2009학년도 대학 신입학생 정시모집
자연계열 논술문항

서 울 대 학 교

【문항 1】

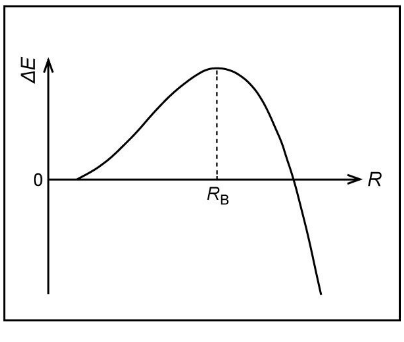
✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가)

물은 지표 위에서 가장 풍부한 물질이다. 지구 표면의 약 72%가 바다로 덮여 있고, 그 밖에 빙하, 호수, 강, 지하수, 대기 중의 모든 곳에 물이 존재한다. 지구를 푸른 행성이라 부를 수 있는 것은 지구상에 땅보다 물이 많기 때문이다. 우주 공간에는 거의 없는 물이 지구에 풍부한 것은 지구상에 생명체가 번성할 수 있는 필수적인 조건이 된다. 이와 같이 물은 모든 생물들을 이루는 주요 구성 성분으로, 만약 물이 없다면 지구상의 생물은 존재할 수 없을 것이다. 사람의 몸은 약 70%가 물로 구성되어 있다. 여기에서 1~2%만 잃어도 심한 갈증과 괴로움을 느끼게 되고, 5%정도 잃으면 혼수상태에 빠지게 되며, 12%이상 잃으면 생명을 잃게 된다.

물 분자는 수소 원자 2개와 산소 원자 1개로 이루어져 있다. 산소 원자와 수소 원자는 각자의 전자를 내놓아 전자쌍을 만들고, 이 전자쌍을 서로 공유함으로써 결합하고 있다. 이때 전자쌍은 산소 원자 쪽으로 치우쳐 있기 때문에, 물 분자는 극성을 가지고 있다. 이러한 극성으로 인하여 물에서는 산소 쪽의 (-) 전하와 이웃 물분자의 수소 쪽의 (+) 전하 사이에서 서로 잡아 당기는 힘이 발생한다. 이를 수소결합이라고 하며, 수소결합 에너지는 약 18kJ/mol로 알려져 있다. 이러한 수소결합에 의해 물은 매우 독특한 성질을 보여주고 있다. 분자량이 같은 다른 액체들에 비해 높은 녹는점, 끓는점, 비열, 용해력을 가지고 있다. 물의 밀도는 약 1g/mL이며 비열은 4.2J/g℃, 응고열은 6.0kJ/mol, 기화열은 40.7kJ/mol이다. 또한 1기압에서의 녹는점은 0℃이고 끓는점은 100℃이다. (화학 1 교과서)

대기 중에서 수증기가 과포화되면, 수증기는 더 안정한 물의 상태로 변환하는 것이 에너지 측면에서 유리하다. 이때, 수증기 분자가 서로 결합하여 물방울로 변환 될 때의 에너지는 $\Delta E = -nVkT\log(P/P_S)$로 주어진다. 여기서 n은 단위부피당 물 분자의 수, V는 물방울의 부피, P는 대기의 수증기 분압이고, P_S는 포화 수증기 분압이다. 대기 중에서 생성된 물방울은 물의 표면장력에 의해 구의 형태를 가지게 된다. 생성된 물방울이 작을 때에는 다시 증발하여 수증기가 되어 계속적으로 응결 및 증발을 되풀이 한다. [그림 1]은 물방울 생성 에너지 ΔE를 물방울의 반경 R의 함수로 개략적으로 보여주고 있다.



