2009학년도 정시모집 논술고사
자연계열 문항설명 및 채점총평

2 0 0 9 . 5 . 1 8

서울대학교 입학관리본부

2009학년도 정시모집 논술고사 (자연계열)

Ⅰ. 시행 개요

1. 개념 및 성격

◦ 우리 대학교에서 지향하는 논술고사는 개별 교과 지식의 무조건적 수용이 아닌 교과 영역간의 전이과정에서 발현되는 통합적, 창의적 사고력을 측정하는 시험

◦ 특정 교과에 담긴 지식의 무조건적 암기 여부를 평가하는 결과 중심형 시험이 아니라, 고등학교 교과과정에 나와 있는 내용을 토대로 다각적이면서도 심층적인 사고 과정을 통해 문제 상황을 재구성하여 창의적으로 문제를 해결하는 과정과 논리적으로 서술하는 능력을 측정하는 과정 중심형 시험

◦ 통합교과라는 개념은 교과와 교과의 기계적 통합이 아닌, 고등학교 교육과정을 통하여 학생의 내면에서 길러지는 통합적 사고력을 의미함. 따라서 통합교과형 논술을 대비하는 바람직한 방법은 교과별로 분리되어 이루어지는 학습이 아니라, 서로 다른 교과들에서 얻어진 지식을 넘나들며 소통하는 자기주도적 학습을 통해 지식의 영역전이 능력을 갖추는 것이 바람직함. 이와 더불어 개별 교과의 수업이 단순 문제 풀이식이나 일방적인 주입에서 벗어나, 학생들과 상호 소통하며 사고력을 신장시키는 교실 교육의 변화가 필요함.

2. 시행

◦ 대상: 자연계열 모집단위 1단계 합격자
◦ 자연계열 모집단위
  · 문항 수: 4문항
  · 고사시간: 300분(1, 2번 문항 150분; 3, 4번 문항 150분)
  · 답안분량: 논제별로 답안 분량 제한은 없음(연필 사용 허용)

3. 출제 방향 및 취지

2009학년도 논술에서 가장 중요하게 고려하였던 점은 2008학년도 논술고사와 출제 방향을 동일하게 유지하되, 통합교과형 논술이 단순히 교과간의 통합이 아니라 사고력의 통합이라는 점을 강조하면서 우리 대학교 논술의 외연을 넓힐 수 있는 가능성을 함께 모색하는 것이었다. 기본적인 출제방향은 이미 2005년에 예고했던 바와 같이 1) 고등학교 교과서 지문과 주제 활용, 2) 사교육을 통해 급조되거나 암기된 지식이 아니라 공교육을 통해 길러지는 비판적 사고력과 창의적 문제해결능력 측정, 3) 교육과정의 정상적인 운영을 통한 공교육의 질적인 향상에 기여한다는 것이었다.

지식기반사회에서 가치를 만들어내는 중심은 얼마나 많은 지식을 암기하고 있느냐가 아니라, 이미 습득한 지식을 통합하여 비판적-창의적 사고를 통해 주어진 문제 상황을 합리적으로 해결하는 능력에 있다고 할 수 있다. 따라서 논술은 교과 지식의 단순 반복 학습과 암기 위주의 교육에서 벗어나 학생 스스로 탐구하는 자기주도적 학습능력과 독서·토론을 통한 사고능력의 배양을 지향함으로써 학교 교육의 정상화를 유도한다는 취지를 갖고 있다.

이에 따라 교과서의 내용을 논술 문항의 제시문이나 논제로 최대한 활용하여 학교 수업 과정에서 학생 스스로 충분히 준비할 수 있도록 출제하였다. 인문계열에서는 다양한 교과 영역을 아우르면서도 교과서의 내용에 대하여 비판적으로 사고할 수 있도록 유도하는 문제를 출제하였으며, 문항에 따라 필요한 경우 관련된 자료를 제시하였다.

4. 평가기준

구 분	평 가 내 용 및 기 준
지시사항 불이행 (과락)	· 필기구 종류 위반(두 종류 이상의 필기구 사용) · 응시자의 신원노출
개념과 원리의 이해·분석·구성능력 (이해·분석력)	· 제시문의 내용, 수식, 도표에 대한 해석 및 변환 능력 · 논제와 관련된 수리적, 과학적 개념과 원리에 대한 식별 및 인지 능력 · 개념의 정의와 원리에 대한 정확한 이해력 · 수리적, 과학적 상황에서 변인과 대상 사이의 관계 설정 능력
통합적 추론 능력 (논증력)	· 수리적, 과학적 개념과 원리의 통합력 - 과학적 결과를 도출하기 위한 수리적 과정의 적용 - 수학과 과학의 서로 다른 영역에 속한 개념들의 연결 · 구성 조직 및 모형화 능력 - 주어진 자료와 변인을 고려한 설명 모형 설계 - 실험 설계에 나타나는 귀납적, 연역적 사고 과정 - 모형으로 현상을 설명하고 결과를 예측 · 근거 설정 및 일반화 능력 - 증거와 과학적 개념에 기초한 추론 - 원인과 결과의 논리적 타당성
창의력	· 심층적인 논의 전개 - 가설, 문제해결 과정, 탐구한 결론에 대한 비판적 평가 - 명시적으로 주어진 조건을 뛰어 넘는 새로운 결론 유추 · 다각적인 논의 전개 - 발상이나 관점의 전환 - 대안적 문제해결 방법에 대한 모색 · 영역전이적인 논의 전개 - 결론으로 도출된 원리를 새로운 상황에 적용 - 일상 속에서 개념과 원리가 적용되는 사례 발견 및 활용
의사소통 능력 (표현력)	· 시각화 - 문제해결 과정을 도표, 모형, 그림 등을 통해 표현 · 수식화 - 문제해결 과정이나 결론을 수식으로 표현 · 표현의 적절성 - 문장표현의 간결성 및 맞춤법

❑ 총평

과학 탐구에서는 논리적 엄밀함과 더불어 사물에 대한 직관력도 매우 중요하다. 의미 있는 과학적 발견들이 자연현상에 대한 직관적인 예측에서 시작하여, 관찰된 사실을 토대로 이를 엄밀하게 확인하는 과정을 통해 이루어졌기 때문이다. 직관적인 예측을 확인하는 과정에서 활용되는 관측 사실은 도표, 그림, 수치 등 다양한 방식으로 표현될 수 있다. 이렇게 다양한 방식으로 표현되는 사실의 의미를 이해할 수 있어야 과학적 탐구는 가능하다. 이는 대학 입학 후 자연과학 및 그 응용학문을 수학하는 데 있어서 기본적으로 요구되는 능력으로서, 이번 논술고사는 이러한 능력을 평가하는 데 주안점을 두었다. 또한 고등학교별 교육과정의 차이로 학생별로 이수한 과목이 다를 수 있다는 점을 염두에 두고 논제를 해결하는 데 필요한 설명과 정보를 제시문에서 충분히 제공하였으며, 논의 전개가 주어진 내용으로부터 도출 가능한 범위인지를 고려하여 평가하였다.

출제된 네 문항은 공통적으로 **주어진 설명, 관측 자료 등에 대한 이해와 분석을 토대로 통합적인 추론을 요구하는 논제**들로 구성되었다. 그러나 학생들은 주어진 자료를 꼼꼼히 읽고 해석하기에 앞서 각 논제를 해결하는 데 더 급급했던 것으로 보인다. 그러다보니 논제의 핵심을 놓치거나 논제가 요구하는 논의전개 범위와 상관없이 작성된 답안들이 있었다. 많은 논제가 제시문에 주어진 자료를 활용하여 유추할 수 있음에도 불구하고 이에 대한 활용 정도는 학생별로 차이가 컸다. 주어진 내용이나 자료를 논의 전개의 과정에서 사용하는 경우에도 논제와 연결시키는 데는 소홀한 경우도 많았다. 주어진 내용을 반복적으로 언급하는 것은 논제의 핵심에 대한 충분한 설명이 될 수 없다. 논술고사에서는 **도출된 결론 자체 보다는 결론을 도출하는 과정에서 어떤 논거로 논의를 전개하느냐가 더 중요**하기 때문에, 제시문이나 논제에서 주어진 정보를 논의 전개에 맞게 활용하는 경우에도 반드시 해당 논제의 핵심과 연결고리를 찾아내려는 시도가 필요하다.

또한 논제 자체의 본질을 이해하기 보다는 각 문항에 사용된 설명 내용이나 개별 논제만으로 '과목'을 구분하여 접근하고 있다는 점은 여러 답안에서 공통적으로 발견되었던 아쉬운 부분이다. 실제로 조금만 더 유연하게 사고하면 쉽게 접근할 수 있는 논제를 화학인지 물리인지 분야를 구분한 후 해당 분야의 범주 내로 국한시켜 논의를 전개함으로써 논제와 상관없는 설명이 되거나 잘못된 논리를 전개한 경우가 있었기 때문이다. 출제의도에서도 밝혔듯이 **각 논제들은 통합적 추론을 요구하고 있기 때문에 겉으로 보여지는 '과목'에서 벗어나 종합적인 사고를 통해 문제를 해결할 필요**가 있다. 이러한 능력은 단기간에 만들어 질 수 있는 것이 아니다. 따라서 앞으로 논술고사를 준비하기 위해서는 자기 주도적인 학습을 통해 학생 스스로 생각할 수 있는 사고력을 기르는 것이 가장 중요하다. **교과서의 내용을 단순 암기하는 것이 아니라, 그 내용에 대한 비판적 성찰과 기본 원리나 개념에 대한 충분한 이해를 바탕으로, 상황에 따라 적절히 적용하거나 재구성할 수 있는 유연하고 깊이 있는 사고력을 배양**해야만 논제를 해결할 수 있다.

논술고사의 답안 작성에 있어서 수려한 문장력이나 작문능력이 필요한 것은 아니

지만, 자신의 생각을 논리적이고 정확하게 표현하고 전달할 수 있도록 기본적인 어법은 맞추어야 한다. 또한 답안지의 글씨를 알아보기 어려운 경우도 있었다. 기본적인 어법이나 알아볼 수 있는 글씨와 같은 최소한의 요건을 갖추지 못해 좋은 평가를 받지 못할 수 있으므로 좀 더 세심한 주의가 필요하다.

Ⅱ. 자연계열 문항설명 및 학생답안

※ 예시된 답안은 문항에 대한 이해를 돕기 위해 실제 학생들의 각 논제별 답안을 조합한 가상의 답안임

【문항 1】

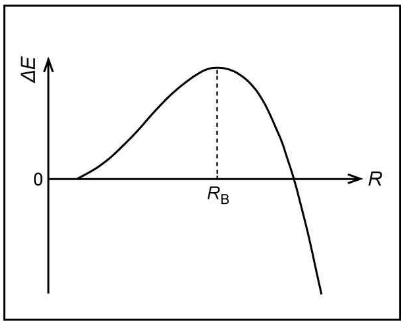
✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가)

물은 지표 위에서 가장 풍부한 물질이다. 지구 표면의 약 72%가 바다로 덮여 있고, 그 밖에 빙하, 호수, 강, 지하수, 대기 중의 모든 곳에 물이 존재한다. 지구를 푸른 행성이라 부를 수 있는 것은 지구상에 땅보다 물이 많기 때문이다. 우주 공간에는 거의 없는 물이 지구에 풍부한 것은 지구상에 생명체가 번성할 수 있는 필수적인 조건이 된다. 이와 같이 물은 모든 생물들을 이루는 주요 구성 성분으로, 만약 물이 없다면 지구상의 생물은 존재할 수 없을 것이다. 사람의 몸은 약 70%가 물로 구성되어 있다. 여기에서 1~2%만 잃어도 심한 갈증과 괴로움을 느끼게 되고, 5%정도 잃으면 혼수상태에 빠지게 되며, 12%이상 잃으면 생명을 잃게 된다.

물 분자는 수소 원자 2개와 산소 원자 1개로 이루어져 있다. 산소 원자와 수소 원자는 각자의 전자를 내놓아 전자쌍을 만들고, 이 전자쌍을 서로 공유함으로써 결합하고 있다. 이때 전자쌍은 산소 원자 쪽으로 치우쳐 있기 때문에, 물 분자는 극성을 가지고 있다. 이러한 극성으로 인하여 물에서는 산소 쪽의 (-) 전하와 이웃 물분자의 수소 쪽의 (+) 전하 사이에서 서로 잡아당기는 힘이 발생한다. 이를 수소결합이라고 하며, 수소결합 에너지는 약 18kJ/mol로 알려져 있다. 이러한 수소결합에 의해 물은 매우 독특한 성질을 보여주고 있다. 분자량이 같은 다른 액체들에 비해 높은 녹는점, 끓는점, 비열, 용해력을 가지고 있다. 물의 밀도는 약 1g/mL이며 비열은 4.2J/g℃, 응고열은 6.0kJ/mol, 기화열은 40.7kJ/mol이다. 또한 1기압에서의 녹는점은 0℃이고 끓는점은 100℃이다. (화학 1 교과서)

대기 중에서 수증기가 과포화되면, 수증기는 더 안정한 물의 상태로 변환하는 것이 에너지 측면에서 유리하다. 이때, 수증기 분자가 서로 결합하여 물방울로 변환 될 때의 에너지는 $\Delta E = -nVkT\log(P/P_S)$로 주어진다. 여기서 n은 단위부피당 물 분자의 수, V는 물방울의 부피, P는 대기의 수증기 분압이고, P_S는 포화 수증기 분압이다. 대기 중에서 생성된 물방울은 물의 표면장력에 의해 구의 형태를 가지게 된다. 생성된 물방울이 작을 때에는 다시 증발하여 수증기가 되어 계속적으로 응결 및 증발을 되풀이 한다. [그림 1]은 물방울 생성 에너지 ΔE를 물방울의 반경 R의 함수로 개략적으로 보여주고 있다.



[그림 1]

(나)

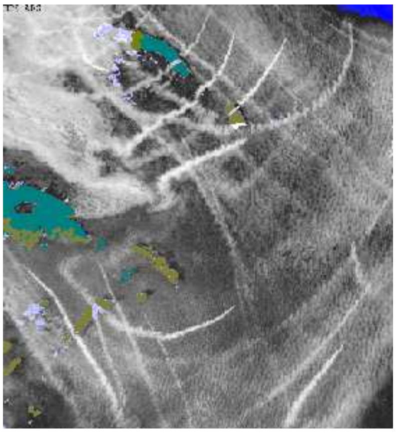
자연 상태의 공기 속에는 해수면으로부터 올라간 충분한 양의 해염 입자가 존재한다. 해염 입자가 물방울에 용해되면 물방울의 표면장력은 증가하고 증기압력은 감소하는 현상이 발생한다. 이때 작은 물방울의 경우 표면장력 증가보다 증기압력 감소의 효과가 더 크게 나타난다. 물의 증기압력 감소 현상은 아래와 같이 설명될 수 있다. 같은 크기의 그릇에 순수한 물과 소금물을 같은 양씩 넣고, 방치한 후 비교하면 순수한 물이 더 빠르게 줄어드는 것을 관찰할 수 있다. 소금과 같은 비휘발성 용질이 물에 용해되면 용질 입자가 용액 표면의 일부를 차지하여 표면에서 증발하는 용매 분자의 수가 순수한 용매의 경우에 비해 줄어든다. 따라서 같은 온도에서 소금물의 증기압력은 순수한 물의 증기압력보다 작으며, 소금과 같은 비휘발성 용질의 농도가 진할수록 증기압력은 작아지는데, 이러한 현상을 증기압력 감소 현상이라고 한다. (화학 2 교과서)

자연 상태에서 단열냉각에 의해 구름이 생성되기 위해서는 수증기를 포함한 공기가 상승해야 한다. 공기의 상승에 따라 온도가 감소하고 이에 따른 포화수증기압이 감소하게 되어 응결이 일어나게 된다. 하지만 순수한 수증기만으로 응결이 일어나기 위해서는 상대 습도가 400% 이상 되어야 한다. 대기 중에 구름이 있다고 해서 항상 강수 현상이 뒤따르는 것은 아니다. 구름 입자는 평균적으로 지름이 0.02mm이고, 구름으로부터 낙하할 수 있는 빗방울의 최소 지름이 약 2mm정도이다. 따라서, 구름 입자가 모여서 하나의 빗방울로 성장하기 위해서는 지름이 100배 커져야 하므로 100만 개의 구름 입자가 합쳐져야 한다. 중위도와 고위도 지방의 구름은 0℃ 이하의 온도를 갖는 상층부에 빙정과 과냉각 물방울을 같이 가지고 있는데 같은 온도에서 빙정에 대한 포화수증기압이 과냉각 물방울의 포화수증기압 보다 작다. 이런 이유로 과냉각 물방울에서 증발한 수증기가 주위의 빙정에 달라붙어 빙정이 성장하게 된다. 빙정이 점점 커지고 무거워지면 눈으로 내리게 되고, 내리다가 녹으면 비가 된다. 하지만 열대 지방이나 여름철 중위도 지방에서 만들어지는 구름 속에는 빙정이 존재하지 않고 물방울로만 있는 경우가 많다. 0℃ 이상의 구름 속에서는 서로 크기가 다른 물방울들이 존재하며, 크기에 따라 낙하 속도와 상승 속도가 다르다. 따라서 물방울들은 서로 충돌하여 합쳐지면서 큰 빗방울로 성장한다. (지구과학 1 교과서)

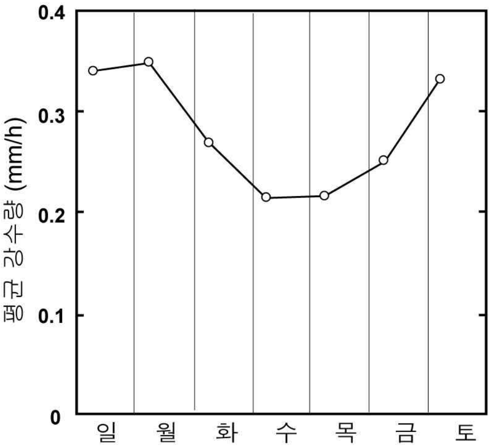
(다)

인류 문명의 발달과 더불어 자연 상태의 많은 변화가 일어났는데 그 중 하나가 대기오염이다. 주된 원인은 인간에 의한 화석연료의 사용이며 산업혁명 이후 그 사용이 계속적으로 증가되어 왔다. 1952년 영국 런던에서는 4000여명에 달하는 사람들이 스모그 현상으로 인하여 사망하였다. 이는 석탄 사용으로 대기 중의 이산화황이 증가하고 이로부터 생성된 작은 입자들이 인간의 호흡기관에 심각한 피해를 가져왔기 때문이었다. 화석연료의 사용은 대기 중으로 많은 오염 기체를 방출할 뿐만 아니라 이러한 기체들은 화학반응을 통해 작은 알갱이로 변환된다. 인위적으로 생성된 입자들은 자연 발생적인 토양 입자, 소금 입자 등보다 훨씬 크기가 작다. 이런 입자들은 인간의 호흡기에 훨씬 더 큰 영향을 끼칠 뿐만 아니라 햇빛을 산란시켜 시정을 저하시키고 자연적으로 발생한 해염 입자와 마찬가지로 구름 생성에 영향을 끼친다.

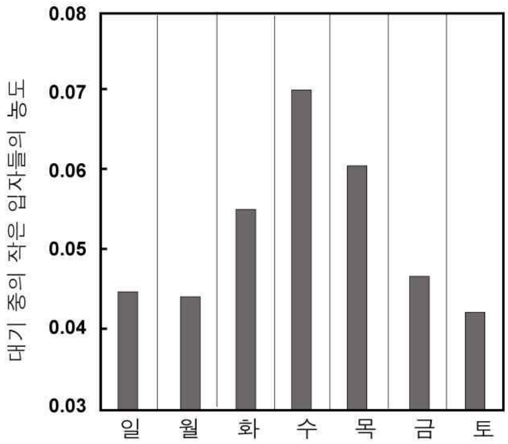
지구상의 여러 가지 자연현상들은 주기성을 가지고 있다. 그 예로서 지구의 자전에 의한 하루 동안의 온도변화, 공전에 의한 일 년 동안의 계절변화 등이 있다. 최근 들어 이러한 주기성이 인간의 활동에 의해서 영향을 받고 있다. 인간의 화석연료 사용으로 인해 지구 온난화 현상이 일어나고, 우리나라도 과거에 비해 겨울철이 짧아지고 여름철이 길어지는 현상들이 기상청 자료 분석을 통해 확인되고 있다. 근래 과학자들은 [그림 3]의 예와 같이 세계 곳곳에서 관측된 자료의 분석을 통해 지구의 자전 및 공전 등의 자연현상만으로는 설명하기 힘든 새로운 주기현상에 대해 이해하고자 연구하고 있다.



[그림 2] 인공위성에서 찍은 해양의 구름사진.
하얀 선들은 운항하는 선박을 따라 생기는 구름으로 구름입자의 크기가 주변의 구름보다 훨씬 작다.



[그림 3-1] 미국 동부 해안지역의 여름철 강수자료



[그림 3-2] 미국 동부 뉴욕시의 여름철 대기 중 작은 입자들의 농도 변화

논제 1. 제시문에 설명된 물의 성질로부터 물에는 표면장력이 존재함을 논술하고, 표면장력 σ의 크기를 추정하시오. (표면장력은 단위 면적당 에너지로 주어진다.)

논제 2. 물방울의 반경과 생성에너지가 [그림 1]이 나타내는 관계를 가지는 이유를 추론하고, 이러한 형태의 에너지 함수가 물방울 성장에 미치는 영향에 대해 설명하시오.

논제 3. 대기 중 해염 입자가 구름 생성에 미치는 영향을 설명하고, [그림 2]에서와 같이 구름이 생성되는 이유를 추론하시오.

논제 4. 제시문 (나), (다)의 내용을 참고하여 인간의 활동이 강수 현상에 어떤 변화를 가져 올 수 있는지 논술하시오. (단, 구름을 만드는 수증기 양이 변하지 않는다고 가정한다.)

❑ 출제의도 및 문항설명

물은 지구상에서 생명체가 생길 수 있는 환경을 만들어 줄 뿐만 아니라, 인간을 비롯한 생명체의 주요 구성성분이다. 지구상의 물은 기권, 수권, 암권, 생물권으로 계속 순환하고 있으며, 순환과정에서 각기 수증기, 물, 얼음 등 다른 형태로 존재한다. 문항 1에서는 고등학교 과학 교과서가 다루고 있는 물의 물리·화학적 원리에 대한 이해를 토대로, 물의 순환과정 중 하나인 대기에서의 구름생성 및 강수현상에 이 원리를 적용하도록 하였다. 그리고 제시문의 내용을 적절히 활용하여 인간의 활동이 이러한 자연적인 현상에 어떤 변화를 줄 수 있는지에 대하여 분석하고 과학적인 논리 전개를 통해 결론을 도출할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

❑ 출전 및 참고 교과서

제시문은 다음과 같은 내용으로 구성되어 있다.

