출해 철의 에너지가 가장 낮아진다. 자연은 에너지가 낮은 안정적인 쪽으로 반응이 진행되므로 별에서 핵융합은 철 원자핵의 생성까지만 진행된다고 생각할 수 있다.

그래프를 보면 철 이전, 이후는 핵자당 결합에너지가 철보다 작기 때문에 핵반응을 시킬 때 어떤 원소가 철에 가까운 부근의 원소가 될 때 에너지를 방출할 것이고, 그 에너지를 인류가 이용할 수 있다.

즉, 철보다 질량이 작은 원소(2개)를 핵융합시키거나 큰 원소(1개)를 핵분열시키는 방법이 있다. 핵융합시킬 때는 아까 살펴보았듯이 양성자의 척력을 이겨내야 하므로 척력 $F=\frac{kq_1q_2}{r^2}$에서 전하량 q가 작은 H를 이용하는 것이 반응을 일으키기 쉬울 것이다.

<학생 답안 2>

이 답안은 제시문에서 주어진 결합에너지의 개념을 제대로 이해하지 못하고 있다. 철보다 더 무거운 원자핵의 경우도 핵융합과정을 통하여 만들어 낼 수는 있지만, 에너지를 필요로 하는 흡열반응이어서 자연적으로는 일어날 수 없다는 사실을 도출해 내지 못한 대표적인 예이다.

[논제 3] [그림1]을 보면 핵자당 결합에너지는 Fe, 즉 철 원자핵인 경우에 최대가 되고 이보다 질량수가 커지게 되면 더 이상 핵융합으로 생성할 수 없다. 이는 양성자들이 원자핵 속에서 서로 매우 가까운 거리에 있을 때 작용하는 전기적 반발력 때문인데, 철보다 질량수가 작은 원자들의 경우에는 양성자들이 반발력을 받더라도 원자핵 속에 계속 결합되어 있을 수 있게 하는 핵력이 반발력보다 커서 양성자들이 흩어지지 않고 결합해 있을 수 있다. 그러나 철보다 질량수가 큰 원자들의 경우에는 반발력이 핵력보다 커지기 때문에 양성자와 양성자를 결합하여 핵융합시킬 수가 없다. 따라서 별에서의 핵융합 반응은 철 원자핵까지만 진행된다.

인류가 핵에너지를 이용할 수 있는 방법에는 크게 2가지가 있는데, 핵융합 발전과 핵분열발전이 그것이다. 핵융합발전이란, 별의 핵융합과정을 모방하여 양성자들을 충돌시켜 융합하여 전기에너지를 생산하는 방법으로서 원자의 질량이 변하면서 그 때 변화한 질량이 에너지로 변하는 원리($E=mc^2$)를 이용한 것이다.

다른 하나의 방법인 핵분열발전은 질량수가 매우 큰 우라늄과 같은 물질을 온도에 따른 기체 확산법을 이용해 고농축하여 초기에 에너지를 가해 우라늄 핵을 분열시켜 에너지를 얻는 방법으로, 과정은 핵융합 발전과 반대이지만 원리는 원자의 질량변화로 인한 에너지를 얻는 ($E=mc^2$) 것으로 동일하다.