[그림 1]

(나)

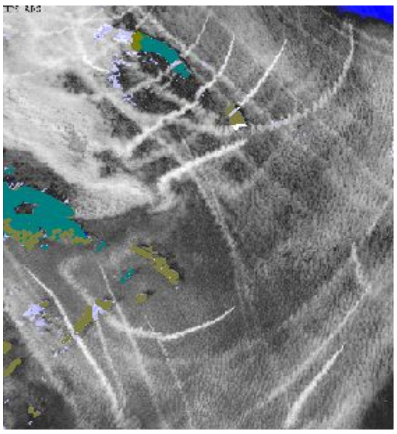
자연 상태의 공기 속에는 해수면으로부터 올라간 충분한 양의 해염 입자가 존재한다. 해염 입자가 물방울에 용해되면 물방울의 표면장력은 증가하고 증기압력은 감소하는 현상이 발생한다. 이때 작은 물방울의 경우 표면장력 증가보다 증기압력 감소의 효과가 더 크게 나타난다. 물의 증기압력 감소 현상은 아래와 같이 설명될 수 있다. 같은 크기의 그릇에 순수한 물과 소금물을 같은 양씩 넣고, 방치한 후 비교하면 순수한 물이 더 빠르게 줄어드는 것을 관찰할 수 있다. 소금과 같은 비휘발성 용질이 물에 용해되면 용질 입자가 용액 표면의 일부를 차지하여 표면에서 증발하는 용매 분자의 수가 순수한 용매의 경우에 비해 줄어든다. 따라서 같은 온도에서 소금물의 증기압력은 순수한 물의 증기압력보다 작으며, 소금과 같은 비휘발성 용질의 농도가 진할수록 증기압력은 작아지는데, 이러한 현상을 증기압력 감소 현상이라고 한다. (화학 2 교과서)

자연 상태에서 단열냉각에 의해 구름이 생성되기 위해서는 수증기를 포함한 공기가 상승해야 한다. 공기의 상승에 따라 온도가 감소하고 이에 따른 포화수증기압이 감소하게 되어 응결이 일어나게 된다. 하지만 순수한 수증기만으로 응결이 일어나기 위해서는 상대 습도가 400% 이상 되어야 한다. 대기 중에 구름이 있다고 해서 항상 강수 현상이 뒤따르는 것은 아니다. 구름 입자는 평균적으로 지름이 0.02mm이고, 구름으로부터 낙하할 수 있는 빗방울의 최소 지름이 약 2mm정도이다. 따라서, 구름 입자가 모여서 하나의 빗방울로 성장하기 위해서는 지름이 100배 커져야 하므로 100만 개의 구름 입자가 합쳐져야 한다. 중위도와 고위도 지방의 구름은 0℃ 이하의 온도를 갖는 상층부에 빙정과 과냉각 물방울을 같이 가지고 있는데 같은 온도에서 빙정에 대한 포화수증기압이 과냉각 물방울의 포화수증기압 보다 작다. 이런 이유로 과냉각 물방울에서 증발한 수증기가 주위의 빙정에 달라붙어 빙정이 성장하게 된다. 빙정이 점점 커지고 무거워지면 눈으로 내리게 되고, 내리다가 녹으면 비가 된다. 하지만 열대 지방이나 여름철 중위도 지방에서 만들어지는 구름 속에는 빙정이 존재하지 않고 물방울로만 있는 경우가 많다. 0℃ 이상의 구름 속에서는 서로 크기가 다른 물방울들이 존재하며, 크기에 따라 낙하 속도와 상승 속도가 다르다. 따라서 물방울들은 서로 충돌하여 합쳐지면서 큰 빗방울로 성장한다. (지구과학 1 교과서)

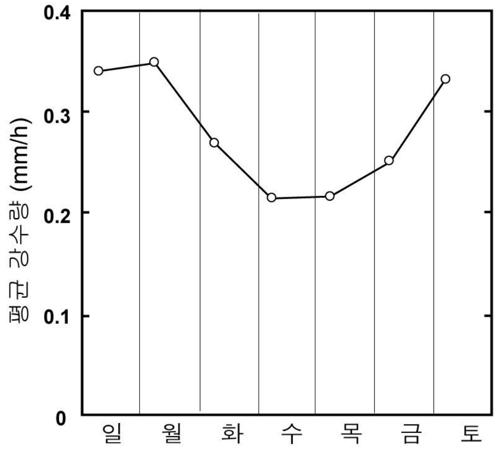
(다)