◦ (가)에서는 물 분자가 가지는 수소결합과 수증기가 물로 변하는 과정에서의 에너지 변환에 대해 설명하였다. (천재교육, 화학 Ⅰ 14쪽, 18~19쪽)
◦ (나)에서는 물의 증기압력 내림현상에 대한 소개와 대기에서의 수증기 응결 및 구름생성에 대한 기본원리를 제시하였다. (중앙교육, 화학 Ⅱ 70~71쪽; 천재교육, 지구과학 Ⅰ 97~100쪽)
◦ (다)에서는 인간 활동에 의한 환경오염의 한 예와 이것이 자연적인 구름생성 및 강수현상에 끼치는 몇 가지 자료를 제시하였다.

❑ 학생답안

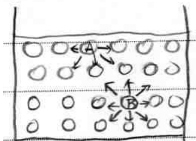
▪ 논제 1
표면장력의 개념을 이해하고, 이로부터 물 분자의 수소결합 세기와 표면장력의 크기와의 연관성을 추론하도록 하였다.

물은 물 분자끼리 작용하는 수소결합에 의해서 서로 끌어당기는 힘이 존재하는데, 물 내부에서는 이러한 힘들이 모든 방향으로 작용하여 서로 상쇄된다. 그런데 물의 표면에서는 바깥쪽으로 향하는 힘이 없어 내부적으로 끌어당기는 힘만이 작용하는데 이를 표면장력이라고 한다. 아래 예시된 답안처럼 많은 학생들이 이를 정확히 이해하고 설명하였다. 그러나 단순히 "수소결합이 존재함으로 표면장력이 생긴다"라고 설명한 경우도 있었는데, 이는 주어진 논제에 대한 충분한 설명이 되지 않는다.
또한 표면장력이 단위면적당 주어지는 에너지라는 사실에 기초하여 대략적인 표면장력을 추정하도록 요구하였다. 아래의 예시 답안과 같이 제시문 (가)에 주어진 수소결합 에너지 18kJ/mol을 단위 부피당 수소결합 에너지로 구하고, 여기에 물 분자의 대략

적인 크기를 곱하여 단위 면적당 수소결합 에너지를 계산하면 표면장력을 추정할 수 있다. 그러나 이런 방식이 아니더라도 명확한 논리로 단위 면적당 수소결합 에너지를 추론한 답안은 추론 과정을 평가에 고려하였다.

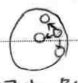
◦ 답안 1

논제1) 제시문 (가)에 의하면 물분자 사이에는 수소결합이라는 힘이 존재한다. 이 때, <그림 A>



<그림 A>

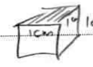
에서 물 속에 있는 분자(B)는 모든 방향으로 힘을 받으므로, 받는 힘은 0이다. 그러나, 물 표면에 있는 분자(A)는, 위쪽 방향으로의 인력을 받지 않으므로, 아래쪽 방향의 합력을 받으며, 이 힘이 표면 장력이다. 표면 장력에 의해 물분자들은 안쪽으로 힘을 받으므로, 물방울이 동그랗게 되는 현상 등을 설명할 수 있다.


<동그란 물방울>

표면 장력 σ는 단위 면적의 물분자의 수소 결합을 모두 끊는 데 필요한 에너지이다.

물 1 mol의 수소결합을 모두 끊는 데 필요한 에너지는 제시문으로부터 18 kJ 이다.

물의 밀도가 1g/ml 이므로, 1 ml 당 1g, 즉 $\frac{1}{18}$ mol $= \frac{1}{18} \times 6.0 \times 10^{23}$ 개의 물분자가 있는 것이다.



1 ml

왼쪽과 같은 정육면체 모양의 비엑을 생각하면, 정육면체의 한 변의 물분자의 개수를 a개라 하면

$a^3 = \frac{1}{18} \times 6.0 \times 10^{23} = 3.3 \times 10^{22}$ 이다. $a ≒ 3.2 \times 10^{7}$ 이고 한 면 ($1cm^2$) 에는

$a^2 = 1.0 \times 10^{15}$ 개 $= \frac{1.0 \times 10^{15}}{6.0 \times 10^{23}}$ mol $= 1.7 \times 10^{-9}$ mol의 물분자가 있는 것이다. 그러므로

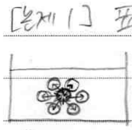
$1\,m^2$에는 $\frac{10000\,cm^2}{1\,m^2} \times 1.7 \times 10^{-9}\,mol/cm^2 = 1.7 \times 10^{-5}\,mol/m^2$ 의 물분자가 있고,

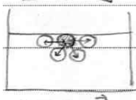
물의 수소결합 에너지가 $18\,kJ/mol = 1.8 \times 10^4\,J/mol$ 이므로 $1\,m^2$의 물의 수소결합을 모두 끊는 데 드는

에너지, 즉 표면 장력은, $\sigma = 1.8 \times 10^4\,J/mol \times 1.7 \times 10^{-5}\,mol/m^2 = 0.31\,J/m^2$ 으로 추정된다.

◦ 답안 2

[논제 1] 표면장력은 액체가 그 표면적을 최소화하려는 힘이다. 액체상태에서도 분자간에는 인력이 작용하므로 내부의 임의의 분자는 주변의 모든 분자와 인력을 주고받는다. 그리고 이 모든 방향에서의 힘들의 벡터합은 0이 되어 평형을 이룬다 [그림 1]. 그러나 표면에 있는 임의의 분자는 [그림 2]에서와 같이 주고받는 인력의 방향이 모든 방향이 아니다. 따라서 이 분자에 작용하는 알짜힘은 액체 내부 방향이 되며, 이 힘이 표면장력으로 작용한다.

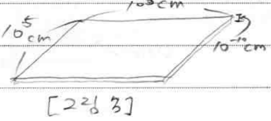

[그림 1]


[그림 2]

그러므로 표면장력이 존재하기 위해서는 분자간의 인력이 존재해야 한다. 분자간의 인력으로 작용하는 힘은 여러 가지가 있는데, 제시문 (가)에서 물 분자간에는 수소결합이라는 인력이 존재함을 알 수 있다. 따라서 물은 표면장력을 가진다.

이러한 물의 표면장력 σ의 크기는 다음과 같은 방법으로 추정해 볼 수 있다. 우선 물분자간의 인력이 제시문의 수소결합 뿐이라고 가정하면 그 에너지는 18kJ/mol 이다. 물 분자 1몰은 18g 이므로 이는 $18kJ/18g = 1kJ/g$ 으로 쓸 수 있고, 물의 밀도가 1g/mL 이므로 이를 $1kJ/mL = 1kJ/cm^3$ 으로 다시 쓸 수 있다. 이때 1mL의 물을 [그림 3]과 같이 얇게 펴서 수면, 즉 대략 분자 하나 정도의 두께라 가정해보자. 그러면 $\sigma = 1kJ/cm^3 ≒ 1kJ/10^{10}cm^2$ 라 근사적으로 볼 수 있다.

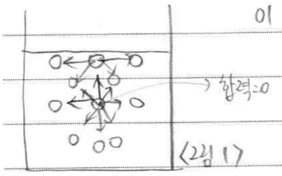
따라서 $\sigma ≒ 1kJ/10^{10}cm^2 = 1J/10^{3}m^2 = 10^{-3}J/m^2$ 라 추정해볼 수 있다.



[그림 3]

◦ 답안 3

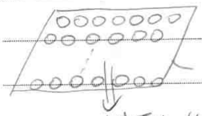
1 어떤 용기에 물이 들어있다고 하자. <그림 1>



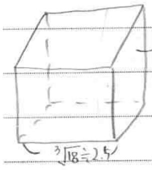
<그림 1>

이 때, 물속에 있는 한 분자는 수소결합의 총 합이 0이 된다.
그러나, 표면에 존재하는 한 분자는 평형을 이루지 못하고, 아래쪽으로 힘을 받게 된다. 따라서, 물은 표면적이 작아지려는 힘인 표면장력이 존재함을 알 수 있다.

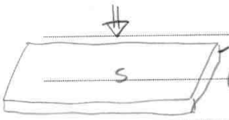
여기서 표면장력 (σ)를 대략 계산해 보자. 먼저 물 1몰의 분자가 표면에 놓여있다고 하자.



그리고, 표면의 분자 하나가 그 밑의 분자와 수소결합 하나를 하고 있다고 가정하자. 그렇다면, 표면상의 1몰 물분자가 받는 에너지의 합은 18KJ 이라고 할 수 있다. 즉, 1몰 물분자의 표면적만 알 수 있다면 단위 면적당 힘인 표면장력 (σ)을 구할 수 있다.



물 1몰은 18g인데, 18g의 물은 대략 18mL이다. (제시문 참조)
이 18mL의 물을 정방형의 용기에 담으면, 각 변에 놓인 물의 분자수는 모두 같다. $18mL = 18cm^3$ 이므로, 한 변의 길이는 $\sqrt[3]{18} \fallingdotseq 2.5cm$로 근사할 수 있다. 또, 이 용기속의 H_2O 분자수는 6.02×10^{23} 개이므로, 한 변의 물분자수는 $\sqrt[3]{6.02 \times 10^{23}} \fallingdotseq 5 \times 10^7$개 로 근사할 수 있다.



따라서, 물 분자 하나의 길이는 $\frac{2.5}{5 \times 10^7} = 5 \times 10^{-8}$ cm 으로 가정할 수 있다. 이 때, 물 분자 1몰을 한 평면위에 놓았을 때 그 넓이를 S 라고 하면, $S \times 5 \times 10^{-8} = 18cm^3$ 이 성립한다. 따라서, $S = \frac{18}{5} \times 10^8\ cm^2$ 으로 놓을 수 있다. 이 $\frac{18}{5} \times 10^8\ cm^2$에 18 kJ의 힘이 작용하므로, 단위 면적당 에너지인 표면장력 σ는

$$\sigma = \frac{18\ kJ}{\frac{18}{5} \times 10^8\ cm^2} = \frac{18000\ J}{\frac{18}{5} \times 10^4\ m^2} = \frac{5000\ J}{10000 m^2} = 0.5\ J/m^2$$ 으로 근사할 수 있다.

그러나, 표면의 물 분자에 수소결합이 하나 이상 결합하므로, σ는 $0.5\ J/m^2$ 이상이다.

■ 논제 2

수증기로부터 물방울이 생성될 때, 표면장력으로 인해 생기는 물방울 내부의 압력증가와 이로 인한 포화수증기압의 증가를 유추하고 이것이 물방울의 성장과 어떤 관련이 있는지 생각해 보도록 하였다.

물방울이 생성될 때 수증기-물방울 변환에너지와 표면장력에 의한 에너지가 경쟁적으로 작용한다는 사실을 파악하고, 이를 통하여 물방울 성장에 미치는 영향을 추론하는 것이 논제의 핵심이다. 논제 1에 따르면 표면장력에 따른 에너지는 σA로 주어지며 물방울의 경우에는 반경 R의 제곱에 비례한다. 제시문 (가)에서 수증기-물방울 변환에너지는 부피에 비례하는 것으로 주어져 있으며, 과포화 상태에서 이 에너지는 음수값을 갖는다. 따라서 물방울의 생성에너지는 $\Delta E = AR^2 - BR^3$의 형태로 되어 R이 특정 값보다 작을 때에는 양수값을 갖고 R이 특정 값보다 크면 음수값을 갖는 [그림 1]의 관계를 추론할 수 있다. 그 결과 작은 크기의 물방울은 생성되기 어렵고, 안정된 물방울이 만들어지기 위해서는 반경이 특정한 크기 이상이 되어야 하므로, 큰 물방울이 수증기만으로는 생성되기 어려워 응결핵이 필요하다고 추론할 수 있다. <답안 1>은 이러한 논제의 핵심을 정확히 이해하고 논의를 전개하여 좋은 평가를 받았다. 그러나 많은 학생들이 물방울 생성에 관여하는 두 가지 에너지를 비교해야 한다는 점을 생각하지 못해서 논점을 추론하는데 어려움을 겪은 것으로 보인다. 수식을 정확하게 유도하지는 못했으나 물방울 반경에 따라 두 가지 에너지 항이 경쟁적인 관계에 있음을 지적하며 논리적인 설명을 시도한 경우도 좋은 평가를 받았다. 또한 [그림 1]의 관계가 주어지는 이유는 제시하지 못했으나, 이를 이용하여 표면장력이 물방울 성장에 미치는 영향에 대한 논의를 제시한 경우도 부분적으로 평가에 고려하였다.

◦ 답안 1

논제2

물 분자의 반경이 커질 때 처음에 증가하다가 일정수준이 지나면 다시 감소하는 이유는, 반경 R의 제곱에 비례하는 표면장력이 물방울의 성장을 방해하는 반면, R의 세제곱에 비례하는 부피가 커질수록 성장은 촉진되기 때문이다.

제시문(가)에 주어진 공식

$$\Delta E = -nVkT \log \frac{P}{P_s}$$

에 의하면 부피 V가 커지면 ΔE는 작아진다. 이때 부피 V는

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

으로 주어지므로 R^3에 비례한다.

표면장력은 겉넓이 S에 비례하는데 이 때 S는

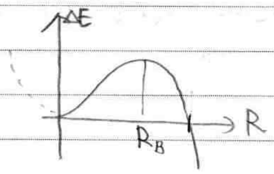
$$S = 4\pi R^2$$

으로 주어지므로 R^2에 비례한다.

이 두 요인으로 ΔE 식을 구성하면

$$\Delta E = mR^2 - nR^3 \qquad (m, n\text{은 비례상수})$$
$$= mR^2\left(1 - \frac{n}{m}R\right)$$

이 되므로 그래프 (R-ΔE)는



로 만들어진다.

이러한 형태의 에너지 ΔE 함수로 인해 일정한 수준 (위 그래프의 R_B 부근)에 이르지 못한 크기의 물방울은 다시 에너지가 낮은 상태인 R=0 수준으로 증발되고, 그 수준 이상의 크기의 물방울은 크기가 커지는 것이 안정하므로 계속 성장한다.

계속 성장할지 말지의 분계점이 되는 R_B는

$$(\Delta E)' = 2mR - 3nR^2$$
$$= 2mR\left(1 - \frac{3n}{2m}R\right)$$
$$\therefore R_B = \frac{2m}{3n} \quad (\because R_B \neq 0)$$

으로 주어지므로 n, m의 값을 구한다면 얻을 수 있다.

◦ 답안 2

논제 2. 물방울의 생성에너지는 표면장력에도 관계한다. 수증기 분자가 서로 결합하여 물방울이 구모양을 이룰때의 에너지 변화를 살펴보면, $\Delta E_{All} = \Delta E + \Delta E_{표면장력}$ 이다.

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$ 이고, 표면장력에 의한 에너지는 S에 비례하므로,

$\Delta E_{All} = \sigma \cdot 4\pi R^2 - n \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot kT \log(P/P_S)$ 이다.

R만 바뀌는 상태를 고려했을 때, 표면장력은 제곱에 비례하고 ΔE는 R 세제곱에 비례한다.

$\frac{d}{dR}\Delta E_{All} = 8\pi\sigma R - 4\pi \cdot k \cdot n \cdot T \log(P/P_S) \cdot R^2$

$= R(8\pi\sigma - 4\pi k n T \log(P/P_S) \cdot R)$

[그림 1]의 그래프의 기울기는 $\frac{d}{dR}\Delta E_{All}$로 나타날텐데, $R = 0$, $R = \frac{8\pi\sigma}{4\pi \cdot k \cdot nT \log(P/P_S)}$ 일 때 기울기가 0이된다.

따라서 $R_B = \frac{2\sigma}{k \cdot nT \log(P/P_S)}$ 임을 추론할 수있다.

[그림 1]과 같이 그래프가 나타내어지려면 $8\pi\sigma > 4\pi k n T \log(P/P_S)$ 이여야 한다. 왜냐하면 $0 < R < R_B$인 구간에서 기울기가 양의값을

갖기 때문이다. [그림 1]과 같은 에너지 그래프일때, 물방울이 R_B의 반경이 될때까지 성장하기는 에너지 측면에서는 어려울 것이다 그래서 자연에서 수증기들이 자발적으로 모여 비가 내린다기 보다, 어떠한 메커니즘을 통해 (가령 빙정설) 비가 내릴 것이다. 또 [그림 1]의 그래프에서 $R > R_B$ 일때는 비교적 물방울들의 성장이 잘 될 것이다

◦ 답안 3

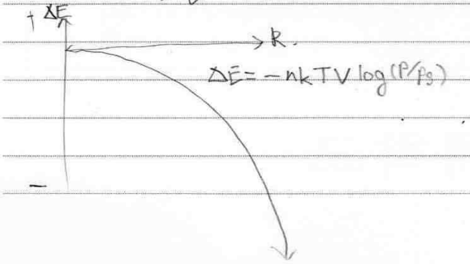
<논제2>

물방울 생성에너지는 수증기의 변환에너지(주로 물방울 내부의 결합력) 뿐만 아니라 표면장력에 의한 에너지 증가 효과를 포함한다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$(\text{총 생성에너지}) = (\text{수증기 분자의 변환 에너지}) + (\text{표면장력효과})$$
$$= -nkT\log(P/P_s) \times \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi R^2 \sigma$$

$\log(P/P_s) > 0$ (과포화상태) 일때는 이 함수가 3차계수가 음이고 2차계수가 양인 다항함수이므로 [그림 1]과 같은 경향성이 나타날 것이다.

한편, 이러한 경향성은 일정크기 이하의 물방울(총생성에너지가 양의 값인)이 다시 증발하게 하여 수증기압의 평형을 좀더 동적으로 일어나게 한다. 표면장력효과는 물방울이 "형성" 되기 전까지는 나타나지 않으므로 응결 속도에는 큰 영향을 미치지 않는다. 그 결과, 작은 물방울들이 증발하기 전에 뭉쳐서 커지는 형태로 물방울이 성장하게 된다. 만일, 표면장력 효과가 없이 아래 그림과 같은 물방울 생성에너지 경향이 나타났다면, 물방울은 쉽게 응결되어 무한히 커질 것이다.



- 1 -

◦ 답안 4

논제 2. 수증기분자가 서로 결합하여 물방울 생성 $\Delta E = -nVkT\log\left(\frac{P}{P_s}\right)$ 이다

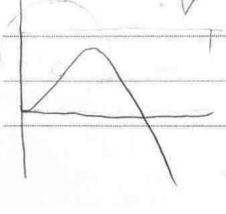
$$= nVkT\log\left(\frac{P_s}{P}\right)$$

여기서 물방울을 구형이라고 가정하면 (R : 반지름)

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ 이다

이를 보면 R이 클수록 ΔE가 커질 것 같지만 그렇지 않다. 왜냐하면 표면장력이 존재하기 때문이다. 표면장력은 $4\pi R^2$에 비례한다

$\frac{\text{표면장력}}{V} \propto \frac{1}{R}$ 즉 R이 작을수록 부피에 대한 표면장력이 커진다. 따라서 물은 표면장력을 줄이려고 하고 일정 시점이 지나게 되면 ΔE가 감소하는 형태의 그래프를 그리는 것이다 물방울이 작을 때는 그러한 영향이 작기 때문에 이러한 그래프



- 1 -

형태를 가진다. 이러한 형태의 에너지 함수는 물방울이 특정지점(R_B)의 크기를 넘어야 생성되기가 쉽게 된다. R_B를 넘는 물방울들은 빨리 커져 지상으로 (구름에서라면) 내려올 수 있다. 하지만 R_B보다 작게되면 R_B까지 가는데의 ΔE가 많이 필요하며 충분히 커지지 못한다.

■ **논제 3**

논제 1, 2를 통해 대기 중에서 순수한 수증기 응결만으로는 물방울 생성이 매우 어렵다는 사실을 이해하고, 대기 중의 구름생성에서 응결핵의 역할이 중요하다는 것을 추론하도록 하였다.

제시문 (나)는 실제 대기에서는 순수한 수증기의 응결만으로 물방울이 생성되기 힘들다는 점을 설명하였다. 또한 대기에 존재하는 해염입자가 증기압력 내림현상을 일으킨다는 사실을 제시하였다. 논제 3은 이러한 제시문의 설명을 꼼꼼히 읽고 이해한 학생들은 비교적 쉽게 유추해서 쓸 수 있는 문제이다. 표면장력 때문에 순수한 수증기만으로는 응결에 필요한 포화수증기압이 너무 높지만 대기 중에 존재하는 해염입자가 증기압력 내림현상을 통해서 응결현상 즉 구름생성을 쉽게 한다는 사실을 추론할 수 있다. 나아가 실제로 관측된 대로, 대양에서 선박을 따라 생성되는 구름을 통해서 인위적으로 방출된 오염기체로부터 생성된 작은 알갱이들이 해염입자처럼 구름 생성에 응결핵으로서 역할을 한다는 점을 설명할 수 있으면 된다. 또한 이러한 인위적인 입자들은 자연적인 해염입자보다 그 크기가 훨씬 작기 때문에 선박을 따라 생성되는 구름이 훨씬 더 작은 구름알갱이로 이루어져 있다는 사실을 이해해야 한다. 비교적 많은 학생들이 논제의 핵심을 잘 이해하고 서술하였다. 하지만 아래 <답안 1>에서 학생이 기술한 "표면장력의 증가가 대기 중에서 이웃하는 물방울과 쉽게 합쳐지게 하는 영향은" 실제로 아주 작다. 이보다는 오히려 서로 다른 크기의 물방울이 존재해야만 쉽게 병합될 수 있는 조건을 갖추게 된다. 이런 점은 약간의 감점 요인이 될 수 있다.

∘ **답안 1**

논제 3. 해염입자는 비휘발성 용질로 물에 용해되었을 때 표면의 일부를 차지하여 증기압력을 낮추고 표면장력을 높이는 역할을 한다. 작게 생성된 물방울 안에 용해되어 있는 해염입자 때문에 증발하는 속도가 감소하여 증기압력이 낮아진다. 따라서 물방울의 크기가 증발로 인해 줄어드는 양이 감소한다. 또 표면장력이 크게 작용하여 이웃하는 물방울과 쉽게 합쳐져서 물방울의 크기가 증가하게 된다.