인류 문명의 발달과 더불어 자연 상태의 많은 변화가 일어났는데 그 중 하나가 대기오염이다. 주된 원인은 인간에 의한 화석연료의 사용이며 산업혁명 이후 그 사용이 계속적으로 증가되어 왔다. 1952년 영국 런던에서는 4000여명에 달하는 사람들이 스모그 현상으로 인하여 사망하였다. 이는 석탄 사용으로 대기 중의 이산화황이 증가하고 이로부터 생성된 작은 입자들이 인간의 호흡기관에 심각한 피해를 가져왔기 때문이었다. 화석연료의 사용은 대기 중으로 많은 오염 기체를 방출할 뿐만 아니라 이러한 기체들은 화학 반응을 통해 작은 알갱이로 변환된다. 인위적으로 생성된 입자들은 자연 발생적인 토양 입자, 소금 입자 등보다 훨씬 크기가 작다. 이런 입자들은 인간의 호흡기에 훨씬 더 큰 영향을 끼칠 뿐만 아니라 햇빛을 산란시켜 시정을 저하시키고 자연적으로 발생한 해염 입자와 마찬가지로 구름 생성에 영향을 끼친다.

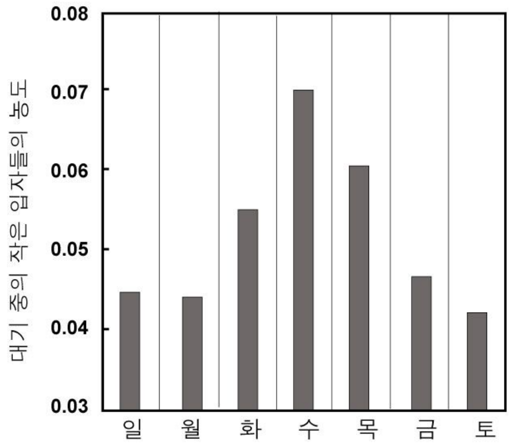
지구상의 여러 가지 자연현상들은 주기성을 가지고 있다. 그 예로서 지구의 자전에 의한 하루 동안의 온도변화, 공전에 의한 일 년 동안의 계절변화 등이 있다. 최근 들어 이러한 주기성이 인간의 활동에 의해서 영향을 받고 있다. 인간의 화석연료 사용으로 인해 지구 온난화 현상이 일어나고, 우리나라도 과거에 비해 겨울철이 짧아지고 여름철이 길어지는 현상들이 기상청 자료 분석을 통해 확인되고 있다. 근래 과학자들은 [그림 3]의 예와 같이 세계 곳곳에서 관측된 자료의 분석을 통해 지구의 자전 및 공전 등의 자연현상만으로는 설명하기 힘든 새로운 주기현상에 대해 이해하고자 연구하고 있다.



[그림 2] 인공위성에서 찍은 해양의 구름사진. 하얀 선들은 운항하는 선박을 따라 생기는 구름으로 구름입자의 크기가 주변의 구름보다 훨씬 작다.



[그림 3-1] 미국 동부 해안지역의 여름철 강수자료



[그림 3-2] 미국 동부 뉴욕시의 여름철 대기 중 작은 입자들의 농도 변화

논제 1. 제시문에 설명된 물의 성질로부터 물에는 표면장력이 존재함을 논술하고, 표면장력 σ의 크기를 추정하시오. (표면장력은 단위 면적당 에너지로 주어진다.)

논제 2. 물방울의 반경과 생성에너지가 [그림 1]이 나타내는 관계를 가지는 이유를 추론하고, 이러한 형태의 에너지 함수가 물방울 성장에 미치는 영향에 대해 설명하시오.

논제 3. 대기 중 해염 입자가 구름 생성에 미치는 영향을 설명하고, [그림 2]에서와 같이 구름이 생성되는 이유를 추론하시오.

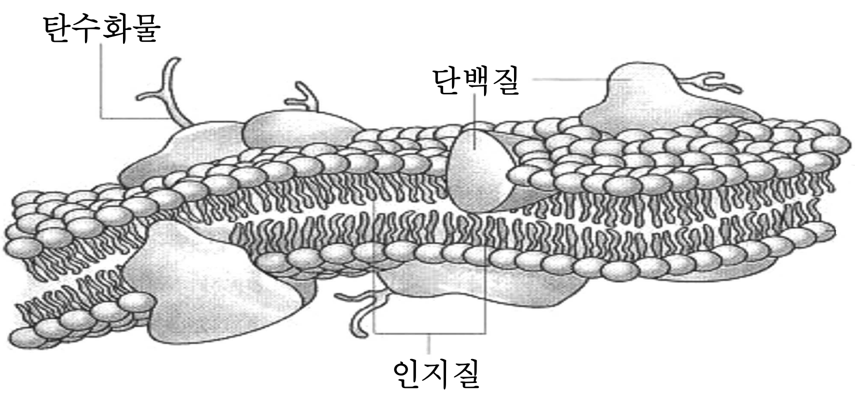
논제 4. 제시문 (나), (다)의 내용을 참고하여 인간의 활동이 강수 현상에 어떤 변화를 가져 올 수 있는지 논술하시오. (단, 구름을 만드는 수증기 양이 변하지 않는다고 가정한다.)

【문항 2】

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

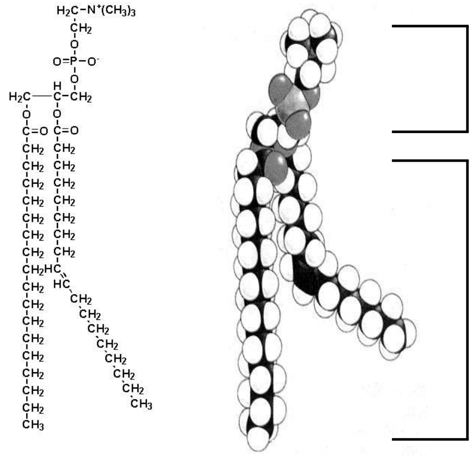
물은 세포 중량의 약 70%를 차지하며, 대부분의 세포내 반응은 물속에서 일어난다. 모든 세포는 세포막으로 둘러싸여 있어 안과 밖이 구별된다. 세포는 이러한 세포막을 통해 필요로 하는 물질을 외부로부터 받아들이고, 세포 내에서 물질대사 결과로 생긴 노폐물 등 여러 가지 물질을 세포 밖으로 내보낸다. 또한 외부 환경의 변화도 세포막을 통해 감지하며, 세포와 세포 사이의 신호 전달도 세포막을 통해 이루어진다.

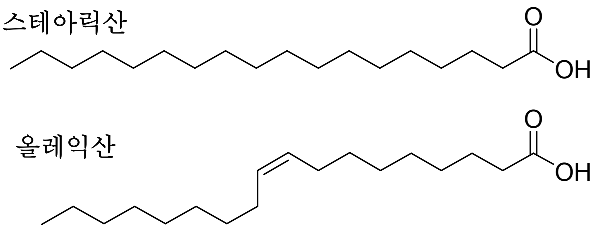
세포막을 구성하고 있는 주성분은 인지질이며 단백질과 소량의 탄수화물이 존재한다. 세포막은 이중의 지질층으로 이루어져 있다. 이 지질층에 단백질이 묻혀있거나 관통하고 있으며, 단백질이 지질층을 떠다닐 수 있는 구조를 하고 있다([그림 1]). 이러한 세포막의 구조를 유동 모자이크 모델이라 하며 세포막을 통한 물질출입을 설명하는 데 매우 적합하다.(생물Ⅱ 교과서)



[그림 1] 세포막의 구조

살아있는 세포의 세포막은 실온에서 유동성을 가지고 있다. 세포막의 유동성은 인지질의 구조와 관련되어 있다. 세포막을 구성하는 인지질은 친수성 머리 부분과 소수성 꼬리 부분으로 구분되어 있으며, 소수성 꼬리 부분은 하나의 포화지방산과 하나의 불포화지방산으로 구성되어있다. [그림 2]는 인지질의 구조와 인지질을 구성하는 지방산의 물리적 성질을 나타낸 것이다.