화석연료의 사용으로 대기 중 생기는 많은 오염기체들도 작은 알갱이를 이뤄 이러한 해염입자와 비슷한 역할을 한다. 운항하는 선박으로부터 나오는 매연에 포함된 SO_2와 같은 오염 가체들이 화학 반응을 통해 작은 알갱이로 변환되어 비휘발성 용질로 물방울 속에 용해된다. 따라서 증기압력이 낮아지고 표면장력이 커져서 물방울의 성장 속도가 빨라지기 때문에 구름이 쉽게 생기게 된다.
그러므로 운항하는 선박이 오염가제를 남긴 부근마다 구름이 생성되는 것이다.
또 오염기체로 인한 입자들의 크기가 일반 자연적인 다른 입자들보다 매우 작으므로 오염가제로 생기는 구름입자의 크기가 다른 구름입자보다 작다.

◦ 답안 2

[논제3].

순수한 수증기만으로 응결이 일어나려면 상대습도가 400% 이상으로 매우 높아야 한다. 그러나 수증기들이 응집해서 응결할수 있도록 결합점이 되는 입자가 있다면 상대습도가 비교적 낮아도 응결이 일어날 수 있다. 이런 결합점을 응결핵이라고 하는데 먼지입자 혹은 분자물질로 되어있다. 대기중에 해염입자가 많으면 응결핵의 재료가 많다는 것이다. 즉, 낮은 상대습도에서도 많은 구름이 생길수 있게 된다.

또, 해염입자들이 대기중의 물방울에 용해되면 물방울의 증기압력은 낮아진다. 그에 따라 증발될 확률이 적어지고, 물방울 상태로 남을 확률이 증가하게 된다. 이러한 물방울의 수가 많아져 구름이 생성된다

따라서 대기중 해염입자가 많으면 구름이 쉽게 생성된다

[그림2]를 보면 선박이 지나간 길로 구름이 생성되었는데 이것은 선박의 화석연료 사용때문이다.

선박은 추진력을 얻기 위해 화석연료를 태우는데, 그 결과 많은 오염기체가 방출된다. 이런 입자들이 응결핵 역할을 함으로서 구름이 형성된다. 게다가 선박은 바다위를 다니는데 바다 위는 육지보다 습도가 더 높아 구름이 더 잘 발생한다. 따라서, 높은 습도와 선박의 오염기체방출로 인해 구름이 생성된다.

◦ 답안 3

<논제3>

구름이 생성되기 위해서는 대기중 수증기가 응결하여 작은 물방울이 되어야 한다. 그러나 순수한 수증기만으로는 쉽게 응결이 일어나지 않는다. 반면 대기중에 먼지와 같은 미세한 입자가 존재하면 이러한 입자를 응결핵으로 하여 수증기가 쉽게 응결된다.

또한, 해염입자가 대기중의 물방울에 용해되면 증기압력이 낮아져 증발이 감소한다. 수증기가 구름을 형성하기 위해서는 수증기가 응결되고, 응결된 채로 증발되지 않고 그 상태를 유지해야 하는데, 순수한 물방울보다 해염입자가 용해된 물방울이 다시 증발하여 수증기가 될 가능성이 낮으므로 쉽게 구름을 생성할 수 있다

[그림2]와 같이 운항하는 선박을 따라 구름이 생기는 것은, 화석연료를 사용하는 선박이 지나가면서 대기중에 방출한 매연에 포함된 미세입자를 응결핵으로 하여 구름이 형성되었기 때문이다. 해양에는 수증기가 지표면보다 더 다량으로 공급되며, 해염입자가 포함되어있어 구름 생성에 유리하므로, 지표면과 달리 구름이 생성되는 것을 짧은 시간안에 관찰할 수 있다. 또한, 화석연료의 연소 등 인간 활동에 의해 발생한 미세먼지는 그 크기가 자연적인 입자보다 작으므로 구름 입자역시 작게 나타난다.

◦ 답안 4

논제 3. 대기 중 해염 입자가 물에 녹아들어가면 증기압이 작아지게 된다.
따라서 동일 온도일 때 다른 물방울보다 증기압이 작으므로 다른 물방울들이 증발한
수증기가 해염 입자가 용해된 물방울에 달라붙게 되고 점점 커지면서 구름을 형성하게 된다.
즉, 해염 입자가 응결핵 역할을 하게 된다.

선박에서는 화석 연료를 사용하면서 많은 오염 기체를 방출하는데 이러한 기체들은
화학반응을 거쳐 해염 입자보다 작은 알갱이로 변한다. 이 작은 알갱이들도 물분자에
용해됐을 때 증기압을 낮게 하므로 응결핵 역할을 하여 구름을 생성한다. 그런데
그 크기가 해염입자보다 훨씬 작기 때문에 선박을 따라 생기는 구름입자의 크기는 주변의
구름보다 훨씬 작다.

■ 논제 4

인간 활동에 의한 인위적인 작은 입자의 농도증가가 구름생성 및 강수현상에 끼치는 몇 가지 자료를 제시하고, 그것을 바탕으로 서로의 연관성에 대해 과학적인 추론을 하도록 요구하였다.

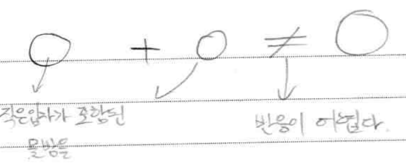
앞서 확인된 대로, 구름입자가 빗방울로 만들어지기 위해서는 많은 구름입자들의 충돌 및 병합이 필요하며, 수증기 양이 변하지 않는 조건에서 인위적으로 배출된 많은 입자들로부터 생성된 구름입자들은 그 크기가 훨씬 더 작다. 논제 4에서는 이 사실로부터 인간의 활동이 강수현상을 감소시킬 수 있는 지를 추론하도록 요구하였다. 먼저, 제시문 (다)에 주어진 강수량 자료와 대기 중의 작은 입자들의 농도자료가 1주일 주기로 변하는 경향을 가지고 있음을 설명하고, 더 나아가 두 자료가 서로 반대되는 경향을 보이고 있다는 것을 토대로 인간의 활동이 강수현상을 감소시키는 데에 영향을 끼칠 수 있다는 것을 위의 구름입자의 크기와 연관 지어 설명하면 된다. 아래 예시 답안처럼 제시문의 내용과 그림 자료에 대한 이해를 바탕으로 인위적인 입자로부터 생성된 구름입자가 훨씬 작기 때문에 빗방울 생성을 어렵게 한다고 잘 설명한 학생들도 있었다. 그러나 논제에서 명시한 제시문 (나), (다)의 내용과는 상관없이 지구온난화 같은 주제에 적용하여 인간의 활동이 강수 현상에 미치는 영향을 설명한 학생들도 다수 있었다. 이런 경우는 타당한 근거를 들어 매우 논리적으로 논의를 전개했어도 기본적으로 논제가 요구하는 논점에서 벗어난 것이므로 평가에서 논의 전개 과정을 전혀 고려하지 않았다. 반면, 구름생성으로부터 강수현상으로의 변환에 인간이 끼칠 수 있는 영향을 논리적으로 기술한 경우는 평가시 고려하였다.

◦ **답안 1**

논제 4. 인간의 활동으로 인해 미세한 입자들이 대기 중에 많아 지면 [그림 2] 와 같이
작은 입자로 이루어진 구름이 많이 형성 된다. 이러한 구름은 물방울의 크기가 매우
작기 때문에 [논제 2] 에서 밝힌 바와 같이 물방울의 성장이 잘 이루어지지
않는다. 물방울이 어느 정도 이상 성장 해야 비가 내리게 되는데 이와 같이
입자가 작은 구름만 생성 된다면 강수량이 감소할 것이다.
이는 [그림 3-1] 과 [그림 3-2] 에서도 확인 할 수 있는데 수요일에 대기 중 작은
입자들의 농도가 높은 것으로 보아 이 날 구름이 많이 생성 되겠지만 입자가 작아서
물방울의 성장이 안 일어나서 오히려 강수량은 낮은 것이다.

◦ 답안 2

논제4. 화석연료의 사용으로 방출된 오염기체들은 화학반응을 통해 작은 알갱이로 변환된다. 이렇게 작은 알갱이들은 해염입자와 비슷한 역할을 하여 응결핵으로써 작용할 수도 있다. [그림 3-2]를 보면 작은 입자의 농도가 많은 수요일날에는 [그림 3-1]에서 보듯이 평균 강수량이 적음을 알 수 있다. 작은 입자가 많아지면 작은물방울들이 쉽게 응결되어 물방울들끼리 합쳐지기가 힘들다. 그에 따라 응결된 물방울이 커지기 힘들고 빗방울로 성장하기도 힘듦을 알수있다. 따라서 인간이 앞으로 화석연료의 사용을 줄이지 않고 늘린다면 작은 입자의 농도가 높아져서 구름은 형성되지만 평균강수량은 낮은 나날을 보내게 될것이다. 응결된 물방울이 합쳐지기 힘들어 빗방울로 성장하기 어렵기 때문이다.



◦ 답안 3

논제4

화석연료 사용의 증가로 대기중 오염기체의 농도가 증가한다. 이때 위에서도 언급했듯이 오염기체에 의해 생긴 구름의 입자는 자연적으로 생긴 (ex)해염입자에의해) 구름의 입자보다 훨씬 작다고 했다.

그런데 강수현상은 구름입자가 충분히 커질 때 일어날수 있는데 인간의 활동으로 생긴 구름입자의 크기는 작으므로 충분히 커지기가 힘들다. 따라서 강수현상이 일어나기 힘든 구름이 많아져서 전체적인 강수량이 감소하게 된다.

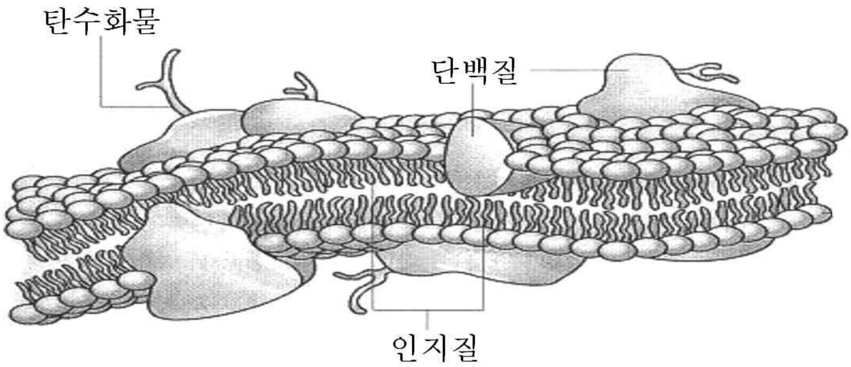
이는 [그림 3-1,2] 에 의해서도 확인해 볼수 있다. [그림 3-2]를 보면 인간의 활동으로 생긴 작은 입자의 농도가 상대적으로 높은 화,수,목요일에는 강수량이 낮다는 것을 알수 있다. [그림3-1]

【문항 2】

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

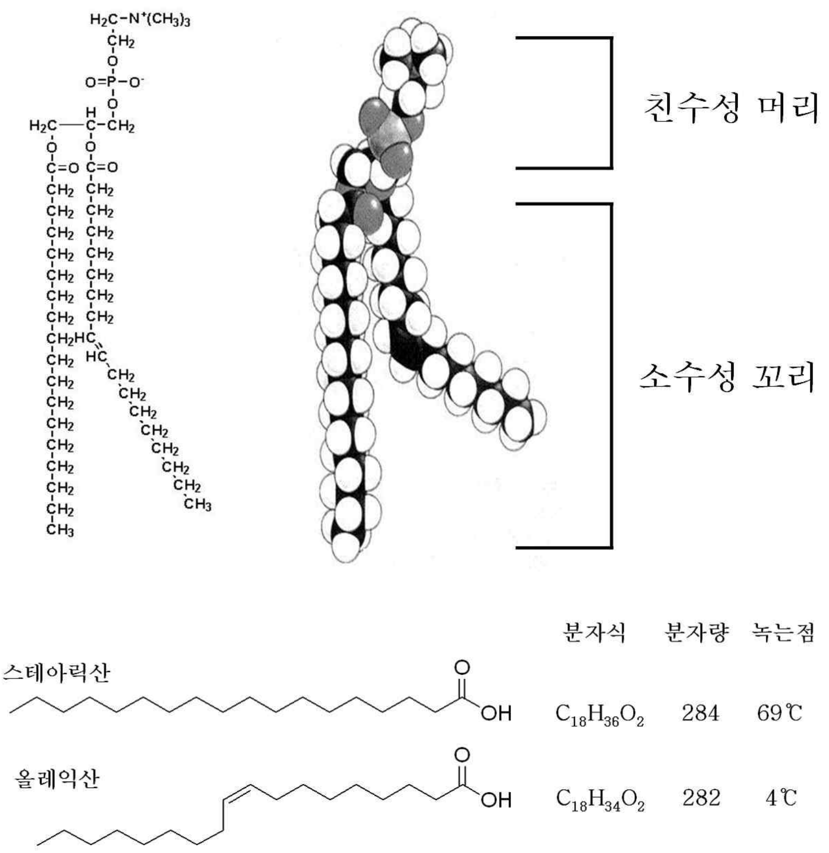
물은 세포 중량의 약 70%를 차지하며, 대부분의 세포내 반응은 물속에서 일어난다. 모든 세포는 세포막으로 둘러싸여 있어 안과 밖이 구별된다. 세포는 이러한 세포막을 통해 필요로 하는 물질을 외부로부터 받아들이고, 세포 내에서 물질대사 결과로 생긴 노폐물 등 여러 가지 물질을 세포 밖으로 내보낸다. 또한 외부 환경의 변화도 세포막을 통해 감지하며, 세포와 세포 사이의 신호 전달도 세포막을 통해 이루어진다.

세포막을 구성하고 있는 주성분은 인지질이며 단백질과 소량의 탄수화물이 존재한다. 세포막은 이중의 지질층으로 이루어져 있다. 이 지질층에 단백질이 묻혀있거나 관통하고 있으며, 단백질이 지질층을 떠다닐 수 있는 구조를 하고 있다([그림 1]). 이러한 세포막의 구조를 유동 모자이크 모델이라 하며 세포막을 통한 물질출입을 설명하는 데 매우 적합하다.(생물Ⅱ 교과서)



[그림 1] 세포막의 구조

살아있는 세포의 세포막은 실온에서 유동성을 가지고 있다. 세포막의 유동성은 인지질의 구조와 관련되어 있다. 세포막을 구성하는 인지질은 친수성 머리 부분과 소수성 꼬리 부분으로 구분되어 있으며, 소수성 꼬리 부분은 하나의 포화지방산과 하나의 불포화지방산으로 구성되어있다. [그림 2]는 인지질의 구조와 인지질을 구성하는 지방산의 물리적 성질을 나타낸 것이다.



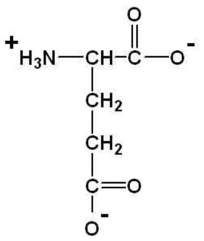
[그림 2] 인지질의 구조와 지방산의 특성

세포가 살아있는 상태를 유지하기 위해서는 생명활동에 필수적인 물질을 끊임없이 외부와 주고받아야 한다. 세포막은 세포의 경계로써 주위 환경으로부터 세포를 보호하는 기능을 가지고 있지만 모든 물질의 출입을 완전히 막지는 않는다. 세포막은 물질을 선택적으로 통과시켜 세포내의 물질조성을 일정하게 유지시키는데, 세포막의 이런 성질을 선택적 투과성이라 한다. 세포막을 통한 물질이동에는 농도기울기에 의해 물질이동이 이루어지는 수동수송과, 에너지를 사용하여 농도기울기와는 상관없이 때로는 농도기울기에 역행하여 물질이동이 이루어지는 능동수송이 있다.

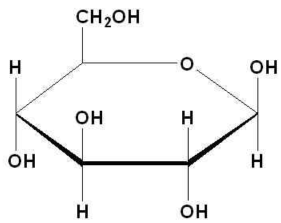
이러한 선택적 물질수송은 세포막을 구성하는 인지질의 특성과 단백질의 종류와 관련이 있다. 세포막 단백질은 세포의 대사를 원활하게 조절하기 위하여 세포 내부 또는 외부로 물질을 통과시키는 수송단백질(통로단백질과 운반단백질)일 수도 있고, 외부로부터 온 신호를 인식하여 세포 내부로 전달하는 수용단백질일 수도 있다. 또한 그 외의 여러 기능을 담당하는 단백질들이 세포막에 존재한다.(생물Ⅱ 교과서)

논제 1. 세포막을 구성하는 지질은 대부분이 인지질이다. 세포막이 실온에서 유동성을 유지할 수 있는 이유에 대해 인지질의 구조적 특징을 중심으로 논하시오.

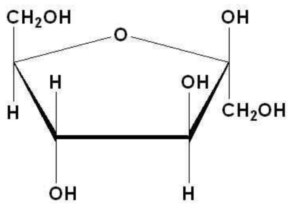
논제 2. 인공세포막을 만들어 보기 위해 인지질을 사용하여 물속에서 이중막을 만들었다. 이 이중막은 극성인 물을 잘 통과시키지 못하므로 물을 잘 통과시킬 수 있도록 단백질을 이중막에 넣어주었다. 만들어진 인공세포막의 물질이동 특성을 살펴보기 위해 10mM KCl, 10mM 글루탐산나트륨, 1mM 포도당, 1mM 과당이 들어 있는 용액에 인공세포막을 넣어주었다. 수용액에서 KCl과 글루탐산나트륨은 이온화되며, 포도당과 과당은 동일한 화학식($C_6H_{12}O_6$)을 갖지만 그 분자구조는 서로 다르다. 포도당이 중합체로 전환되면 물에 대한 용해도는 감소한다.



<글루탐산>



<포도당>

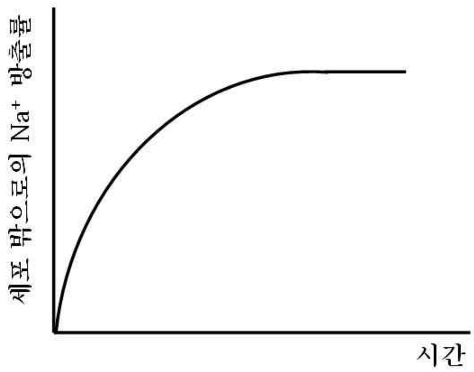


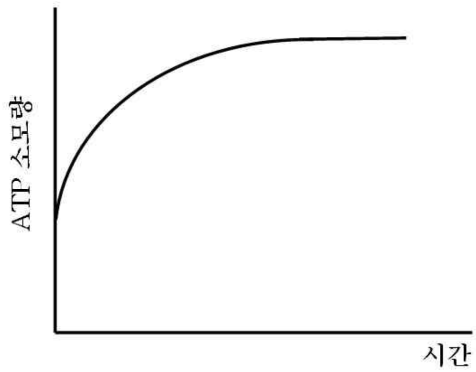
<과당>

2-1. 인공세포막 안으로 K^+, 글루탐산, 포도당만을 선택적으로 통과시켜 세포막 안의 농도가 각각 10mM, 10mM, 1mM이 되도록 하려한다. 어떤 물리, 화학적 특성을 고려하여 막단백질을 설계해야 하는지 설명하시오.

2-2. 논제 2-1에서 만든 인공세포막 안에 더 많은 양의 포도당이 들어가 저장되도록 하려한다. 이 때 삼투압의 증가로 인하여 인공세포막이 파괴되지 않으면서 다량의 포도당을 인공세포막내에 축적시킬 수 있는 방법을 추론하시오.

논제 3. 살아있는 세포는 세포내의 Na^+ 농도를 일정하게 유지하고 있다. 살아있는 세포와 유사한 인공세포를 만들어 세포내 Na^+의 농도보다 높은 소금물에 넣어준 후 다음과 같은 결과를 관찰하였다.





이 결과를 분석하여 세포막을 통한 Na^+ 이동 기작에 대해 논하시오.

❑ 출제의도 및 문항설명

생명의 기본 단위인 세포를 구성하는 세포막을 소재로 하였다. 생물, 화학 교과서에서 배운 기본적인 개념과 제시문의 내용을 토대로 다각적인 이해와 분석, 그리고 논리적이고 통합적인 추론을 할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 이를 위해서 주어진 자료를 이용, 분석하여 과학적인 근거를 토대로 결론을 유추하도록 각 논제를 구성하였다.

❑ 출전 및 참고 교과서

제시문은 외부 환경과 구분되는 생명체(세포)의 특징이 막에 의해 생겨날 수 있음을 여러 교과서 내용을 기초로 설명하였다. 세포막의 구성 성분과 구조, 세포막의 유동성을 추론하는 데 필요한 기본 자료, 세포막을 통한 물질 이동 원리와 그 중요성에 대한 자료를 제시하였다.

❑ 학생답안

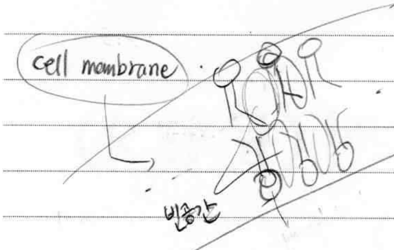
■ 논제 1

제시문에 설명된 내용을 토대로 세포막의 주요 구성 성분인 인지질의 구조와 물리·화학적 특성을 이해하고, 이로부터 세포막의 유동성이 어떻게 나타날 수 있는지를 논리적으로 설명하도록 하였다.

인지질은 친수성 머리부분과 소수성 꼬리부분을 갖는 양친매성 물질이다. 따라서 인지질은 극성을 갖는 물에서 친수성 머리부분은 물쪽으로 향하고 꼬리부분끼리 모이게 되어 이중막을 형성한다. 제시문의 [그림 2]에서 보여주고 있듯이, 포화지방산은 불포화지방산보다 밀집한 구조를 형성하므로 분자간의 상호작용이 커져서 불포화 지방산보다 녹는점이 높다. 실온에서 인지질의 꼬리부분이 포화지방산으로만 구성되면 고체상태가 되어 유동성을 잃어버리고, 불포화지방산으로만 구성되면 액체상태가 되어 막으로서의 기능을 못한다. 막으로서의 기능을 수행하고 유동성을 갖기 위해서는 인지질의 꼬리부분에 포화지방산(스테아릭산)과 불포화지방산(올레익산)을 가져야 한다. 학생들은 제시문의 설명과 [그림] 자료를 토대로 이러한 점에 착안하여 논의를 전개할 수 있어야 한다. 아래 예시 답안처럼 주어진 자료를 활용하여 논리적인 설명을 한 경우 비교적 좋은 평가를 받았다. 그러나 전체적으로 불포화지방산이 이중결합을 갖고 있는 구조적 특성으로 인하여 분자간의 상호작용이 적어 덜 밀집된 구조를 이루어 녹는점이 낮은 특성에 대한 설명이 부족하거나, 인지질의 양친매성 성질로 인하여 수용액에서 인지질의 소수성꼬리끼리 상호작용할 수 있음을 지적하지 않은 답안이 많았다.