	분자식	분자량	녹는점
스테아릭산	$C_{18}H_{36}O_2$	284	69℃
올레익산	$C_{18}H_{34}O_2$	282	4℃

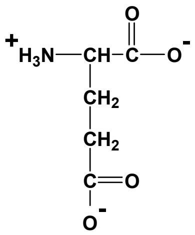
[그림 2] 인지질의 구조와 지방산의 특성

세포가 살아있는 상태를 유지하기 위해서는 생명활동에 필수적인 물질을 끊임없이 외부와 주고받아야 한다. 세포막은 세포의 경계로써 주위 환경으로부터 세포를 보호하는 기능을 가지고 있지만 모든 물질의 출입을 완전히 막지는 않는다. 세포막은 물질을 선택적으로 통과시켜 세포내의 물질조성을 일정하게 유지시키는데, 세포막의 이런 성질을 선택적 투과성이라 한다. 세포막을 통한 물질이동에는 농도기울기에 의해 물질이동이 이루어지는 수동수송과, 에너지를 사용하여 농도기울기와는 상관없이 때로는 농도기울기에 역행하여 물질이동이 이루어지는 능동수송이 있다.

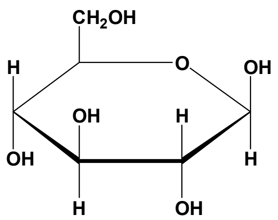
이러한 선택적 물질수송은 세포막을 구성하는 인지질의 특성과 단백질의 종류와 관련이 있다. 세포막 단백질은 세포의 대사를 원활하게 조절하기 위하여 세포 내부 또는 외부로 물질을 통과시키는 수송단백질(통로단백질과 운반단백질)일 수도 있고, 외부로부터 온 신호를 인식하여 세포 내부로 전달하는 수용단백질일 수도 있다. 또한 그 외의 여러 기능을 담당하는 단백질들이 세포막에 존재한다.(생물Ⅱ 교과서)

논제 1. 세포막을 구성하는 지질은 대부분이 인지질이다. 세포막이 실온에서 유동성을 유지할 수 있는 이유에 대해 인지질의 구조적 특징을 중심으로 논하시오.

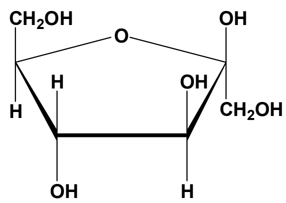
논제 2. 인공세포막을 만들어 보기 위해 인지질을 사용하여 물속에서 이중막을 만들었다. 이 이중막은 극성인 물을 잘 통과시키지 못하므로 물을 잘 통과시킬 수 있도록 단백질을 이중막에 넣어주었다. 만들어진 인공세포막의 물질이동 특성을 살펴보기 위해 10mM KCl, 10mM 글루탐산나트륨, 1mM 포도당, 1mM 과당이 들어 있는 용액에 인공세포막을 넣어 주었다. 수용액에서 KCl과 글루탐산나트륨은 이온화되며, 포도당과 과당은 동일한 화학식($C_6H_{12}O_6$)을 갖지만 그 분자구조는 서로 다르다. 포도당이 중합체로 전환되면 물에 대한 용해도는 감소한다.



<글루탐산>



<포도당>

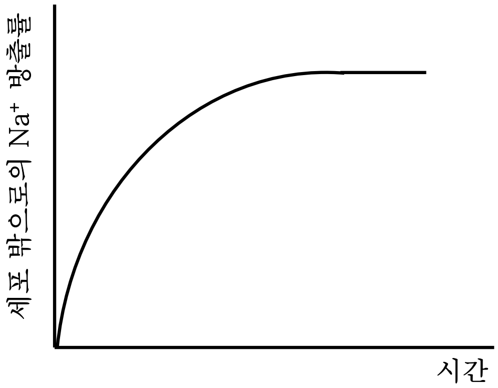


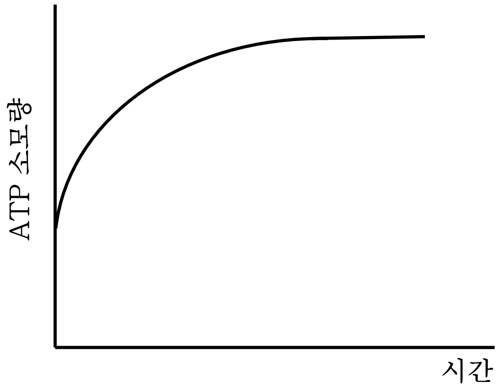
<과당>

2-1. 인공세포막 안으로 K^+, 글루탐산, 포도당만을 선택적으로 통과시켜 세포막 안의 농도가 각각 10mM, 10mM, 1mM이 되도록 하려한다. 어떤 물리, 화학적 특성을 고려하여 막단백질을 설계해야 하는지 설명하시오.

2-2. 논제 2-1에서 만든 인공세포막 안에 더 많은 양의 포도당이 들어가 저장되도록 하려한다. 이 때 삼투압의 증가로 인하여 인공세포막이 파괴되지 않으면서 다량의 포도당을 인공세포막내에 축적시킬 수 있는 방법을 추론하시오.

논제 3. 살아있는 세포는 세포내의 Na^+ 농도를 일정하게 유지하고 있다. 살아있는 세포와 유사한 인공세포를 만들어 세포내 Na^+의 농도보다 높은 소금물에 넣어준 후 다음과 같은 결과를 관찰하였다.





이 결과를 분석하여 세포막을 통한 Na^+ 이동 기작에 대해 논하시오.

【문항 3】

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 전자기파

독일의 헤르츠가 전기 방전 실험을 통하여 전자기파를 처음으로 실험실에서 검출하였다. 전자기파는 매질이 없는 진공 속에서 빛의 속도로 진행하고, 주파수에 따라 전파(중파, 단파, 초단파, 극초단파), 빛(적외선, 가시광선, 자외선), X선, 감마선으로 분류된다(<표 1>).

<표 1> 전자기파의 종류

구분	명칭	파장	진동수
전파	중파(MF) 단파(HF) 초단파(VHF) 극초단파(UHF)	1km~100m 100m~10m 10m~1m 1m~1mm	300kHz~3MHz 3MHz~30MHz 30MHz~300MHz 300MHz~300GHz
빛	적외선 가시광선 자외선	1mm~770nm 770nm~380nm 380nm~10nm	
X선		10nm~0.001nm	
감마선		0.1nm 이하	

(과학 교과서)

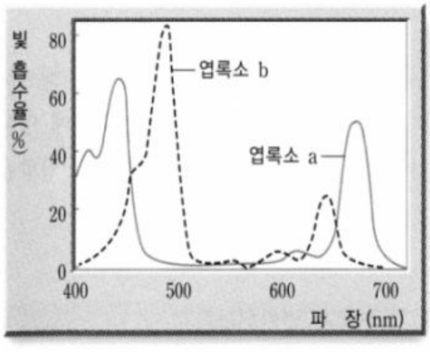
전자기파의 세기는 단위 면적, 단위 시간당 지나가는 에너지로 나타낸다. 태양광은 대부분 빛으로 이루어져 있는데, 지표에 도달하는 태양복사 에너지는 약 500nm의 파장에서 최대이고 그 세기는 낮에 약 750W/m^{2}이다. 식물은 이러한 빛 에너지를 사용하는 광합성 과정을 통해 생명 활동에 필요한 에너지를 얻는다.

반면에 우리 주위의 전파는 주로 인간이 인위적으로 발생시켜 활용하고 있는 전자기파이다. 주변에서 흔히 사용하는 전자레인지는 주파수가 2.45GHz인 극초단파를 이용한 예로서, 이 때 사용된 극초단파의 세기는 3kW/m^2 정도이다.