∘ 답안 1

논제1. 인지질은 인산기로 이루어진 친수성 부분과 두 개의 지방산으로 이루어진 비극성 부분을 포함하고 있다. 인지질은 한 분자내에 친수성과 소수성을 모두 지니기 때문에 물에 녹아있는 세포의 안밖을 경계짓기 위해서 소수성부분이 안쪽을 향하고,

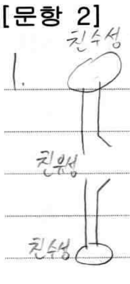


친수성 부분이 외부를 향하는 인지질 이중층 구조의 세포막을 지니게 된다.
…, 이러한 인지질 이중층 구조의 세포막은 세포막에 존재하는 막단백질이나 인지질이 어느정도 이동할 수 있는 유동성을 띠게 되는데, 이러한 세포막의 유동성은 인지질의 구조를 통해 설명할 수 있다.

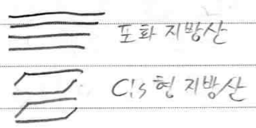
인지질을 이루는 두 지방산은 하나는 포화지방산이고, 하나는 지방산 내에 C=C 이중결합이 존재하는 불포화지방산이다. 이렇게 불포화지방산을 구성성분으로 가지게 되는데, 우선 불포화지방산은 첫째로 꺾인 구조를 나타낸다. 이러한 구조적 특성은 위의 그림에서 와 같이 인지질 분자 사이에 빈공간을 제공해준다. 따라서 빈공간쪽으로 막단백질이나 인지질이 이동할 수 있는 것이다.
두번째로는 포화지방산과 불포화지방산의 녹는점 차이가 존재한다. 불포화 결합은 π결합을 포함하고 있기 때문에 σ결합으로 된 분자보다 분자간 인력이 약하다. 실제로 불포화 지방산인 올레익산의 녹는점은 4°C로 실온에서 올레익산은 액체 상태로 존재하게 된다. 이를 통해 실온에서 세포막을 구성하는 인지질 분자들이 부분적으로는 액체상태를 포함하기 때문에 유동성이 가능하다고 추론할 수 있다.

∘ 답안 2

[문항 2]



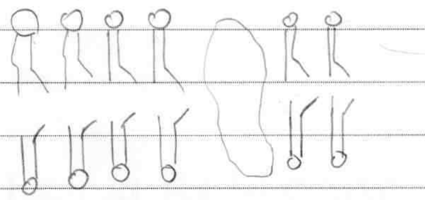
1. 인지질은 친수성기와 친유성기를 모두 가지고 있다. 따라서 세포막의 인지질 이중막구조는 세포막 내부와 외부를 친유성 환경을 통해 분리시키는 특징을 가지고 있다. 그래서 세포 안팎이 모두 수용액 환경이지만 세포 내부의 항상성은 유지되는 것 이다.
또 세포막의 이런 특징 때문에 친수성기와 친유성잔기를 모두 가진 단백질이 세포막에 박혀있을 수 있다. 그런데 인지질이 친수성기와 친유성기가 있다는 것 만으로 세포막의 유동성은 설명할 수 없다.



포화 지방산은 서로 포개어져서 안정성을 획득하기 쉽지만 Cis형 지방산은 탄소 사슬이 휘어져 있어서 비교적 안정하지 못하게 된다. 그래서 탄소 16~20개 정도 의 Cis 지방산은 상온에서 액체, 포화 지방산은 고체이다.
인지질은 Cis형과 포화형 지방산을 모두 가지고 있다. 비록 Cis형지 방산이 액체상태는 아니지만, 포화 지방산에 비해 기름 성분을 이동시키는데에 유리할 것이다. 그렇기 때문에 세포막 내에 박힌 단백질은 완전히 고정된 것이 아니어서 움직일 수 있다.

∘ 답안 3

1. 먼저 인지질로 이루어진 세포막의 구조부터 살펴보자.
세포막의 구조는 오른쪽 〈그림〉과 같이 인지질 이중층으로 이루어져 있다. 이 때 인지질의 소수성부분끼리 서로 인력을 형성할 수도 있지만 인지질은 포화지방산인 스테아릭산과 불포화지방산인 올레익산을 소수성 부분으로 갖고 있기 때문에, 상온에서 유동성이 큰 스테아릭산끼리 모일 수가 없다. 그 이유는 세포막 상에서 인지질이 일렬로 정렬되어 있기 때문에 스테아릭산과 올레익산이 교대로 만나게 되는 것이다. 따라서 스테아릭산들 사이에는 항상 녹는점이 상온보다 낮은 (4°C) 올레익산이 배치되게 되어서 세포막은 상대적으로 낮은 상온에서도 유동성을 유지할 수 있는 것이다. 올레익산이 분자량이 비슷한 스테아릭산에 비해 녹는점이 확연히 낮은 이유는 올레익산은 불포화결합을 중심으로 cis 형의 구조를 갖고 있어 packing이 일어나지 않기 때문이라고 추론할 수 있다. 즉, 인지질을 기본골격으로 하는 세포막이 유동성을 갖게되는 핵심은 인지질의 불포화결합이 존재하는 올레익산에 있다고 볼 수 있다.



〈그림〉

■ 논제 2

인공세포막을 만드는 과정을 통하여 막을 통한 물질들의 이동 원리와 막단백질들의 기능에 대하여 설명하도록 하였다.

∘ 논제 2-1

각 물질들의 물리·화학적 성질을 이해하고, 막단백질을 통해 이러한 물질들이 선택적으로 이동할 수 있는 근거를 추론하도록 하였다.

물에서 KCl은 K+ 와 Cl-로, 글루탐산나트륨은 Na+ 와 글루탐산-로 전리되어 이온으로 존재하고, 포도당과 과당은 친수성이므로 용해된다. 이들 용질들은 이온 또는 극성이므로 세포막을 통과하지 못한다. 따라서 K+, 글루탐산-, 포도당을 선택적으로 통과시키기 위해서는 각각의 크기, 전하, 구조를 구별하여 통과시킬 수 있는 막단백질이 필요하다는 것을 유추할 수 있다. 또한 각 물질의 세포막 안과 밖의 농도가 같아 평형이 이루어졌으므로 농도경사(기울기)에 따른 물질 이동으로 별도의 에너지가 요구되지 않는 수동수송이란 점을 알 수 있다. 그러나 학생들의 답안에는 KCl과 글루탐산나트륨이 물에서 해리 된다는 화학적 성질과 K+ 와 Na+, Cl-와 글루탐산- 크기를 고려하지 않는 경우도 많았다. 아래에 예시 답안 외에도 각각의 크기, 전하, 모양을 구별하여 결합하는 반응이나 수송(또는 통과시키는) 기구를 고안하는 등 논리적인 추론을 한 경우에는 모두 좋은 평가를 받았다.

∘ 답안 1

<2-1>

용액에 존재하는 물질은 K^+, Cl^-, Na^+, 글루탐산, 포도당, 과당 이다. 인공세포막의 막 단백질은 K^+, 글루탐산, 포도당만을 선택적으로 투과시키는 수송단백질이어야 한다. 그리고 넣어준 농도와 세포내의 농도가 세 물질 모두 같으므로 농도기울기에 따라 물질이 이루어지는 수동수송임을 알 수 있다.

먼저, 이온인 K^+의 통과에 관련된 단백질을 설계하려면, Cl^-와 Na^+는 통과시키지 않아야 한다. K^+는 양전하를 띠므로 음전하를 띠는 단백질을 이용하면 K^+, Na^+만 통과시키고, Cl^-는 통과시키지 않는다. Na^+는 K^+에 비해 이온의 크기가 작으므로 이온의 크기가 어느정도 큰 것만 통과시키는 단백질을 이용하면 K^+ 이온만 통과 시킬 수 있다. (K^+ 이온만 통과시키는 예로는 신경세포의 K^+ 통로 단백질이 있다)

글루탐산을 통과시키기 위해서는 글루탐산의 작용기($-CH_2-CH_2-COO^-$)와 구조적·전기적으로 잘 결합하는 막 단백질을 사용할 수 있을 것이다. 작용기가 이온화되어 음전하를 띠므로 전기적으로 + 전하를 띠는 단백질이 유리할 것으로 추측할 수 있다.

포도당과 과당은 화학식은 동일하지만 분자구조는 다르다. 포도당은 $-OH$ 3개와 $-CH_2OH$ 1개를 갖는 반면, 과당은 $-OH$ 2개와 $-CH_2OH$ 2개를 갖는다. 그리고 포도당은 6각형 구조를, 과당은 5각형 구조를 이룸을 알 수 있다. 단백질의 구조가 입체적으로 포도당과 잘 맞아떨어지되, 과당과는 잘 맞지 않도록 설계하면 포도당만 통과시키는 막단백질을 구성할 수 있을 것이다.

∘ 답안 2

[논제 2-1]

물질의 이동은 그 물질의 엔트로피를 증가시키는 방향으로 이루어 진다. 따라서 세포막이 논제의 모든 물질을 투과할 수 있다면 세포안과 세포 밖의 물질 농도가 같아야 할 것이다. 그런데 논제의 조건을 보면 세포 막 안의 물질농도는 K^+: 10mM, 글루탐산: 10mM, 포도당 1mM 이 되어야 한다고 했으므로 인공세포막은 K^+, 글루탐산, 포도당은 자유롭게 통과 시키지만 Cl^-, Na^+, 과당의 통과는 할수 없어야 한다. 이 물질들은 모두 극성이라서 막 단백질에 의해서만 세포막을 통과할 수 있으므로 막단백질이 선택적으로 투과를 결정한다고 볼 수 있다.

① 포도당과 과당 : 포도당과 과당은 화학식은 같지만 분자구조가 각각 육각·오각 구조로 다르다. 또한 포도당의 경우 과당과 달리 $-CH_2OH$ -구조를 하나만 가지고 있으므로 막 단백질은 포도당의 육각구조와 $-CH_2OH$ 구조 수차이를 판별하여 포도당만 선택적으로 투과 시킬수 있어야한다

② 글루탐산과 Cl^- : 두 물질은 공통적으로 음전하를 띠지만 글루탐산은 에스테르기가 두개가 있어 음전하의 크기가 더욱 크고 $-NH_3^+$에 의한 양전하를 부분적으로 띤다. 따라서 막단백질은 두 물질의 전하 세기·크기등을 구별하여 글루탐산만 선택적으로 투과시켜야 한다

③ Na^+와 K^+ : Na^+와 K^+는 전하량은 같지만 K^+가 이온크기가 더 크고 최외각 전자에 대한 유효핵전하크기가 작다. 따라서 막 단백질은 Na^+와 K^+의 차이를 고려하여 선택적 투과를 해야 한다.

한편, 투과된 물질의 농도가 외부와 같은 것으로 보아, 막단백질은 주로 통로단백질로 되어있음을 추론할 수 있다

◦ 답안 3

<논제 2-1>

인공 세포막 안으로 Na^+ 말고 K^+을 수송시키기 위해서는 Na^+-K^+ 펌프와 같은 역할을 하는 막단백질이 필요하다. 일단 이 단백질은 (+)이온의 수송을 담당하기 때문에 (-)전하를 띠는 단백질이어야 하고 Na^+보다 K^+과 결합을 더 잘해야 하므로 둘의 크기를 비교하여 더 큰 K^+ 이온을 받아들이도록 해야 한다. 그리고 글루탐산과 Cl^-을 구별해 내는 막 단백질을 만들려면 둘 다 (-)이온이므로 (+)단백질이어야 하고 글루탐산에 $\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O^-$ 작용기가 2개 있다는 점에 미루어 기질-효소 반응처럼 막 단백질에 활성 부위에 $\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O^-$와 꼭 맞게 결합할 수 있는 화학 구조를 가지도록 한다. 마지막으로 포도당과 과당을 구별해 내는 단백질은 무엇보다도 둘의 분자구조 차이를 알아야 한다. 포도당은 6각 구조인데 비해 과당은 5각 구조이므로 이를 이용한 막 단백질이어야 한다.

◦ 논제 2-2

막을 통한 물질 이동에서 발생하는 물리·화학적 문제를 논리적으로 해결하도록 하였다. 세포막을 파괴하지 않으면서 세포막 안으로 더 많은 포도당이 저장되도록 하기 위해서는 세포안의 포도당 농도를 줄여야 한다. 논제 2에서 주어진 것처럼 중합체(녹말 또는 글리코겐)를 형성하게 하면 포도당의 농도와 중합체의 용해도가 감소하므로 삼투압을 증가시키지 않으면서 포도당을 중합체로 축적할 수 있다. 아래 예시 답안을 포함하여 대부분의 학생들이 논제에서 주어진 내용을 토대로 ‘중합체를 형성하면 용해도가 감소한다’에 착안하여 포도당을 축적할 수 있다는 점을 설명하였다. 그러나 중합체를 만드는 것이 왜 포도당을 축적시키는 데 가장 합리적인지 그 이유까지 제시한 경우는 거의 없었다. 중합체가 형성되면 포도당 자체의 분자 수가 감소하여 포도당 농도가 줄게 되어 삼투압 감소에 기여(르샤틀리에 법칙)한다는 것까지 설명했다면 더 명확한 논의 전개가 되었을 것이다.

◦ 답안 1

(2-2) 포도당은 물에 녹는 물질이기 때문에 삼투압을 형성시킨다. 따라서 세포 내부에 포도당의 양이 증가하면 녹아있는 용질의 양이 증가하므로 삼투압이 높아져 내부로 물이 유입되어 용혈 현상이 일어날 수 있다. 이러한 현상을 막으면서 포도당을 축적시키기 위해서는 포도당의 용해도를 감소시켜야 한다. 즉, 포도당 중합체는 포도당보다 물에 대한 용해도가 작으므로 포도당을 중합시켜 축적시키면 되는 것이다.

실제로 식물세포에서는 포도당을 녹말로 전환시키는 효소가 존재하며 광합성 결과 생성된 포도당을 녹말로 전환시켜 축적한다. 인체의 경우에는 그러한 전환 효소가 없으므로 간에서 '글리코겐'이라는 용해도 낮은 지방으로 전환시켜 체내에 축적하게 된다.

◦ 답안 2

(세포 내에 포도당, 세포 외에 과당이 있어 세포 내외 농도가 맞아있다. 이때 포도당을 더 넣어주면 확산이나 능동수송을 통해 포도당이 세포 내로 더 들어갈 순 있겠지만 세포밖의 포도당이 적어 농도가 안 맞아 용혈 현상이 일어날수 있다.)

〈2-2〉 인공세포막 내에 더 많은 포도당을 축적시키는 방법으로 능동수송이나 확산을 이용할 수 있다. 하지만 능동수송을 이용할 경우 포도당의 농도가 높아짐에 따라 삼투에 의해 물이 유입이 되어 용혈현상이 일어날 수 있다. 이를 방지하기 위해서 수용성인 포도당을 불수용성으로 만들어 농도에 영향을 주지 않도록 해야한다. 그 방법으로 포도당을 중합시켜 녹말이나 셀룰로오스로 저장한다. 그렇게 되면 세포 내 농도가 낮아져 확산을 통해서도 포도당을 안쪽으로 더 많이 이동시킬수 있다.

◦ 답안 3

2-2, 포도당 축적을 하기 위해서는 세포막 내부, 즉 세포 안에 포도당 중합효소를 첨가하면 된다. 세포 안으로 유입된 포도당이 중합효소로 인하여 중합이 되면 포도당의 용해도가 감소하므로, 포도당의 농도가 세포 내에서 작아지고 따라서 안 밖의 농도차이를 막기 위해 포도당이 막단백질을 통해 계속 유입된다. 이와같은 방법으로 용액의 포도당은 세포 안에 축적이 가능하고 따라서 용액에 포도당을 계속 첨가시키면, 다량의 포도당은 세포 안에 축적시킬 수 있다.

■ 논제 3

막을 통한 물질 이동에서 발생하는 물리·화학적 문제를 논리적으로 해결하도록 유도하여 농도 경사(기울기)에 역행하여 막단백질을 통해 용질이 이동할 때 에너지(ATP)를 사용하는 능동수송 원리를 이해하고 있는지를 확인하고자 하였다.

소금물에 들어간 세포 내의 Na^+ 농도는(삼투에 의해 물이 세포 밖으로 빠져나감으로 또는 단순 확산을 통해 세포 안으로 Na^+가 들어옴으로) 서서히 높아지게 된다. 세포는 세포내의 Na^+ 농도를 일정하게 유지하기 위해 세포막을 통하여 Na^+를 세포 밖으로 방출하게 된다. 주어진 결과를 보면 초기에 Na^+ 방출이 일어나지 않아도 에너지(ATP) 소모량이 0보다 큰 것은 Na^+ 방출과 상관없이 에너지(ATP)가 소모되고 있다는 것이다. 시간에 경과함에 따라 Na^+ 방출이 증가하면서 에너지(ATP) 소모도 이와 비례하여 증가하고 있다. 이러한 결과로부터 Na^+ 방출이 에너지(ATP)를 사용하는 능동수송 형태임을 유추할 수 있다. 즉, 세포 밖의 Na^+ 농도가 세포 안보다 높기 때문에 Na^+의 농도경사(기울기)를 거슬러 Na^+ 이동이 일어나야 함으로 에너지(ATP)를 사용하는 것이다. 막단백질을 통하여 능동수송 형태로 Na^+가 방출되기 때문에 논제에서 주어진 것과 같은 결과를 얻었다는 점을, (1) "세포막에 존재하는 막단백질의 개수가 유한하여 전체 Na^+의 방출률은 시간이 지남에 따라 일정(포화)해지므로 ATP의 소모도 시간이 지남에 따라 일정해진다" 또는 (2) "시간이 지남에 따라 방출되는 양이 세포 안으로 들어오는 양과 같아지면(평형상태) Na^+ 방출률과 ATP 소모가 일정해진다"라고 설명할 수 있다. 주로 (1)의 가능성에 근거하여 논의를 전개한 경우가 많았다.

◦ 답안 1

논제3. 높은 농도의 Na^+에 인공세포를 넣을경우 Na^+의 농도 기울기에 의해 Na^+이 인공세포 안쪽으로 수동 수송 되게 된다. 이때, 인공세포는 세포내의 Na^+의 농도를 일정하게 유지시키기 위해 능동수송을 시작한다. 따라서 논제 3의 그래프와 같이 Na^+의 방출률이 증가하고 능동수송의 경우에는 ATP도 소모하기 때문에 ATP 소모량도 증가하게 되는 것이다.

이때, 일정시간이 지난후 Na^+ 방출률과 ATP 소모량이 일정하게 되는 것을 알 수 있는데 이 이유는 다음과 같다. Na^+의 능동 수송시 세포막 위의 수송단백질을 이용하게 되는데 이는 수가 정해져 있다. 따라서 모든 수송단백질이 수송에 참여하게 되면 Na^+ 방출률이 일정하게되고 이때 쓰이는 ATP양도 일정해 지는 것이다.

◦ 답안 2

논제 3.

세포는 세포내 Na^+ 농도를 일정하게 유지하는데 지금 주어진 환경은 외부의 삼투압이 높은 환경이다. 따라서 삼투기울기를 따라 유입되는 Na^+을 세포밖으로 보내야하는데 이는 삼투기울기를 거슬러야 되므로 능동수송을 한다. 시간이 흐를수록 수송량의 변화가 적어지는데, 이는 Na^+의 방출률이 유입량과 비슷해졌기 때문일 수도 있고, 세포막의 Na^+ 운반단백질이 부족해서 일수도 있다. 더 많은 Na^+를 방출해야 되는데 운반단백질의 개수와 일률이 한계가 있기 때문이다. 이런 경우에 세포는 내부 Na^+농도가 진해져서 삼투압에 변화가 생기게 된다. 이는 물의 유입 혹은 방출로 세포가 제 기능을 하지 못하게 될 수도 있는 심각한 현상이다.

◦ 답안 3

논제 3.

세포는 Na^+-K^+ 펌프에 의해 세포 내의 Na^+ 농도를 낮은 수준으로 유지하고 있다. 그런데 상대적으로 고장액인 소금물에 세포를 넣으면 삼투에 의해 물이 빠져나가고, Na^+가 확산에 의해 세포 내부로 유입되므로 세포 내부는 고농도가 된다. 따라서 유입된 Na^+을 빼내기 위해 ATP 소모량이 점점 증가하게 된다. 이 능동 수송은 막단백질을 통해 이루어지는데, 이와 같은 기능을 하는 막단백질의 수가 제한되어 있으므로 Na^+ 능동 수송의 속도가 어느 순간 한계에 다다르게 된다. 그 결과 그래프에서처럼 Na^+ 방출률과 ATP 소모량이 일정해지는 것이다.

【문항 3】

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 전자기파

독일의 헤르츠가 전기 방전 실험을 통하여 전자기파를 처음으로 실험실에서 검출하였다. 전자기파는 매질이 없는 진공 속에서 빛의 속도로 진행하고, 주파수에 따라 전파(중파, 단파, 초단파, 극초단파), 빛(적외선, 가시광선, 자외선), X선, 감마선으로 분류된다(<표 1>).

<표 1> 전자기파의 종류

구분	명칭	파장	진동수
전파	중파(MF)	1km~100m	300kHz~3MHz
	단파(HF)	100m~10m	3MHz~30MHz
	초단파(VHF)	10m~1m	30MHz~300MHz
	극초단파(UHF)	1m~1mm	300MHz~300GHz
빛	적외선	1mm~770nm	
	가시광선	770nm~380nm	
	자외선	380nm~10nm	
X선		10nm~0.001nm	
감마선		0.1nm 이하	

(과학 교과서)

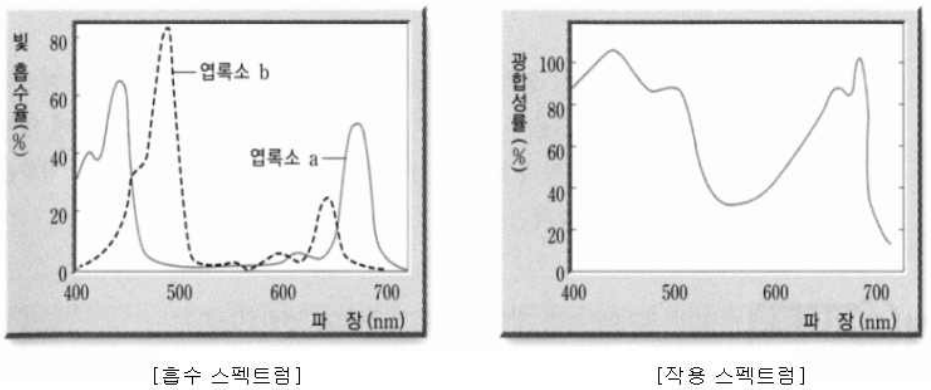
전자기파의 세기는 단위 면적, 단위 시간당 지나가는 에너지로 나타낸다. 태양광은 대부분 빛으로 이루어져 있는데, 지표에 도달하는 태양복사 에너지는 약 500nm의 파장에서 최대이고 그 세기는 낮에 약 750W/m^{2}이다. 식물은 이러한 빛 에너지를 사용하는 광합성 과정을 통해 생명 활동에 필요한 에너지를 얻는다.

반면에 우리 주위의 전파는 주로 인간이 인위적으로 발생시켜 활용하고 있는 전자기파이다. 주변에서 흔히 사용하는 전자레인지는 주파수가 2.45GHz인 극초단파를 이용한 예로서, 이 때 사용된 극초단파의 세기는 3kW/m^{2}정도이다.

(나) 광합성

녹색 식물은 광합성이라 부르는 일련의 복잡한 화학 반응과정을 통해서 포도당을 만든다. 광합성을 하기 위해서는 빛, 물, 이산화탄소 그리고 빛을 흡수하는 엽록소 등이 필요하다.

엽록소는 엽록체 속에 있는데 태양광선 중에서 적색과 청색의 빛을 잘 흡수하는 성질을 가지고 있다. 식물이 녹색으로 보이는 것은 광합성 색소인 엽록소가 녹색의 빛을 흡수하지 않고 반사하기 때문이다([그림 1]).



[그림 1]

광합성의 과정은 빛이 필요한 명반응과 CO_2가 필요한 암반응으로 나누어지며, 반드시 명반응이 먼저 진행되어야 한다. 명반응의 주된 화학 반응은 다음과 같다.

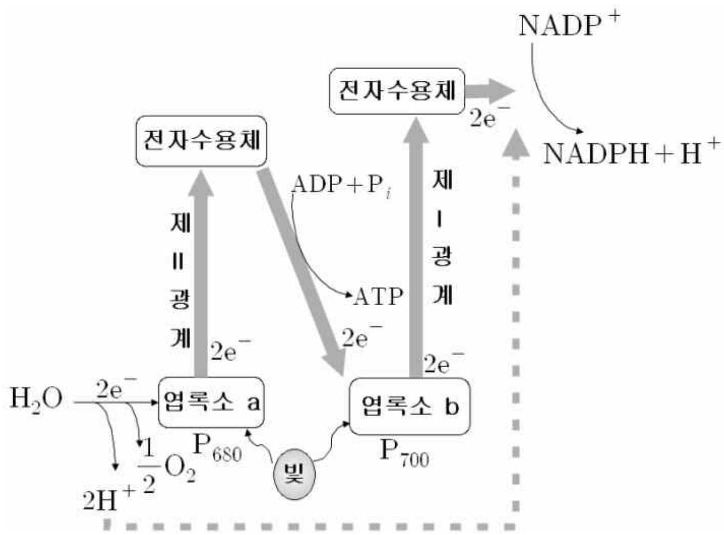
$$H_2O \longrightarrow 2H^+ + 2e^- + \frac{1}{2}O_2 \qquad ------(1)$$

$$ADP + P_i + NADP^+ + 2H^+ + 2e^- \longrightarrow ATP + NADPH + H^+ \qquad ------(2)$$

빛에너지에 의해 물이 분해되어 산소가 발생되는 과정을 물의 광분해라고 한다. 반응 (1)의 표준 전극 전위는 -1.229V이다. 명반응은 엽록소가 빛에너지를 흡수하고 이어서 물이 분해되는 광분해로부터 시작한다.

엽록체의 현탁액에 무기인산과 ADP를 넣고 빛을 쬐면, 무기 인산은 줄고 ATP가 생성되는데, 엽록소가 빛에너지를 받아 ATP를 합성하는 것을 광인산화 반응이라 한다. 엽록소가 빛에너지를 흡수하면, 전자가 들뜨고 엽록소로부터 이탈하여 전자전달계를 거친다. 전자가 전자전달계를 거치는 동안에 ATP가 생성된다. 전자전달계를 거쳐 온 전자와 물의 광분해로 생성된 H^+가

조효소의 일종인 $NADP^+$와 결합하여 NADPH와 H^+로 된다. 엽록체에서 이루어지는 명반응을 정리하면 [그림 2]와 같다. (생물 II 교과서)

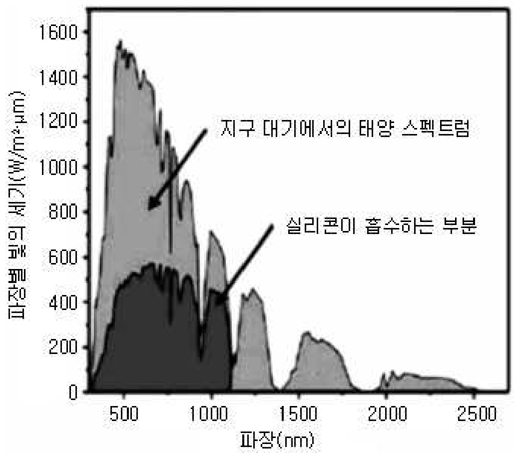


[그림 2]

(다) 태양광 전지

풍부한 태양빛으로부터 직접 전기를 생산한다는 것은 매우 멋진 일이다. 그것은 지금으로부터 100년 전만 해도 꿈도 꾸지 못했던 것으로 이는 최근에 나타난 재생 에너지이다.

태양광 전지의 작동 원리를 이해하기 위해서는 우선 무수한 에너지 입자, 즉 광자들로 이루어진 빛을 살펴보아야 한다. 반도체 태양광 전지에 태양빛이 입사하면 전류가 흐르고 전기가 발생한다. 그 가운데 실리콘 반도체를 기반으로 한 태양광 전지는 [그림 3]과 같은 파장대의 빛을 흡수하여 전기적 에너지로 바꾼다.



[그림 3]

현재 태양광 전지가 태양광 에너지를 전기적 에너지로 바꾸는 효율은 약 15% 정도이다. $1m^2$의 태양 전지판은 약 100W의 전력을 공급한다. 태양광 전지는 수명이 길지만 제작 및 설치비용이 높아서, 태양광 전지가 현대 사회에 필요한 대량의 전력을 모두 대체하지는 못할 것이다. 게다가 태양빛이 강렬한 낮 시간에만 전력을 생산할 수 있기 때문에 하루 24시간 내내 전력을 공급하지 못한다는 약점도 있다. (출전: 폴 마티스, 「재생에너지란 무엇인가?」)

<표 2> 2007년 1월 15일부터 적용된 주택용 전기요금 기준표

월사용량	기본요금(원/가구)	전력량 요금(원/kWh)
100kWh 이하 사용	370	55.1
101~200kWh 사용	820	113.8
201~300kWh 사용	1,430	168.3
301~400kWh 사용	3,420	248.6
401~500kWh 사용	6,410	366.4
500kWh 초과 사용	11,750	643.9

(자료: 한국전력공사)

*월간 150kWh를 사용했을 때 전기료: 820＋(55.1×100)＋(113.8×50)＝12,020원

논제 1. 전자레인지 안에서는 1분 안에 끓는 물이 태양광 아래에서는 4분에 걸쳐서 같은 양의 에너지를 받더라도 온도가 거의 변하지 않는 이유를 설명하시오. 다양한 전자기파들이 에너지의 세기가 같더라도 전자기파에 노출된 물체에 다른 영향을 미치는 원인에 대하여 추론하시오.

논제 2. 광합성을 통한 에너지 변환 과정에서 제시문 (나)의 반응 (1)의 필요성에 관하여 논하시오. 이 화학반응은 실험실에서는 쉽게 일어날 수 없는 반응이다. 그 이유를 논하고 식물은 어떻게 이런 어려움을 극복하는지 추론하시오.

논제 3. 제시문 (나)에 설명된 광합성 명반응 과정의 원리를 참고하여 태양광 전지의 작동 원리를 설명하고 태양광 전지의 효율을 높이기 위한 방안을 제시하시오.

논제 4. 한 달에 300kWh를 사용하는 가구에서 m^2당 설치비용이 100만원이고 넓이가 $10m^2$인 태양광 전지판을 지붕 위에 설치하고, 매일 낮 시간에 8시간동안 발전을 할 수 있다고 하자. 태양광 전지판의 수명이 20년이라고 할 때, 이 가구에서 설치비용을 회수하는 데 걸리는 시간을 <표 2>에 주어진 주택용 전기요금 기준표를 참고하여 구하고 태양광 전지의 경제성과 대체 에너지원으로서의 발전 방안에 대하여 논하시오.

❑ 출제의도 및 문항설명

과학교과서에서도 중요하게 다루어지고 있는 대체 에너지는 국제 유가 변화, 에너지 고갈 등으로 최근 그 중요성이 더 부각되고 있다. 문항 3에서는 대체 에너지로 각광받는 태양광 전지에 대한 물리적, 화학적 원리를 바탕으로 하여, 이를 확장 응용할 수 있는지를 평가하고 대체 에너지 개발의 필요성을 생각해 보도록 하였다.

❑ 출전 및 참고 교과서

제시문은 다음과 같은 내용으로 구성되어 있다.

◦ (가) 파장에 따른 전자기파의 종류를 설명하고 그 활용 예를 소개하고 있다. (교학사, 과학 85쪽; 중앙교육진흥연구소, 과학 95쪽)
◦ (나) 녹색 식물의 광합성에 대한 기본적인 개념과 광합성의 명반응 과정의 원리를 설명하였다. (홍진 P&M, 과학 195쪽; 교학사, 과학 51쪽; 중앙교육진흥연구소, 생물 Ⅱ 74~75쪽)
◦ (다) 교양서적에 소개된 태양광 전지에 대한 내용을 토대로 현재 태양전지의 파장별 빛 에너지 사용 현황과 한계점을 설명하고, 우리나라의 전기요금 자료를 제시하였다. (민음 바칼로레아, 폴 마티스, 재생에너지란 무엇인가? 50~51쪽)

❑ 학생답안

▪ 논제 1

전자기파가 물체에 미치는 영향을 물리적 또는 화학적으로 이해하는지 평가하고자 하였다. 특히 빛과 전자레인지의 극초단파가 물체에 미치는 영향의 차이를 통해 전자기파의 세기뿐만 아니라 광자의 에너지가 중요하다는 것을 이해하고, 이 광자의 에너지가 물체의 들뜸과 연결되는 광전자 현상을 추론할 수 있는지를 확인하고자 하였다.

이 논제는 극초단파와 가시광선의 주파수를 물질의 고유진동수와 비교하여, 흡수율의 차이를 논리적으로 설명하도록 요구하고 있다. 이를 위하여 1) 물의 고유진동수가 대략 극초단파 영역에 있고, 2) 전자레인지는 이 고유진동수에 해당하는 극초단파를 발생시키기 때문에 흡수가 잘되는데 비하여, 3) 태양광은 주로 다른 주파수 대역(가시광선)의 전자기파로 구성되어 있어서 흡수가 잘되지 않음을 각각 기술하고, 4) 이러한 흡수율의 차이에 의해 물의 온도 증가 정도가 다르게 나타남을 기술해야 한다. <답안1>과 <답안2>는 이러한 내용을 간결하고 명확하게 논술하였고, <답안3>은 공명현상 등에 대한 몇 가지 예시를 통해 논리적인 접근을 하였다.

◦ 답안 1

[논제 1]

모든 물질은 각각의 분자에 따라 서로 다른 진동수를 갖는 파동에 공명하여 진동하는데,
이때 물질을 공명시키는 진동수를 물질의 '고유 진동수'라 하며, 고유 진동수는 물질마다
각각 다른, 물질의 고유값이다. 물의 경우 물 분자의 고유 진동수는 그 값이 적외선이나
극초단파의 진동수에 해당한다. 즉, 같은 에너지를 받더라도 극초단파나 적외선에 해당하는
에너지를 받으면 물 분자가 잘 공명하여 진동하게 되고, 이 과정에서 열이 생겨 온도가
올라가게 되는 것이다 전자레인지의 경우 물이 잘 공명하는 진동수를 갖는 극초단파를
이용하여 에너지를 공급하고, 태양광은 주로 가시광선을 통해 에너지를 공급한다.
그러므로 물의 경우 전자레인지에서 공급되는 극초단파에 의해 진동하여 빠르게 끓는
반면 태양광 아래에서는 물 분자가 잘 공명하지 않아 온도가 크게 변하지 않는다는
것을 알 수 있다 이처럼 다양한 전자기파들의 에너지 크기가 같더라도,
에너지를 가하는 물질의 고유 진동수에 따라 전자기파가 물질에 가하는
영향이 달라질 수 있다.

◦ 답안 2

<논제1> 전자기파의 세기는 단위면적당, 단위시간당 지나가는 에너지이다. 태양복사에너지의 최대 세기를
750 W/m² 이고 전자레인지에 이용되는 마이크로파의 세기가 3kW/m² 일때
논제에서 주어진 시간대로 ~~에너지를~~ 물에 에너지를 줄경우 4×750 W/m² =1×3 kW/m² 처럼
물이 받은에너지 양은 같다. 그러나 전자레인지 안에 있을 땐 끓고 태양복사에너지를
받을때 끓지 않는데 그 이유는 공명현상에 의해 에너지가 더 잘 전달될수 있기때문이다
물분자는 회전, 병진운동등을 하며 자신들의 고유진동수를 갖는다. 이 고유진동수는 마이크로파의
고유진동수가 같거나 정수배가 되면 진동시 에너지가 전달되어 운동에너지가 증가하여 진폭이 커지게되고 물분자의 위치에너지 변화폭이 커짐과 같이
공명현상이 안 일어날때보다 진동시 생기는 열에너지가 많이 생성되어 잘 끓게 된다. 같은 양에 에너지를
공급받더라도 끓음의 여부가 달라지는 이유는 이때문이다.
마찬가지로 같은 세기의 전자기파를 노출된 물체에 가하더라도 다른 영향을 미치는 이유는 물체의
고유진동수 때문이다. 고유진동수와 배수관계인 진동수를 갖는 전자기파의 에너지 전달이 훨씬
잘 일어나기 때문에 다른 영향을 미치는 것이다. 실제예로 적외선의 고유진동수가 온실기체에 영향을 미치는
경우와 그렇지 않은경우 적외선 흡수를 온실기체가 더 잘한다는 점에서 위와같은 사실을 확인할수 있다

◦ 답안 3

논제 1

물은 극성을 띈다. 전자레인지 안에서 주파수가 2.45GHz인 극초단파를 물에 쏘게되면 극성을 띄는 물분자들은 전자기파에 의해 진동하게된다. 그래서 급격하게 온도가 상승하여 끓게된다.

태양광에 노출된 물이 끓지 않는 이유는 일단 태양광은 극초단파와 달리 물의 표면에만 영향을 준다. 그이유는 극초단파가 주파수가 월등히 크기 때문에 빛에너지 hf 가 태양광보다 매우크다. 그래서 극초단파는 물을 투과하지만 태양광은 그러지 못하고 물 표면에만 영향을 주게된다.

또 다른 이유로는 공명 주파수의 차이때문이다. 공명주파수는 물체에 따라 다른 값이다. 어떤물체를 공명주파수로 진동시키면 평소때보다 격렬하게 진동한다.

그예로는 특정한 소리주파수에 깨지는 유리컵, 그네를 밀어줄때 그네의 운동주기에 맞춰줘야 그네가 잘 움직이는 것 등이 있다.

물분자도 이와 마찬가지로 공명주파수를 가지고 있는데 그 주파수가 전자레인지에서 이용하는 2.45GHz 이다.

즉 물이 같은 양의 에너지를 받아도 극초단파에는 공명하여 온도가 급격히 증가하고, 태양광에서는 별로 변화가 없게된다.

▪ 논제 2

자연에서 일어나는 태양광 발전인 식물의 광합성 과정 중 명반응에서 에너지 변환과정의 화학적 원리에 대한 이해를 기초로 하였다.

광합성을 통한 에너지 전환과정을 화학 반응의 측면에서 논의하는 것이 이 논제의 핵심이다. 광합성 명반응에서 물을 광분해하여 산소기체와 함께 수소이온과 전자를 만드는 반응의 역할에 대해 추론하는 것이 첫 번째 논점이다. 이 반응에서 생성되는 수소이온과 전자가 광분해 과정을 통해 어떻게 쓰이는지 파악하고 이들의 지속적인 공급이 중요하다는 점을 추론한 경우 좋은 평가를 받았다. 두 번째 논점은 물의 광분해 반응이 보통의 조건에서는 잘 일어나지 않으며, 이를 극복하기 위하여 실제 광합성 식물은 어떤 방법을 이용하는 가를 추론하는 것이다. 이 반응이 에너지를 필요로 하며 활성화 에너지가 높다는 것을 지적하고, 촉매(효소)를 이용하여 이를 극복할 수 있음을 추론한 답안들이 좋은 평가를 받았다. 다만, 주어진 반응이 에너지를 필요로 하고 활성화 에너지가 높은 이유에 대하여 구체적으로 화학적인 추론을 한 경우는 많지 않았다.

<답안 1>과 <답안 2>는 논제에서 요구하는 논점들을 잘 정리하여 추론하고 있다. <답안 3>과 <답안 4>는 물의 광분해 반응이 잘 일어나지 않는 이유와 이를 극복하는 방법에 대해 구체적으로 논의를 시도했다는 점이 돋보였다.

◦ 답안 1

2) 엽록소 a와 b는 빛을 받으면 그 에너지를 흡수해 전자를 들뜨게 하여 방출한다. 엽록소 a에서 방출된 전자는 전자전달계를 거치면서 ATP를 생성하고, 에너지가 낮아진 이 전자는 엽록소 b에 공급되어 전자를 방출했던 엽록소의 전기적 균형을 맞추어 환원시켜준다. 엽록소 b에서 방출되었던 전자는 전자전달계를 거쳐 H^+와 함께 NADP를 환원시킨다. 이 때 물이 광분해로 생성되었던 전자가 엽록소 a로 가서 환원되며 전기적 균형을 맞춰준다. 만약 (1)의 반응이 일어나지 않는다면 엽록소 a는 전자만 방출하고 환원되지 못해 전기적 균형을 맞추지 못할 것이다. 또한 암반응시 필요한 $NADPH + H^+$를 만드는데도 (1)의 반응이 필요하기 때문에 (1)의 반응은 중요하다.

(1)의 반응에서 표준 산화전위가 −1.229 V로, 표준산화전위가 음의 값으로 작다는 것은 이 산화 반응이 자발적으로 일어나기 힘든 반응이라는 것이다. 반응이 일어나기 힘들다는 것은 활성화에너지가 크다는 것인데, 촉매나 효소가 존재한다면 활성화 에너지를 낮춰 반응을 진행시킬 수 있다. 아마도 식물은 엽록체 내에 광분해를 돕는 효소를 가지고 있어 이 반응을 진행시킬 것이다.

◦ 답안 2

[논제 2]

명반응의 목적은 캘빈회로에서 필요한 ATP와 $NADPH_2$를 만들기 위해서이다. 그런데

$ADP + P_i + NADP^+ + 2H^+ + 2e^- \longrightarrow ATP + NADPH + H^+$ … (2) 와 같은 반응은 에너지가 투입되어야 하는 흡열반응이다. 식물은 태양의 빛에너지를 통해 (2) 반응을 수행하는데 필요한 에너지를 얻는다.

$H_2O \rightarrow 2H^+ + 2e^- + \frac{1}{2}O_2$ … (1) 반응은 태양에너지를 통해 전자를 들뜨게 하고 그 전자가 다시 낮은 에너지준위 상태로 오는 과정에서 ATP를 합성한다. 또한 (1) 반응은 산화반응으로서 환원반응이 일어나기 위해 꼭 필요한 반응이다. 즉, 태양에너지를 화학에너지로 바꾸는데 직접적인 도구가 된다는 점, 그리고 (2)의 환원반응을 위해 전자를 제공하는 반응이 된다는 점에서 (1)은 필요하다.

그러나 (1) 반응은 실험실에서 쉽게 일어날 수 없다. (1)반응의 표준 전극전위가 −1.229 V 이므로, (1)반응이 일어나기 위해서는 환원전위의 절대값이 1.229 V 이상인 반응이 있어,

(표준환원전위) + 1.229 < 0 이 되어야 되기 때문이다.

그런데 그런 반응이 찾기 쉽지 않다. 즉 (1) 반응은 활성화에너지가 큰 반응이다. 따라서 실험실에서 쉽게 일어날 수 없다. 식물은 이런 어려움을 극복하기 위해 효소를 이용한다. 효소는 활성화에너지를 감소시켜 어떤 반응이 쉽게 일어나도록 해주는 생체촉매이다. 그리고 효소를 이용하면 여러 복잡한 반응들을 단계적으로 일으킬 수 있다. 따라서 식물은 효소를 이용하여 물이 광분해되는 어려운 반응을 일으킨다.

∘ 답안 3

논제 2 H_2O가 광분해되어 H^+가 된 이유는 암반응에서 필요한 NADPH와 ATP를 합성하기 위해서이다.

고, H^+가 쓰이기 때문이다. ($2e^-$와)

암반응 과정에서 NADPH와 ATP가 쓰이는데, 이는 명반응의 결과물이~~기 때문이다~~. 그리고, 지구상에서 제일

그래서, (1)의 반응이 필요했다.

풍부한 수소화합물이 H_2O라서 식물은 H^+를 얻기 위해 H_2O를 광분해하는 형식으로 진화했다. 그런데, 이 반응은

쉽게 일어나지 않는데, 그 이유는 H−O간 결합이 매우 강하고, H를 H^+로 만드는 과정에서 필요한 이온화 에너지도

매우 크고

~~크~~고, 또한 물은 열분해되기 전에 증발하는 데다가, 순수한 물은 전기분해가 되지 않기 때문이다.

식물은 이러한 어려움을 '효소'라는 생체 촉매로 극복하였다. 효소로서 $H_2O \rightarrow 2H^+ + 2e^- + \frac{1}{2}O_2$의

활성화 에너지를 낮추어 H_2O가 적은 에너지로도 쉽게 분해될 수 있게 하여 H^+를 확보할 수 있었다.

∘ 답안 4

논제2.

$H_2O \longrightarrow 2H^+ + 2e^- + \frac{1}{2}O_2$ ⋯ (1). 이 반응은 수소이온과 전자를 생성한다는 점에서 빛에너지를 화학 에너지로 변환하는데 중요한 역할을 한다. 이 반응을 통해 수소이온이 생성되고 이렇게 생성된 수소이온의 엽록체 내 농도기울기의 차이로 인해 ATP 합성 단백질 등이 작동하는 등 빛에너지의 화학 에너지로의 전환이 일어난다. 또한 공급된 수소이온은 전자전달에 있어 $NADP^+$와 결합하는 데 필요하다. 그리고 (1)의 과정에서 생긴 전자는 전자전달계를 지나며 ATP의 생성에 큰 역할을 한다.