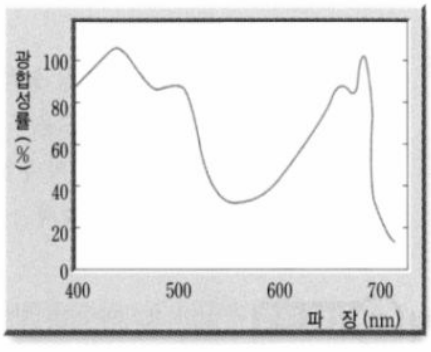
(나) 광합성

녹색 식물은 광합성이라 부르는 일련의 복잡한 화학 반응과정을 통해서 포도당을 만든다. 광합성을 하기 위해서는 빛, 물, 이산화탄소 그리고 빛을 흡수하는 엽록소 등이 필요하다.

엽록소는 엽록체 속에 있는데 태양광선 중에서 적색과 청색의 빛을 잘 흡수하는 성질을 가지고 있다. 식물이 녹색으로 보이는 것은 광합성 색소인 엽록소가 녹색의 빛을 흡수하지 않고 반사하기 때문이다([그림 1]).



[흡수 스펙트럼]



[작용 스펙트럼]

[그림 1]

광합성의 과정은 빛이 필요한 명반응과 CO_2가 필요한 암반응으로 나누어지며, 반드시 명반응이 먼저 진행되어야 한다. 명반응의 주된 화학 반응은 다음과 같다.

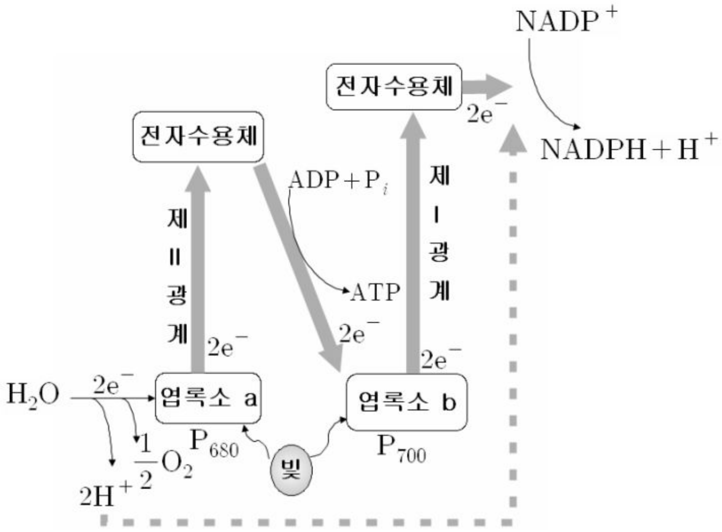
$$H_2O \longrightarrow 2H^+ + 2e^- + \frac{1}{2}O_2 \qquad ------(1)$$

$$ADP + P_i + NADP^+ + 2H^+ + 2e^- \longrightarrow ATP + NADPH + H^+ \qquad ------(2)$$

빛에너지에 의해 물이 분해되어 산소가 발생되는 과정을 물의 광분해라고 한다. 반응 (1)의 표준 전극 전위는 -1.229V이다. 명반응은 엽록소가 빛에너지를 흡수하고 이어서 물이 분해되는 광분해로부터 시작한다.

엽록체의 현탁액에 무기인산과 ADP를 넣고 빛을 쬐면, 무기 인산은 줄고 ATP가 생성되는데, 엽록소가 빛에너지를 받아 ATP를 합성하는 것을 광인산화 반응이라 한다. 엽록소가 빛에너지를 흡수하면, 전자가 들뜨고 엽록소로부터 이탈하여 전자전달계를 거친다. 전자가 전자전달계를 거치는 동안에 ATP가 생성된다. 전자전달계를 거쳐 온 전자와 물의 광분해로 생성된

H^+가 조효소의 일종인 $NADP^+$와 결합하여 NADPH와 H^+로 된다. 엽록체에서 이루어지는 명반응을 정리하면 [그림 2]와 같다. (생물 II 교과서)