이 반응은 물의 광분해 반응으로 단순히 물에 빛을 쪼여서 일으키기에는 수소와 산소, 전자간의 인력이 강해서 일어나기 힘들다. 수소와 산소는 전기음성도의 차이가 크고 때문에 비교적 강한 극성 공유결합을 하며 이결합을 끊는데 사용할수 있는 진동수의 전자기파는 태양광중에 적기 때문이다. 이러한 난점을 식물은 효소와 색소를 사용해 해결하였을 것으로 추론된다. 엽록소 내 광분해 효소가 존재하여 광분해 반응의 활성화 에너지를 낮추고 반응에 필요한 빛의 파장을 태양광중 많은 적색과 청색대의 파장으로 대체할수 있는 반응경로를 만듦으로써 물의 광분해 반응이 태양광 아래에서도 잘 일어나게 했을것이라 추론할 수 있다.

▪ 논제 3

통합적인 추론능력을 평가하기 위한 논제이다. 반도체를 이용한 태양광 전지의 원리를 광합성의 원리로부터 유추하고, 제시문에 주어진 광합성의 에너지 효율과 실리콘 반도체 태양광 전지의 에너지 변환 과정에서의 효율 자료를 비교 분석하여, 과학적인 근거를 토대로 대안을 제시하도록 하였다.

광합성 명반응은 빛에너지를 흡수하여 (화학)에너지를 생산하는 반응이다. 이 반응과 유사하게, 태양광 전지는 빛에너지를 흡수하여 (전기)에너지를 생산한다. 제시문에서 설명하고 있는 이 두 반응을 명확히 대응시켜 논리적으로 서술하는 것이 첫 번째 논점이다. 두 번째 논점인 태양광 전지의 효율을 높이는 방안은 다양하게 제시할 수 있다. 제시문 (다)의 [그림 3]에서 보여주고 있는 태양광의 흡수 스펙트럼과 (나)의 [그림 1]의 자료를 비교하여 착안한다면, 1) 넓은 대역 주파수의 전자기파를 흡수하는 기술과 2) 흡수된 에너지를 손실 없이 저장하는 기술 등의 방안이 대표적으로 제시될 수 있다. <답안 1>은 이러한 내용을 따라가고 있다. <답안 2>는 처음 접하는 내용에 대해 논리적으로 추론하는 과정을 보여준다. 과학적으로 정확한 설명은 아니지만 고교과정에서의 지식을 바탕으로 광전효과와 다이오드 등을 연관시킨 설명 또한 흥미로 왔다. <답안 3>은 실리콘을 비롯한 태양광 전지에 대한 정확한 설명은 매우 인상적이지만, 논제에서 요구한 광합성 명반응과의 비교가 빠져있다.

◦ 답안 1

논제 3, 광합성의 명반응에서는, 엽록소가 특정 파장의 빛을 흡수하여 – 주로 청색광과 적색광 – 빛 에너지를 이용해 고에너지 전자를 만들어낸 후, 전자 전달계로 이동시켜 ATP를 합성하게 된다. 이와 비슷하게, 태양광 전지에 쓰인 실리콘도 특정한 파장의 빛을 흡수하게 설계되어 있다. 흡수된 빛 에너지는 식물에서와 마찬가지로 전자로 이동되어, 회로에 전류를 일으키는 원동력으로 작용한다. 에너지를 얻은 전자가 이동함으로써 전위차가 발생하게 되고, 이것은 전류, 즉 전기의 생산이 된다.

그러나 이 태양광 전지의 에너지 효율은 그닥 높지 않다. 지구 대기의 태양 광선 중 실리콘이 흡수할 수 있는 에너지량과 파장은 아직 제한된 부분이 많고, 그 중에 흡수된 태양 에너지도 집약도가 낮아 큰 에너지 발전에는 무리가 따른다. 태양광 전지를 효과적으로 이용하려면, 식물의 명반응 메커니즘을 참고하여 효과적인 에너지 집약 시스템을 설계하는 것이 우선적으로 필요하며, 가능하다면 사용 가능한 빛의 파장과 에너지량을 늘릴 수 있도록 개선하는 것이 좋다.

◦ 답안 2

논제 3.

명반응 과정은 결국 빛에너지를 가지고 전자에 에너지를 공급하여 고에너지 전자를 얻어내는 것이 그 원리였다.

태양광 원리 또한 그와 비슷할 것으로 예상된다. 태양광 발전은 열과 상관 없으므로 광자와 상관이 있을 것이다. 그리고 광자와 전기로 생각할 수 있는 것은 광전효과이다. 하지만 제시문 (나)에 의하면 태양광전지는 실리콘 반도체로 되어 있음을 알 수 있다

반도체 중 광소자 다이오드는 특정 파장의 빛을 받으면 전자를 방출한다. 이것들 대규모로 직렬연결한 것이 태양전지일 것이다.

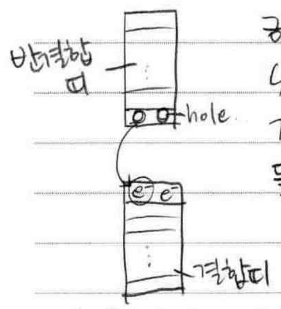
그렇다면 태양광 전지는 특정 파장의 빛을 흡수하기 때문에 효율이 낮을 것이다. 그리고 광소자 다이오드의 전압이 낮기 때문에 많은 광이 직렬연결 되어야 하고, 저항이 높아져 내부저항이 커지게 된다.

이를 보완하기 위해서는 좀더 넓은 파장에 반응하고, 빛에 더 민감한 소자로 만든 광반응 다이오드가 개발되어야 할 것이고 흡수하지 못하고 투과시킨 빛도 다시 흡수시킬수 있는 방안이 필요하다.

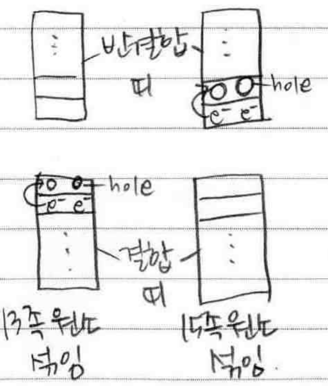
◦ 답안 3

논제3)

(1) 작동원리 : 실리콘과 같은 반도체물질은 자유전자가 비교적 쉽게 들뜬다. 이는 공유원자들이 공유결합을 할때 생성되는 결합띠와 반결합 띠에 의해 설명할 수 있다. Si는 결합띠와 반결합띠간의 에너지준위 차가 다른 공유에 비해 작은편이어서, 자유전자가 비교적 쉽게 결합띠에서 반결합띠로 들뜰수 있다. 그 에너지 준위 차가 가시광선의 에너지 정도라고 할 수 있다.



(2) 효율 높이기 위한 방안 : 13족이나 15족 원소를 약간 섞어서만든 n형 또는 p형 반도체를 생각해볼수 있다. 그런경우 전자가 훨씬 쉽게 들뜰수 있어서 이용가능한 빛의 파장범위가 더 넓어지게 된다.



또한 자외선을 이용할 수도 있는데, TiO_2와 같은 물질은 자외선에 의해 산화 환원 반응이 일어나므로 이를 이용해 전자의 흐름을 잡아낼수도 있다.

또한 더 넓은 영역의 가시광선을 흡수하기 위해 검은색 색소를 쓸수도 있다.

■ 논제 4

태양광 전지의 경제성을 시설비 및 전기요금에 대한 비교를 통해 논제 3에서 확인한 에너지 효율문제와 연결시키도록 하였다. 또한 현재까지는 화석연료에 비해 경제성이 낮은 것으로 평가되고 있는 태양광 전지의 발전 가능성을 제시하도록 하여 대체 에너지원 개발 연구의 방향을 생각해 보도록 하였다.

제시문에서 설명된 내용을 충실히 이해하고 필요한 계산을 정확히 수행하고 있는지, 그리고 계산 과정을 단계별로 나누어 효율적으로 설명할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 태양광 전지의 효율성에 대해서는 논리적으로 타당한 범위 안에서 다양한 제안을 기대할 수 있다. <답안 1>은 필요한 내용을 정확하고 간결하게 잘 기술하였다. <답안 2>는 문제에서 요구하는 계산 자체는 대체로 잘 수행했으나 각 단계 사이의 논리적인 흐름에 대한 설명이 부족한 점이 아쉽다. <답안 3>은 태양광 전지의 발전 가능성을 다양한 시각에서 고찰한 점이 흥미롭다.

◦ 답안 1

논제 4

우선 $10m^2$의 태양전지판을 이용해 한달 동안 발전할 수 있는 전력량을 구한다.

$100W/1m^2 \times 10m^2 \times 8$시간 $\times 30$(일) $= 240kWh$

태양전지판이 한달에 240kWh의 전기를 발전시키므로 이 주택은 60kWh 만큼의 전기요금만 지불하면 된다. 〈표 2〉를 이용해 계산해 보면 300kWh를 사용했을 때의 전기요금은 35150원이고, 60kWh를 사용했을 때의 요금은 3676원이다. 따라서 태양전지판을 사용하면 한달에 31474원을 절약하게 된다. 태양전지판의 설치비용이 10,000,000원이므로 설치비용을 회수하는데 걸리는 시간은 대략 26년 10개월 정도가 된다. 태양전지판의 수명이 20년이므로 태양전지판을 사용할 경우 결국 손해를 보게 되는 것이다. 이를 통해 아직까지는 태양전지판이 경제적이지 못한 발전기라는 것을 알 수 있다. 대체에너지로 태양전지판을 사용하기 위해서는 경제적으로 유리해야 한다. 따라서 설치비용을 줄일 수 있도록 생산원가를 줄이는 방향, 설치비용을 회수하기 위해 수명을 늘리는 방향, 발전 효율을 높이는 방향 등으로 개발을 해야 할 것이다.

◦ 답안 2

논제4

총설치비용 : 100×10 = 1000 만원이고

하루 태양광 전지판의 한달 생산 전력은 30×10×100W×8 = 240kW 이다

한달 태양광 전지판이 아끼는 전력량 요금은 1[illegible]×8 = 1[illegible]원

35150 − 3676 = 31474원 이므로 대략 3만원

$\frac{1000}{3}$ = 333.33 약 333 달 $\frac{333}{12}$ ≒ 28년으로

경제성이 거의 없다 대체 에너지가 되려면 수명과 효율성을 높여야 한다.

◦ 답안 3

논제4.

한 달에 300kWh를 사용하는 가구의 평소 전기요금은

1430 + (55.1×100) + (113.8×100) + (168.3×100) = 35,150 원이다.

이 때 태양광 전지판을 설치하면 설치 비용은 100만원×10 = 1,000 만원이고,

이 전지판이 한달에 공급하는 전력은 100W × 10 × 8 = 8000W = 8kW이다.

(제시문 (다)에서 1m²의 전지판이 100W의 전력을 공급한다고 하였다) 이때

한달이 대략 30일이라면 이 전지판은 240kW를 생산하게 되고, 60kW는

전기요금을 내야 한다. 이는 370 + 55.1×60 = 3,676 원이다.

따라서 전기요금의 차액은 31,474원이고 1,000 만원을 회수하려면

317달, 약 26년이 (≒31500원) 걸린다. 이는 태양 전지의 수명보다 긴시간이므로 설치비용을 회수하기 전에 다시 설치를 해주어야 하고, 따라서 영영 회수할 수 없게 된다.

이와 같이 태양 전지는 개개인의 가정에서 사용하기에는 경제적 손실이 따른다. 그러므로 대규모 농장이나 공업 단지, 산업시설 및 축산시설 등에서 이용하기가 좋고, 환경을 위해 민간으로 보급하기 위해서는 정부의 기술 개발에 대한 투자와 적극적 지원이 필요하고 설치주택에 감세와 같은 경제적 혜택을 주어야 할 것이다.

이때 설치비 감소나 전지의 효율 증강 등이 이루어지고 대체에너지의 필요성에 대한 심각한 인식이 뒷받침되는 상황이라면 앞으로 충분히 전망이 밝다고 할 수 있다.

【문항 4】

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가)

여러 가지 자연현상 및 사회현상은 시간에 따라 변화하는 적절한 양과 그 양의 순간변화율(도함수) 등의 관계식으로 표현할 수 있다. 예를 들어 마찰이 없는 수평면 위에서 용수철에 의해 진동하는 질량 m인 물체의 운동을 기술해보자. y를 용수철 평형점으로부터의 변위(길이)라 하고 용수철 상수를 k라 하면 후크의 법칙에 의해 용수철이 물체에 가하는 힘은 $F=-ky$가 된다. 뉴턴의 운동방정식은 $F=ma$로 표시되는데 가속도 a는 속도 v의 도함수이고, 속도 v는 위치 y의 도함수이므로 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$이고, y를 두 번 미분한 결과 $\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$, 즉 y의 이차 도함수를 $\frac{d^2y}{dt^2}$로 나타내면, 관계식

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0 \qquad\qquad \text{-----(1)}$$

을 얻는다. ($y=f(t)$인 경우 $\frac{d^2y}{dt^2}$를 $f''(t)$로 쓰기도 한다.) 이와 같이 시간에 따라 변하는 양과 이의 도함수들 사이의 관계를 설정한 등식을 총칭하여 미분방정식이라 부른다.

상수 a에 대해

$$\frac{d\sin at}{dt}=a\cos at,\ \frac{d\cos at}{dt}=-a\sin at$$

라는 사실을 이용하면, 함수 $y=\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$를 미분방정식 (1)에 대입했을 때 모든 t에 대해서 등호가 성립함을 쉽게 확인할 수 있다. 이 때, $y=\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$가 미분방정식 (1)을 '만족'시킨다고 말한다. 이와 같이 '주어진 미분방정식을 만족시키는 함수'를 그 미분방정식의 해라고 부른다.

논의를 진행하기 위하여 몇 가지 수학적 사실이 더 필요하다. 우선 수열 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$이 수렴하며 그 극한값을 e로 나타내는데 약 2.71828이다. e를 밑으로 하는 지수함수 e^t은 모든 실수 t에서 미분 가능하며, 임의의 상수 a에 대하여

$$\frac{de^{at}}{dt}=ae^{at}$$

이 성립한다.

자연현상을 설명하는 미분방정식은 그 해가 초기 조건(한 시점에서의 함수값, 도함수값 등)에 의하여 유일하게 결정된다. 구체적인 예를 들기 위해 아래 미분방정식을 살펴보기로 하자.

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \qquad \text{-----(2)}$$

여기서 a와 b는 상수이다. 이 미분방정식의 해 $y = f(t)$가 초기값 $f(0)$에 의해 유일하게 결정됨을 확인해 보자. 이를 위하여 $f_1(t)$와 $f_2(t)$가 미분방정식 (2)의 해이고, 또한 f_1의 초기값 $f_1(0)$과 f_2의 초기값 $f_2(0)$이 같다고 하자. 이 때 함수 $g(t)$를 $g(t) = f_1(t) - f_2(t)$로 정의하면 $f_1(t)$와 $f_2(t)$가 미분방정식 (2)의 해라는 사실로부터 $g'(t) = ag(t)$가 성립함을 알 수 있다. 보조함수 $h(t)$를 $h(t) = e^{-at}g(t)$로 정의하면 모든 실수 t에 대하여 $h'(t) = 0$임을 확인할 수 있다. 따라서 $h(t)$는 상수함수가 되고, $g(0) = f_1(0) - f_2(0) = 0$이므로 모든 t에 대하여 $h(t) = 0$이 된다. 모든 실수 t에 대하여 e^{-at}은 항상 양수이므로, $h(t)$의 정의로부터 $g(t) = 0$이 모든 t에 대하여 성립하게 된다. 따라서 두 함수 $f_1(t)$와 $f_2(t)$는 같은 함수이다.

비슷한 방법으로 미분방정식 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0$의 해 $y = f(t)$가 $f(0)$, $f'(0)$에 의해서 유일하게 결정됨도 보일 수 있다. 이와 같이 미분방정식의 해가 초기 조건에 의해 유일하게 결정되는 것을 통칭하여 미분방정식의 해의 유일성이라 한다.

논제 1. C_1과 C_2가 임의로 주어진 상수라 하자. 보조함수

$$g(t) = (\cos t)f(t) - (\sin t)f'(t)$$

$$h(t) = (\sin t)f(t) + (\cos t)f'(t)$$

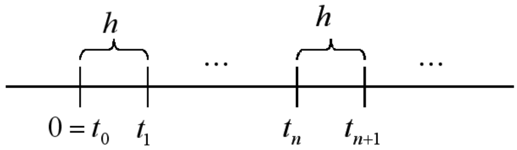
를 이용하여 미분방정식

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \qquad \text{-----(3)}$$

의 해 $y = f(t)$가 초기 조건 $f(0) = C_1$, $f'(0) = C_2$에 의해 유일하게 결정됨을 보이시오.

(나)

컴퓨터를 이용하여 미분방정식의 해를 근사적으로 구할 수 있는데, 가장 간단한 방법은 다음과 같다. 우선 h를 충분히 작은 양수로 택하고, $t_0=0$으로부터 일정한 간격으로 떨어진 $t_0=0$, $t_1=h$, $t_2=2h$, ... $t_n=nh$, ...을 고정하자. 이 $t_0, t_1,$ ... $t_n,$ ...을 격자점이라 부르는데, 우리는 이들 격자점 위에서 미분방정식의 해 $f(t)$의 값을 근사적으로 구하고자 한다.



h가 충분히 작으므로 도함수의 정의 $f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$에 의하여 $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$를 $f'(t)$의 근사값으로 사용할 수 있다.

이제 미분방정식 (2)

$$\frac{dy}{dt}=ay+b$$

의 근사적 해법에 대하여 알아보자. 함수 $y=f(t)$가 초기 조건 $f(0)=y_0$을 만족시키는 미분방정식 (2)의 해라 하자. 위의 관찰로부터 $\dfrac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{h}$이 $f'(t_n)$의 근사값이고 $f'(t_n)=af(t_n)+b$이므로, $\dfrac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{h}$이 $af(t_n)+b$의 근사값이 된다. 따라서 $f(t_{n+1})$을 $(1+ah)f(t_n)+bh$로 근사시킬 수 있다. 그러므로 y_1, y_2, ...을 점화식

$$y_{n+1}=(1+ah)y_n+bh$$

및 초기 조건 $y_0=f(0)$을 이용하여 귀납적으로 정의하면, $n=1, 2, 3,$ ...에 대하여 y_n은 $f(t_n)$의 근사값이 된다.

비슷한 방법으로 미분방정식 (3)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

의 해의 근사값을 구할 수 있다. 이 때 $f''(t_n)$의 근사값으로

$$\frac{f(t_{n+1})-2f(t_n)+f(t_{n-1})}{h^2}$$

을 사용하는데, 그 이유는 다음 공식이 성립하기 때문이다.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-2f(t)+f(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}=f''(t)$$

논제 2. $h=0.1$이라고 하고, $t_0, t_1, t_2, \ldots$을 위에서 정의한 격자점이라고 하자. 미분방정식 (3)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

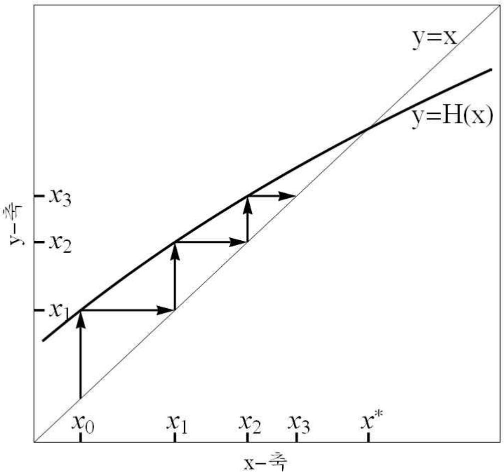
의 해 $y=f(t)$가 초기 조건 $f(t_0)=3$, $f'(t_0)=2$를 만족시킨다고 하자. $f(t_n)$의 근사값 y_n을 귀납적으로 정의하는 점화식과 y_1, y_2의 값을 구하시오.

(다)

위에서 본 바와 같이 미분방정식이 주어지면 그 해를 근사하는 적절한 점화식을 항상 찾을 수 있기 때문에 미분방정식 연구는 점화식 연구와 밀접한 관계가 있다. 우선 함수 $H(x)$를 이용하여 정의한 점화식

$$x_{n+1}=H(x_n)$$

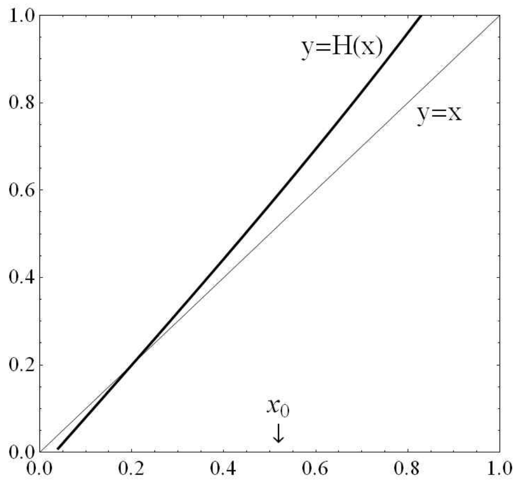
을 살펴보자. 초기값 x_0이 [예시그림 1]에 표시된 바와 같다고 하자. 다음 값 x_1은 $x_1=H(x_0)$이 되는데 이 값이 [예시그림 1]의 y축에 표시되어 있다. 이 점으로부터 수평선을 직선 $y=x$와 만날 때까지 그으면 그 교점의 x좌표는 당연히 x_1이 되며, 이 값이 x축에 표시되어 있다. 이 x_1을 새로운 초기값으로 점화식을 다시 적용하면 다음 값 x_2는 $x_2=H(x_1)$이 되며 이 값이 y축에 x_2로 표시되어 있다. 이 과정을 반복해서 [예시그림 1]에서와 같이 굵게 표시한 화살표들을 그릴 수 있다. 이와 같이 $x_0, x_1, x_2, \ldots$의 움직임에 관한 정보를 화살표들로 그린 것을 x_0에서 시작하는 거미줄그림이라 부른다.



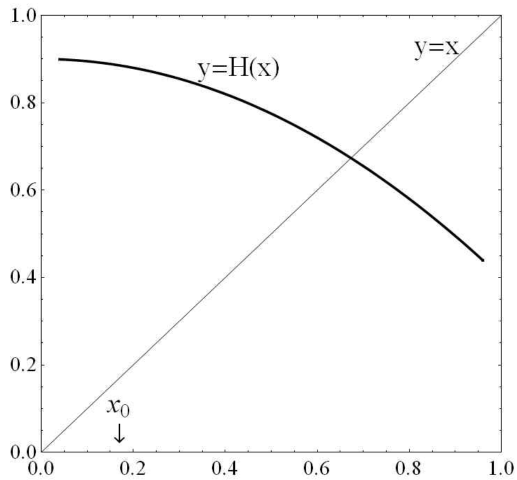
[예시그림 1]

만약 x^*가 $H(x^*)=x^*$를 만족하면 이 x^*를 점화식 $x_{n+1}=H(x_n)$의 부동점이라 부른다. [예시그림 1]에서 볼 수 있듯이 x^*는 $y=H(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표이다. x^*가 점화식 $x_{n+1}=H(x_n)$의 부동점일 때, x^*를 포함하는 적절한 개구간을 잡아서 그 개구간에 속하는 모든 c에 대하여 $x_0=c$, $x_{n+1}=H(x_n)$으로 정의된 수열 $\{x_n\}$이 x^*로 수렴하도록 할 수 있으면, x^*를 안정성을 가진 부동점 또는 줄여서 안정부동점이라 부른다. [예시그림 1]의 경우 x^*는 안정부동점이다. 안정부동점이 아닌 부동점을 불안정부동점이라 부른다.

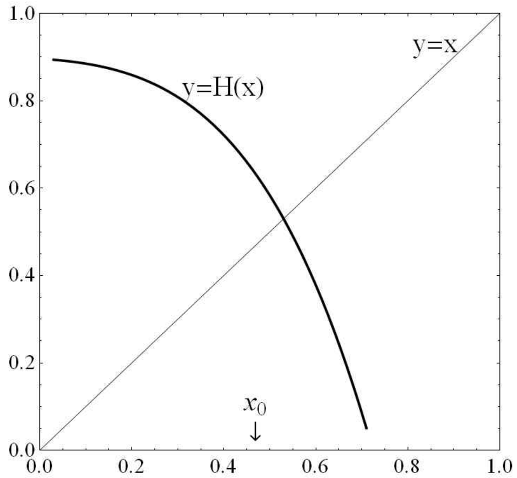
논제 3. 아래에 주어진 [논제 3: 그림 1], [논제 3: 그림 2], [논제 3: 그림 3]에서 함수 $y=H(x)$의 그래프는 굵은 선으로, $y=x$의 그래프는 가는 선으로 표시되어 있다. [논제 3: 그림 1~3]의 경우에 각 그림에 표시된 x_0에서 시작하는 거미줄그림의 개형을 답안지에 그리시오. 이를 기반으로 부동점의 안정성 여부를 일반적인 경우에 대하여 곡선 $y=H(x)$의 기울기와 관련해서 논하시오. (단, 함수 $H(x)$가 미분가능하고 도함수가 연속이며, 부동점 x^*에서 곡선 $y=H(x)$의 기울기는 ± 1이 아니라고 가정한다.)



[논제 3: 그림 1]



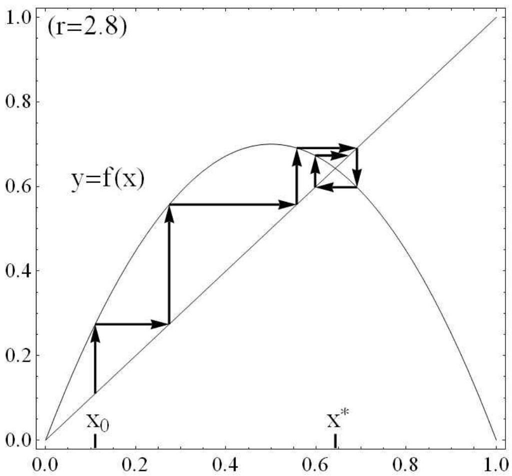
[논제 3: 그림 2]



[논제 3: 그림 3]

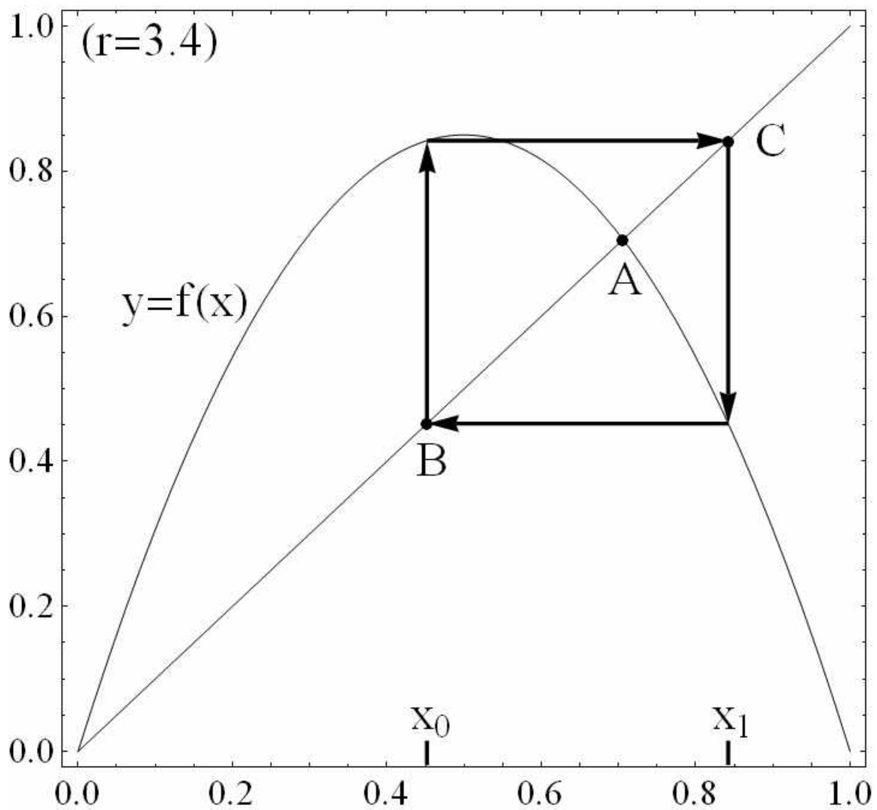
(라)

r을 양의 상수라 하고 $f(x)=rx(1-x)$라 하자. 그리고 $0<c<1$에 대하여 점화식 $x_{n+1}=f(x_n)=rx_n(1-x_n)$ 및 초기값 $x_0=c$로 정의된 수열$\{x_n\}$의 행동을 살펴보기로 하자. 앞으로 이 수열을 c에서 출발한 수열이라 부르자. 또한 c를 $\{x_n\}$의 출발점이라 하자.



[예시그림 2]

[예시그림 2]는 $r=2.8$일 때 거미줄 그림의 예를 보여주고 있다. 이 그림을 통하여 0과 1 사이에 있는 모든 c에 대해서 c에서 출발한 수열이 부동점 x^*로 수렴함을 볼 수 있다. [예시그림 3]은 $r=3.4$인 경우를 보여주고 있는데, 그 특징은 특별한 점 x_0과 x_1이 존재해서 x_0에서 출발한 수열이 x_1으로 간 후 다시 x_0으로 돌아오는 주기 2의 주기적 패턴을 보이고 있다는 것이다.



[예시그림 3]

이제 상수 r의 값을 3.4에서 점차 증가시키면 4, 8, 16, 32 등의 2^n $(n=2, 3, \ldots)$을 주기로 갖는 주기점들이 점차적으로 출현한다. 그리고 r이 약 3.57을 넘게 되면, 소위 카오스 현상이 나타난다. 아래의 <예시표 1>은 이 카오스 현상에 대한 이해를 돕기 위한 것으로 상수 r값을 3.79, 3.80, 3.81로 주고, 이 각각의 경우에 대하여 0.2999, 0.3000, 0.3001에서 출발한 수열의 x_{600}값을 컴퓨터로 계산한 결과이다.

<예시표 1> 상수 r과 초기값 x_0에 따른 x_{600}값

r \ x_0	0.2999	0.3000	0.3001
3.79	0.697998	0.630530	0.271574
3.80	0.882534	0.545618	0.687939
3.81	0.634374	0.700818	0.927301

이 표에서 출발점의 미소한 변화가 시간이 흐른 후에는 큰 차이를 가져옴을 관찰할 수 있다. 또한 상수 r을 근소하게 변화시켜도 결과값에 큰 차이가 나타나는 것을 확인할 수 있다. 이와 같이 출발점의 미소한 차이에 대해 큰 변화를 보이는 것이 카오스 현상의 주요한 특징이다. 또한 카오스 현상은 대부분의 출발점 c에 대해 c에서 출발한 수열이 매우 불규칙해진다는 특징을 가진다. 이러한 카오스 현상은 점화식으로 주어진 수열뿐만 아니라 자연현상에서 도출된 많은 미분방정식들에서도 나타나는데 이 현상은 흥미로움을 넘어 자연현상의 이해에 새로운 도전의 장을 열어주고 있다.

논제 4-1. [예시그림 3]에서 출발점이 임의의 점일 때, n이 증가함에 따라 수열 $\{x_n\}$이 어떻게 행동하는지 추정하고 그 이유를 설명하시오.

논제 4-2. 자연법칙이 미분방정식으로 기술되고 이 미분방정식의 해는 초기조건에 의해 유일하게 결정된다는 사실은 “어느 한 시점의 상태가 미래를 완벽하게 결정한다”는 결정론적 세계관에 지대한 영향을 주었다. 그러나 이러한 결정론적 자연법칙의 지배를 받는 자연현상이라도 만약 그것이 카오스 성질을 가지고 있다면, 초기 조건이 미래를 유일하게 결정한다는 사실에도 불구하고 인간이 미래 시점의 상태를 정확하게 예단하는 일은 실질적으로 불가능하게 된다. 그 이유에 대해 위에서 제시한 사실들을 기반으로 설명하고, 이 사실이 결정론적 세계관에 미치는 영향에 대해 논하시오.

❑ 출제의도 및 문항설명

◦ 자연법칙, 특히 물리학의 법칙은 뉴턴의 운동방정식 F=ma와 같이 많은 경우 시간에 따라 변하는 양과 이의 변화율의 관계로 표시되는데 이러한 법칙의 특징은 어느 한 시점에서의 상태(예: 좌표, 속도, 가속도 등)가 결정되면 미래가 완벽하게 결정된다는 것이다. 수학에서는 이러한 현상을 '유일성' 정리라 부르는데, 이는 지난 몇 백 년 동안 인류의 결정론적 세계관 형성의 과학적, 철학적 기반이 되어 왔다. 그러나 20세기에 들어 발견된 카오스 현상들은 유일성 정리가 성립하는 세계에서라도 결정론적인 미래 예단은 현실적으로 불가능함을 시사해 주고 있다. 이러한 주제는 자연과학 및 사회과학의 연구에서 중요한 화두가 되었다.

◦ 문항 4는 위에서 언급한 일련의 사실들을 단순한 사고 실험(thought experiment)을 통해 발견함으로써 궁극적으로 철학적 결론에까지 도달하도록 유도하였다.

◦ 고등학교 교과과정을 충실히 이수한 학생의 논리적 사고력과 추론능력을 종합적으로 확인하기 위해 다음과 같은 항목을 평가할 수 있도록 제시문과 논제를 구성하였다.

- 고교 과정에서 습득한 지식과 논리적 사고력
- 새로운 개념을 정확하게 이해하는 능력
- 추론을 통해 의미 있는 사실을 발견하는 능력
- 발견한 지식을 응용하는 능력
- 단계적으로 습득한 지식을 종합하여 수학과 과학, 나아가 철학적 사고를 할 수 있는 종합적 사고력

❑ 출전 및 참고 교과서

제시문은 문항의 출제의도에 따라 일반적으로 자연계열 모집단위에 지원하는 학생들이 공통적으로 이수하는 교육과정을 고려하여 논제 해결에 필요한 충분한 설명이 될 수 있도록 작성되었다.

◦ 고등학교 교육과정에서 명시적으로는 다루고 있지 않지만, 물리 교과에서 일부 활용되고 있는 미분방정식의 기본 개념을 설명하고, 유일성 정리에 대한 이해를 돕기 위해 미분방정식의 해의 유일성을 구체적인 예로서 보여주고 있다.

◦ 연속적 현상을 다루는 논제 1과 이산현상을 다루는 논제 3, 4의 연결고리로서 컴퓨터를 이용한 계산 방법을 간단한 예를 통해 설명하였다.

◦ 논제 4에서는 카오스 현상을 이해하는 데 필요한 기초 지식을 제공하고, 이를 이해하도록 하였다.

◦ 마지막 제시문에서는 카오스 현상의 본질에 대해 실제 계산결과를 제시하는 등 접근하기 쉬운 방법으로 설명하였다.

❑ 학생답안

■ 논제 1

이 논제는 단순한 경우에 유일성 정리가 성립하는 이유를 알아보는 것이다. 제시문 (가)에서 설명한 예를 잘 이해하여 유사한 문제에 동일한 방법을 적용하여 문제를 해결하는 응용능력을 평가하였다.

제시문의 내용을 이해하면 쉽게 해결할 수 있는 논제이다. 상당히 많은 학생들이 <답안 1>과 <답안 2>처럼 제시문에서 설명한 방법에 적용하여 문제를 해결하였다. <답안 2>는 중간 과정을 빠짐없이 기술하였고, <답안 1>은 중간 과정에 대한 설명을 일부 생략하고 간단명료하게 설명하였다. <답안 1, 2>는 모두 주어진 방법을 정확히 이해하고 유사한 문제에 적용하여 좋은 평가를 받았다. <답안 3>은 제시문의 방법을 그대로 답습하지는 않았지만 제시문의 방법을 충실히 이해하면 자연스럽게 도출해 낼 수 있는 방법을 발견하여 새로운 문제 해결 방식을 제시하고 있다. <답안 4>는 벡터를 이용하여 결론을 도출했다는 점에서 독창성이 엿보였다.

◦ 답안 1

논제 1. $f_1(t)$와 $f_2(t)$가 미분방정식 (3)의 해이고, 초기 조건 $f_1(0)=f_2(0)=C_1$, $f_1'(0)=f_2'(0)=C_2$를 만족한다고 하자. 이 때 함수 $k(t)$를 $k(t)=f_1(t)-f_2(t)$로 정의하면 $f_1(t)$와 $f_2(t)$가 미분방정식 (3)의 해이므로 $k''(t)=f_2''(t)-f_1''(t)$가 성립한다.

보조함수 $g(t)$를 $g(t)=(\cos t)k(t)-(\sin t)k'(t)$로 정의하면 모든 실수 t에 대하여 $g'(t)=0$임을 확인할 수 있다. 따라서 $g(t)$는 상수함수이며, $g(0)=k(0)=0$을 만족하므로

$$(\cos t)k(t)-(\sin t)k'(t)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

보조함수 $h(t)$는 $h(t)=(\sin t)k(t)+(\cos t)k'(t)$로 정의하면 마찬가지로 $h'(t)=0$이고, $h(0)=k'(0)=0$이므로 $h(t)$는 상수함수이다. 그러므로

$$(\sin t)k(t)+(\cos t)k'(t)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

①의 양변에 $\cos t$를 곱하고 ②의 양변에 $\sin t$를 곱해서 더하면 $k(t)=0$이 모든 t에 대하여 성립하게 된다. 따라서 두 함수 $f_1(t)$와 $f_2(t)$는 같은 함수이다.

◦ 답안 2

논제 1.

$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$ 을 만족시키는 함수 $f_1(t)$, $f_2(t)$를 생각해보자.

$f_1(0)=f_2(0)=c_1$

$f_1'(0)=f_2'(0)=c_2$ 라고 가정하자.

이때 $f_1(t)-f_2(t)=k(t)$ 라고 잡아보자.

그럼 $f_1''(t)-f_2''(t)=k''(t)$

$f_1''(t)+f_1(t)=0$. $f_2''(t)+f_2(t)=0$ 이므로

$k''(t)=-f_1(t)+f_2(t)=-k(t)$ 라고 할수있다

$k''(t)+k(t)=0$ 이 항상 성립하게된다.

그리고 $k(0)=f_1(0)-f_2(0)=0$

$k'(0)=f_1'(0)-f_2'(0)=0$.

보조함수로

$g(t)=(\cos t)(k(t))-(\sin t)k'(t)$ 을 생각하면

$g'(t)=-\sin t(k(t)+k''(t))=0$ (모든 실수 t에 대해).

따라서 $g(t)$는 상수함수가 된다.

$g(0)=0$ 이므로 $g(t)=0$ 이라는 함수이다.

$h(t)=(\sin t)(k(t))+(\cos t)(k'(t))$ 를 생각하면.

$h'(t)=\cos t\,(k(t)+k''(t))=0$ (모든실수 t에대해)

따라서 $h(t)$는 상수함수가된다.

$h(0)=0$ 이므로 $h(t)=0$ 이라는 함수이다.

즉,

$(\cos t)(k(t))-(\sin t)(k'(t))=0$ ‥①

$(\sin t)(k(t))+(\cos t)(k'(t))=0$ ‥② 이 항상 성립하게된다

①번식에 양변 $\cos t$를 곱하고 ②번식 양변에 $\sin t$를 곱해서 더하면

$(\cos^2 t+\sin^2 t)(k(t))=0$.

$k(t)=0$ ($\because \sin^2 t+\cos^2 t=1$. 모든실수 t에대해))

따라서 $f_1(t)=f_2(t)$가 되어. 유일하게 결정됨을 알수있다

◦ 답안 3

논제 1

첫째, $g(t) = (\cos t) f(t) - (\sin t) f'(t)$

$g'(t) = (-\sin t) f(t) + (\cos t) f'(t) - (\cos t) f'(t) - (\sin t) f''(t)$

$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ 이므로 $f''(t) = -f(t)$ 이다. 위 식에 대입하면,

$g'(t) = 0$ 이므로 $g(t)$는 상수함수이다.

그리고 $g(0) = C_1$ 이므로 $g(t) = C_1$ 임을 알 수 있다.

둘째, $h(t) = (\sin t) f(t) + (\cos t) f'(t)$

$h'(t) = (\cos t) f(t) + \cancel{(\sin t) f'(t)} + \cancel{(-\sin t) f'(t)} + (\cos t) f''(t)$

$= (\cos t) f(t) + (\cos t)(-f(t))$

$= 0$

$h'(t) = 0$ 이므로 $h(t)$는 상수함수 이고 $h(0) = f'(0) = C_2$ 이므로

$h(t) = C_2$ 임을 알수 있다.

셋째,
$$\begin{cases} (\cos t) f(t) - (\sin t) f'(t) = C_1 & \cdots ① \\ (\sin t) f(t) + (\cos t) f'(t) = C_2 & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② $\times \frac{\sin t}{\cos t}$ 를 계산하면,

$\left(\cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t}\right) f(t) = C_1 + \frac{\sin t}{\cos t} C_2$ 양변에 $\cos t$를 곱하면,

$f(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

따라서 $y = f(t)$ 가 초기조건 $f(0) = C_1$, $f'(0) = C_2$ 에 의해 유일하게 결정됨을 알 수 있다.

◦ 답안 4

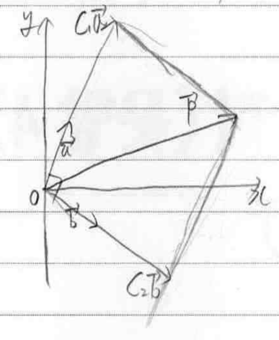
1. $g'(t) = -(\sin t) f(t) + (\cos t) f'(t) - (\cos t) f'(t) - (\sin t) f''(t) = -(\sin t)\{f(t) + f''(t)\} = 0$

$h'(t) = (\cos t) f(t) + (\sin t) f'(t) - (\sin t) f'(t) + (\cos t) f''(t) = (\cos t)\{f(t) + f''(t)\} = 0$ ($\because$ $f(t)$는 주어진 식의 해)

$\Rightarrow g'(t) = 0,\ h'(t) = 0$

$\Rightarrow g(t) = C_1,\ h(t) = C_2$ ($\because g(0) = C_1,\ h(0) = C_2$)

$\vec{a} = (\cos t, -\sin t)$, $\vec{b} = (\sin t, \cos t)$, $\vec{p} = (f(t), f'(t))$로 정의하자.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이므로 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 이다.

$g(t) = \vec{a} \cdot \vec{p} = C_1 \quad h(t) = \vec{b} \cdot \vec{p} = C_2$ 이므로

$\vec{p}$의 종점에서 $\vec{a}$ 방향 직선에 내린 수선의 발은 $C_1\vec{a}$의 종점과 같고, $\vec{p}$의 종점에서 $\vec{b}$ 방향 직선에 내린 수선의 발은 $C_2\vec{b}$의 종점과 같다 ($\because |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$)

이때 $\vec{p}$의 성분은 하나로 결정된다 (세점이 정해진 직사각형위의 나머지 한 점) 따라서 $f(t)$는 초기조건에 의해 유일하게 결정된다

■ 논제 2

제시문에 설명된 컴퓨터를 이용한 계산 방법을 이해하고 이를 유사한 문제에 적용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

제시문 (나)에서 이미 2차 도함수의 근사식이 주어졌기 때문에 이를 이용하면 점화식은 쉽게 도출할 수 있다. 다만 수학적 표현의 엄밀성을 고려해서 근사적 등호와 엄밀한 등호는 구분해서 사용하는 것이 필요한데, 대부분의 답안이 근사적 등호를 엄밀한 등호와 혼동하여 사용하였다. <답안 1>이 이러한 예이다. <답안 2>는 근사적 등호와 엄밀한 등호의 구분을 정확히 하였고, <답안 3>은 표현상의 약간의 무리는 있지만 이 구분을 염두에 두고 논의를 전개한 예라고 할 수 있다. 또 y_1을 제대로 구하지 못한 경우가 많았는데, 이는 제시문 (나)에서 주어진 1차 도함수의 근사식을 사용해서 y_1을 구할 수 있다는 것을 이해하지 못했기 때문으로 보인다.

∘ **답안 1**

$\boxed{\text{논제 2}}$

$f''(t_n)+f(t_n)=0$ 에 $f''(t_n)$의 근사값 $\frac{f(t_{n+1})-2f(t_n)+f(t_{n-1})}{h^2}$ 을 대입한다.

그러면 다음과 같다.

$$f(t_{n+1})+(h^2-2)f(t_n)+f(t_{n-1})=0$$

따라서 $f(t_n)$의 근사값 y_n의 귀납적 정의는

$$y_{n+1}+(h^2-2)y_n+y_{n-1}=0$$

$f(t_0)=3$ 이므로 y_0 또한 3 이다.

$f'(t_n)$의 근사값 $\frac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{h}$ 를 이용하면 초기조건 $f'(t_0)=2$ 를 이용해 y_1을 구할 수 있다.

$$f'(t_0)=2=\frac{f(t_1)-f(t_0)}{h} \quad \therefore f(t_1)=y_1=y_0+2h=3.2$$

$y_0=3$, $y_1=3.2$ 이므로 y_n의 귀납적 정의에 이를 대입하면 y_2를 구할 수 있다.

$$y_2+(h^2-2)y_1+y_0=0$$

$$\therefore y_2=3.368$$

◦ 답안 2

논제2

$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$ 을 만족시키는 함수 $f(t)$를 잡자

$f(t_0)=y_0$이라고 하고 시작하면

$t_0, t_1, t_2 \cdots$ 의 격자점을 잡으면

$f''(t_n)$은 $\frac{f(t_{n+1})-2f(t_n)+f(t_{n-1})}{h^2}$ 으로 근사시킬수 있다.

따라서 $\frac{f(t_{n+1})-2f(t_n)+f(t_{n-1})}{h^2}$ 이 $-f(t_n)$이 근사값이된다

그 결과 $f(t_{n+1})=(2-h^2)f(t_n)-f(t_{n-1})$로 근사시킬수 있다

$y_1=f(t_1)$ $y_2=f(t_2)$ ... 이렇게 잡으면

$y_{n+1}=(2-h^2)y_n-y_{n-1}$. $(y_0=f(t_0))$. 이 나온다.

$f(t_0)=3$ 이므로 $y_0=3$ $h=0.1$ 이므로

$y_{n+1}=1.99y_n-y_{n-1}$ 이라고 할수있다

$f'(t_0)$은 $\frac{f(t_1)-f(t_0)}{0.1}$로 근사시킬수있으므로

$2=\frac{f(t_1)-3}{0.1}$ $\therefore f(t_1)=3+0.2=3.2$ 가되어 $y_1=3.2$.

위 점화식으로 y_2를 구해보면

$y_2=1.99\times3.2-3$.

$=6.368-3=3.368$ 이 나온다

$\therefore y_1=3.2$

$y_2=3.368$ 이 된다.

◦ 답안 3

논제2. 제시문에서 $f''(t_n)\fallingdotseq\frac{f(t_{n+1})-2f(t_n)+f(t_{n-1})}{h^2}$ 이고 $f''(t_n)+f(t_n)=0$ 이므로

대입 후 정리하면

$f(t_{n+1})-(2-h^2)f(t_n)+f(t_{n-1})\fallingdotseq0$ 이다.

$\therefore f(t_n)$의 근사값 y_n을 생각해 보면

$y_{n+1}-(2-h^2)y_n+y_{n-1}=0$ 이다. (y_n의 점화식).

이 때 제시문에서 $f'(t_n)\fallingdotseq\frac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{h}$ 이므로 $n=0$을 대입하면

$f(t_0)=3$, $f'(t_0)=2$ 이므로

$2h\fallingdotseq f(t_1)-3$. $h=0.1$ 이므로 $y_1=3.2$ 이다

여기서 y_n의 점화식에 1을 대입하면

$y_2-(2-h^2)\times3.2+3=0$ $\therefore y_2=(2-0.01)\times3.2-3=3.4-0.032=3.368$

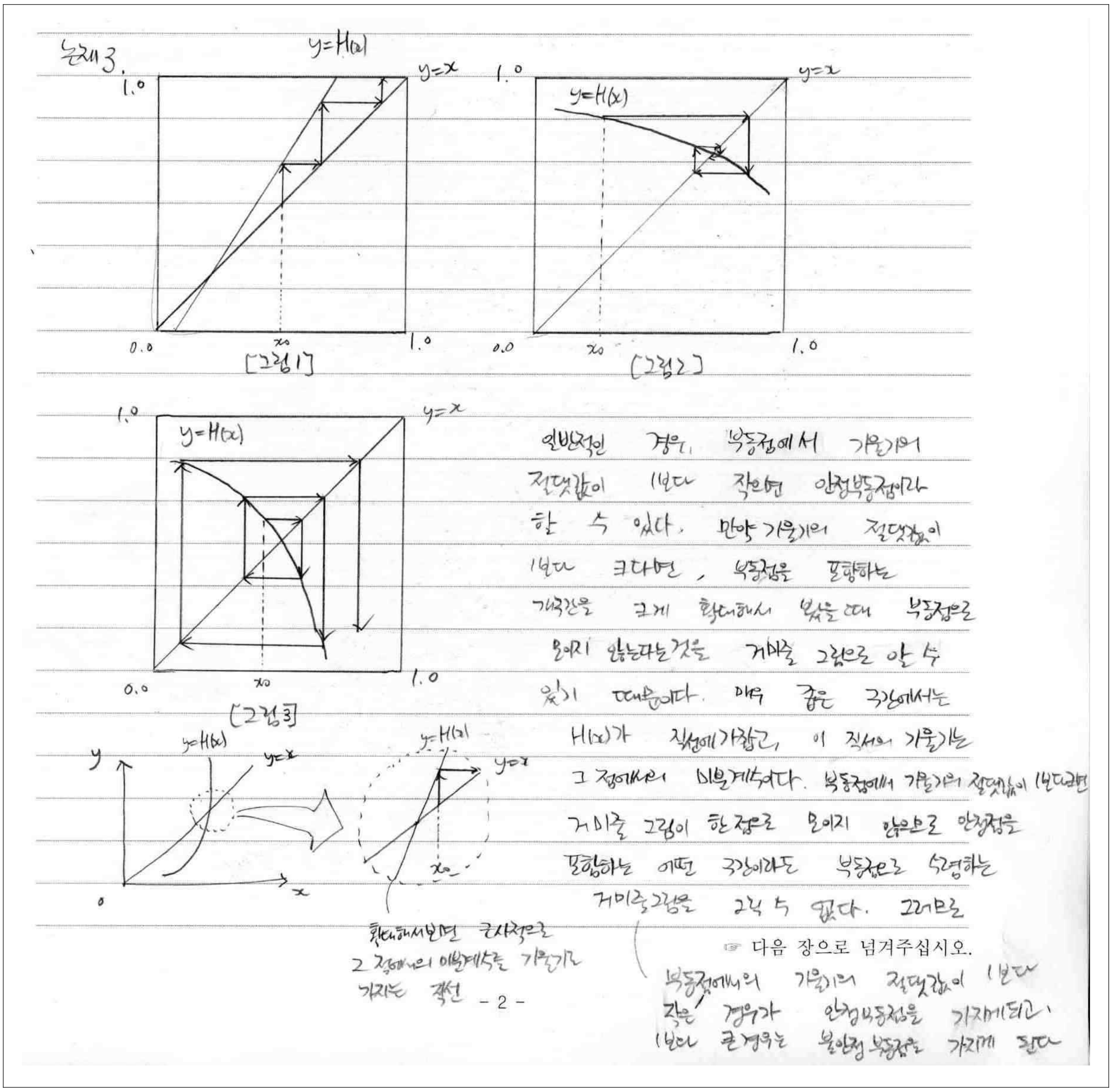
$\therefore y_1=3.2$, $y_2=3.368$ 이다.

■ 논제 3

함수의 그래프(거미줄그림)를 이용한 단순한 사고 실험(thought experiment)을 통하여 직관적이고 정성적으로 수학적 사실을 ‘발견’할 수 있도록 하였다.

많은 학생들이 논제에서 요구한 3개의 거미줄그림을 정확히 그리고, 부동점 부근의 $H(x)$ 기울기의 절대값이 1보다 작으면 안정부동점이고 1보다 크면 불안정부동점임을 추정하였다. (실제로 $H(x)$의 도함수가 연속이므로 이 기울기에 대한 표현은 부동점 한 점에서의 기울기에 대해 답을 해도 무방하다.) <답안 1>은 이 사실을 발견한 후 왜 그러한 사실이 맞는지에 대한 이유를 좀 더 설득력 있게 제시하였다. <답안 2>는 전체적으로 단순명료하게 설명하였지만 부동점의 안정성에 관한 이유를 제시하지는 않고 있다. <답안 3>도 <답안 2>와 마찬가지로 기울기가 0인 경우에 대한 언급이 결여되어 불완전한 논의 전개로 간주할 수 있다.

◦ 답안 1



일반적인 경우, 부동점에서 기울기의 절댓값이 1보다 작으면 안정부동점이라 할 수 있다. 만약 기울기의 절댓값이 1보다 크다면, 부동점을 포함하는 구간을 크게 확대해서 봤을 때 부동점으로 모이지 않는다는 것을 거미줄 그림으로 알 수 있기 때문이다. 매우 좁은 구간에서는 H(x)가 직선에 가깝고, 이 직선의 기울기는 그 점에서의 미분계수이다. 부동점에서 기울기의 절댓값이 1보다 크면 거미줄 그림이 한 점으로 모이지 않으므로 안정점을 포함하는 어떤 구간이라도 부동점으로 수렴하는 거미줄 그림을 그릴 수 없다. 그러므로 부동점에서의 기울기의 절댓값이 1보다 작은 경우가 안정부동점을 가지게 되고, 1보다 큰 경우는 불안정 부동점을 가지게 된다

◦ 답안 2

논제 3.

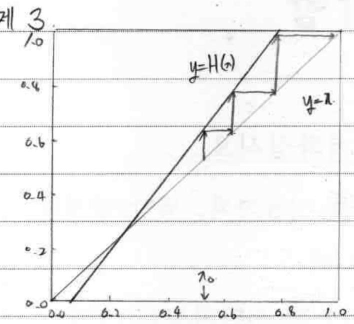


그림1. 불안정 부동점.

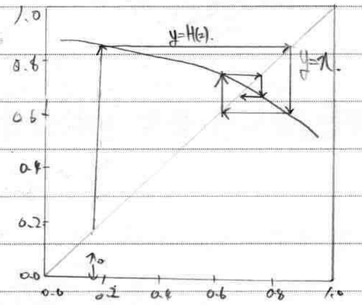


그림2. 안정 부동점.

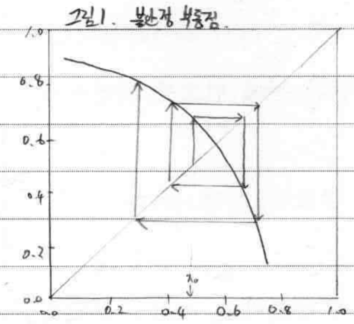


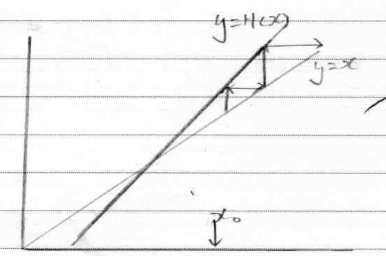
그림3. 불안정 부동점.

부동점이 안정부동점이 되기 위해서는 부동점 x^*에서 $H(x)$의 기울기가 -1 보다 크고 $+1$ 보다 작아야함을 추론할수 있다.

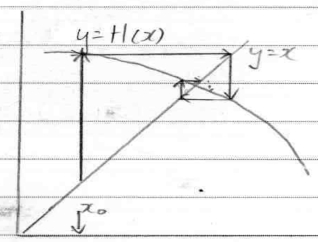
그림1과 같이 x^*에서의 $H(x)$의 기울기가 1보다 크다면 $x_{n+1}=H(x_n)$ 에서 x_{n+1}의 값이 항상 x_n 보다 커지므로 불안정부동점이 된다.

◦ 답안 3

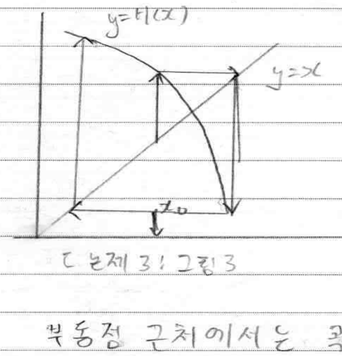
3,



[논제 3 ; 그림 1]



[논제 3 ; 그림 2]



[논제 3 ; 그림 3

부동점 근처에서는 곡선은 거의 직선에 근사하고 그 기울기는 부동점에서의 미분값이므로 이에 따라 유형을 나누자

기울기를 T 라 할 때

① 제시문의 $H(x)$는 $1<T$

② [그림 1]의 경우 $0<T<1$

③ [그림 2]의 경우 $-1<T<0$

④ [그림 3]의 경우 $T<-1$

이라 볼 수 있다. 거미줄 그림에서 보듯이 ①,③의 경우 안정 부동점이 되고 ②,④의 경우 불안정 부동점이 된다.

■ 논제 4

이 논제의 중심 주제는 카오스 현상이다. 논제 3의 사고 실험(thought experiment)을 심화하여 수행하게 함으로써 카오스 현상의 본질을 이해하고, 궁극적으로는 카오스 현상이 결정론적 세계관의 수정에 어떻게 기여할 수 있는지 논의하도록 하였다.

◦ 논제 4-1

논제 3의 사고 실험(thought experiment)을 심화한 것이다. 제시문 (라) [예시 그림 3]은 정확한 수치에 근거하여 그려진 것으로 다양한 출발점을 잡아 작도를 정확하게 해보면 어렵지 않게 수열의 행동을 추정할 수 있다. 예시된 답안이 모두 이 행동을 맞게 추정하였으나, 그 이유는 설득력 있게 제시하지 못하였다. <답안 4>는 비록 계산이나 논리 전개가 맞지는 않지만 x_0과 x_1이 f를 자신과 합성한 함수 $f^2(x) = f(f(x))$의 안정부동점이라는 사실을 추측하고 그 이유를 찾고자 시도한 점은 높이 평가할 만하다.

◦ 답안 1

논제 4-1 먼저, $r=3.4$ 일 때의 부동점을 구해보자. 부동점의 x 좌표를 α라고 하면,
$\alpha = 3.4\alpha(1-\alpha)$ 이므로, $1-\alpha = \frac{1}{3.4}$ 이므로, $\alpha \fallingdotseq 0.706$ 이다. 이 때의 $H(x) = 3.4x(1-x)$
의 미분계수를 구해보면, $x=0.706$을 대입하면,
$H'(x) = 3.4(1-x) - 3.4x = 3.4 - 6.8x$ 이므로, $H'(0.706) \fallingdotseq -1.401$ 이므로, 논제 3에서
구한 바와 같이 점A(0.706, 0.706)은 불안정 부동점이다. 따라서, $r=3.4$ 일 때 거미줄 그림을
시행하게 되면, [예시그림 3]의 A점에 다다르지 못하고, 오히려 점A에서 멀어진다. 그러나, $r=3.4$일
때는 특이하게 B와 C점을 대각선으로 하는 사각형으로 거미줄 그림을 시행할 수 있다. 즉, 임의의
점에서 거미줄 시행시 점 A에서는 벗어나지만 시행횟수 n이 커질수록 [예시그림 3]의 사각형에
점점 더 가까워 진다는 것을 알 수 있다. 즉, 수열로 말하면, B점과 C점 사이를 진동하게 되어, 극한값이
없는 상황이라고 볼 수 있다.

◦ 답안 2

논제 4-1. 출발점이 임의의 점일 때, n이 증가함에 따라 수열 $\{x_n\}$은 점점, 제시된
주기형의 사각형에 한없이 다가가게 된다. 마치 보통의 수열이 수렴,
발산, 진동의 형태를 갖듯이 거미줄 그림도 수렴 (안정부동점), 발산
(불안정 부동점), 진동 (위 예시그림) 의 경우를 갖는 것이다. 위의 $y=f(x)$는
발산하려는 두 개의 그래프, 즉 $y=f(x)$ (0, 0.5) 와 $y=f(x)$ (0.5, 1) 이
서로 만나 예시그림의 사각형처럼 균형을 이루게 된다. 즉, 어느 시작점을
취하더라도 그림에 주어진 사각형의 내부와 외부를 배회하는 형태의 진동을
이루게 되는 것이다.

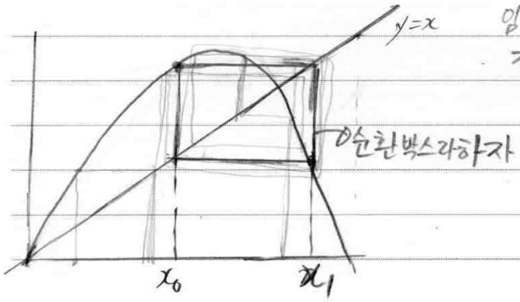
◦ 답안 3

논제 4

4-1

임의점 x 에 대해서 n이 증가함에따라 $\{x_n\}$은 순환되는

x_0과 x_1를 번갈아가며 나타낼 것이며 그 이유는 임의의 점 x가 $f(x)$의 기울기가 1보다 큰 점에서 잡혔을 경우 $\{x_n\}$는 증가 하는것 같지만 $\{x_n\}$이 증가해 순환되는 패턴 박스 안에 들어가게되면 $\{x_n\}$은 순환박스안에서 A점을 주변으로 점점 확장되어 나가게됨으로 순환박스의 테두리 인 x_0과 x_1에 가까워지게 된다



임의점 $\{x_n\}$이 $f(x)$ 기울기가 <1 인지점에 잡혀도 마찬가지로 A점 주변을 돌다가 x_0와 x_1 점에게 점점 다가가게된다

◦ 답안 4

$\boxed{\text{논제 4-1}}$

두 주기점에 r_1 번갈아가며 매우 가까워지며 진동하면서 수렴한다.

그 이유는 $(f\circ f)(x) = r(rx(1-x))(1-rx(1-x)) = r^2(x-x^2)(1-rx+rx^2)$

$= r^2(x - rx^2 + \cancel{rx^3} - x^2 + \cancel{rx^3} - rx^4) = r^2(x - \cancel{2x} - (r+1)x^2 - rx^4)$ 에서

$(f\circ f)(x) = h(x)$

$\{x_{2n}\} = \{a_n\}$ $\{x_{2n-1}\} = \{b_n\}$이라 하고, 주기점을 각각 a, b 라하면

$h'(x) = r^2(1 - 2(r+1)x - 4rx^3)$ $h(a)=a$ $h(b)=b$

$\forall a_0, b_0$에 대해 $a_{n+1} = h(a_n)$ $b_{n+1} = h(b_n)$인 $\{a_n\}, \{b_n\}$에서

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ or b

◦ 논제 4-2

카오스계의 가장 큰 특징 중 하나가 초기조건의 미세한 변화가 궁극적으로는 엄청난 차이를 가져 온다는 것이다. 제시문 (라)의 <예시표 1>은 이러한 사실을 컴퓨터 계산을 통해 보여주고 있다. <답안 1>은 이러한 취지로 카오스계에서 결정론적 세계관이 성립하기 어려운 이유를 간단하게 서술하고 있다. <답안 2>도 이와 비슷한 이유로 논의를 전개하였다. <답안 3>도 같은 내용으로 표현이 가장 간결하다. <답안 4>도 동일한 결론을 유추했으나, 초기조건을 정확하게 측정할 수 없는 이유를 하이젠버그의 불확정성 원리를 가지고 설명하는 등 좀 더 구체적 이유를 제시하려고 시도한 점이 매우 인상적이다. 한 가지 아쉬운 점은 <예시표 1>의 계산 결과의 신뢰성에 대해 의문을 제기하지 않았다는 것이다. <예시표 1>이 카오스계에 대한 계산 결과이고 또 카오스계가 초기조건에 민감하게 의존한다면 주어진 <예시표 1>의 결과는 어떻게 믿을 수 있느냐는 본질적 질문으로부터 논의를 전개했다면 좋았을 것이다. 카오스 현상과 결정론적 세계관의 관계는 제시문 (라)와 아래 예시 답안들이 제시하는 것 외에도 많은 논쟁거리가 있지만 주어진 제시문을 벗어나는 내용이며 일반적인 고등학생으로부터 이에 대한 언급을 기대하기는 어려워 보인다.

◦ **답안 1**

2. 초기 조건이 미래를 유일하게 결정한다는 말이 옳지만 문제는 우리가 모든 초기조건을 구할수가 없다는 것이다. 만약 아주미세한 조건 하나라도 놓친다면 카오스 현상에 의해 미래에는 엄청난 차이의 결과를 나타낼것이다. 그러므로 미래를 예견할수 없는 것은 인간의 능력으로 그 초기조건을 100% 완벽하게 구할수 없다는 데에서 기인한다.

이것으로 보아 "어느 한 시점의 상태가 미래를 완벽하게 결정한다"라는 결정론적 세계관이 옳다고 할지라고 그 미래에 대해 인간은 아무것도 예측할수 없기때문에 이론만 존재하는 아무 의미없는 세계관이 되고 말것이다

◦ 답안 2

논제 4-2
인간은 자연법칙의 미분방정식은 알 수 있어도 초기조건을 정확히 모름으로 초기조건을 근사하게 밖에 알수 없는데 자연현상이 초기조건의 미소한 차이에 따라 큰 차이가 나타나는 카오스 성질을 가지고 있다면 초기조건을 근사해 봤자 결정된 미래의 일을 근사해 알아 낼수 없으며 이때문에 자연현상이 초기조건에 따라 움직인다 해도 초기조건을 정확히 모르는 한 미래를 예단하는 일은 불가능한 것이다.
결정론적 세계관처럼 미래가 결정되 있다고 해도 우리는 그것을 알수 없으며 그말은 미래에 대해 알수없음으로 인해 예측정도 밖에 할수 없으며 실제로 자연현상이 결정론적이라고 해도" 우리는 비결정론적인 해석만 할수 있는 비결정론적 세계관에서 살고 있다는것 이며 결정론은 실제로 사용되기 힘든 이론인것이다

◦ 답안 3

4-2 자연현상이 카오스적 성질을 가지고 있다면 초기값에 매우 민감하게 반응한다. 인간은 자연현상을 오차 없이 측정하는게 불가능하므로, 초기조건이 미래를 유일하게 결정하더라도 초기조건을 정확히 알 수 없으므로 예측이 불가능하다.

◦ 답안 4

논제 4-2) 어떤 자연현상이 카오스 성질을 가지고 있다면, 출발점의 미소한 변화가 미래 시점에서는 커다란 변화를 가져오게 된다. 따라서 인간이 미래 시점의 일을 정확히 예견하기 위해서는 출발점의 상태에 대해 정확한 정보를 갖는 것이 중요하다. 그러나 하이젠베르그의 불확정성 원리에 따르면, 인간의 측정은 필연적으로 어떤 한계를 갖는다. 즉, 측정은 항상 일정한 오차를 포함한다.
따라서 카오스 성질을 갖는 자연 현상에 대해서는, 이러한 오차를 포함한 측정은 큰 의미가 없다. 즉, 인간이 미래 상태를 정확히 예견하는 것은 사실 불가능한 것이다. 따라서 우리는 「우리의 미래는 자연법칙에 의해 유일하게 결정된다」라는 사실을 알면서도, 그 미래에 대해서는 알 수 없다. 이러한 사실은 결정론적 세계관을 통해 모든 것을 알 수 있다는 생각에서 탈피하게 되었지만, 동시에 이러한 결정론적 세계가 가져다 주는 허무감과 무력감으로부터도 탈피할 수 있게 해주었다