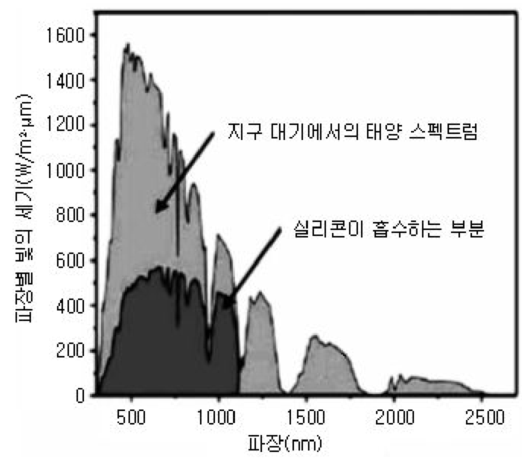


[그림 2]

(다) 태양광 전지

풍부한 태양빛으로부터 직접 전기를 생산한다는 것은 매우 멋진 일이다. 그것은 지금으로부터 100년 전만 해도 꿈도 꾸지 못했던 것으로 이는 최근에 나타난 재생 에너지이다.

태양광 전지의 작동 원리를 이해하기 위해서는 우선 무수한 에너지 입자, 즉 광자들로 이루어진 빛을 살펴보아야 한다. 반도체 태양광 전지에 태양빛이 입사하면 전류가 흐르고 전기가 발생한다. 그 가운데 실리콘 반도체를 기반으로 한 태양광 전지는 [그림 3]과 같은 파장대의 빛을 흡수하여 전기적 에너지로 바꾼다.



[그림 3]

현재 태양광 전지가 태양광 에너지를 전기적 에너지로 바꾸는 효율은 약 15% 정도이다. 1m^2의 태양 전지판은 약 100W의 전력을 공급한다. 태양광 전지는 수명이 길지만 제작 및 설치비용이 높아서, 태양광 전지가 현대 사회에 필요한 대량의 전력을 모두 대체하지는 못할 것이다. 게다가 태양빛이 강렬한 낮 시간에만 전력을 생산할 수 있기 때문에 하루 24시간 내내 전력을 공급하지 못한다는 약점도 있다. (출전: 폴 마티스,「재생에너지란 무엇인가?」)

<표 2> 2007년 1월 15일부터 적용된 주택용 전기요금 기준표

월사용량	기본요금(원/가구)	전력량 요금(원/kWh)
100kWh 이하 사용	370	55.1
101~200kWh 사용	820	113.8
201~300kWh 사용	1,430	168.3
301~400kWh 사용	3,420	248.6
401~500kWh 사용	6,410	366.4
500kWh 초과 사용	11,750	643.9

(자료: 한국전력공사)

*월간 150kWh를 사용했을 때 전기료: 820＋(55.1×100)＋(113.8×50)＝12,020원

논제 1. 전자레인지 안에서는 1분 안에 끓는 물이 태양광 아래에서는 4분에 걸쳐서 같은 양의 에너지를 받더라도 온도가 거의 변하지 않는 이유를 설명하시오. 다양한 전자기파들이 에너지의 세기가 같더라도 전자기파에 노출된 물체에 다른 영향을 미치는 원인에 대하여 추론하시오.

논제 2. 광합성을 통한 에너지 변환 과정에서 제시문 (나)의 반응 (1)의 필요성에 관하여 논하시오. 이 화학반응은 실험실에서는 쉽게 일어날 수 없는 반응이다. 그 이유를 논하고 식물은 어떻게 이런 어려움을 극복하는지 추론하시오.

논제 3. 제시문 (나)에 설명된 광합성 명반응 과정의 원리를 참고하여 태양광 전지의 작동 원리를 설명하고 태양광 전지의 효율을 높이기 위한 방안을 제시하시오.

논제 4. 한 달에 300kWh를 사용하는 가구에서 m^2당 설치비용이 100만원이고 넓이가 10m^2인 태양광 전지판을 지붕 위에 설치하고, 매일 낮 시간에 8시간동안 발전을 할 수 있다고 하자. 태양광 전지판의 수명이 20년이라고 할 때, 이 가구에서 설치비용을 회수하는 데 걸리는 시간을 <표 2>에 주어진 주택용 전기요금 기준표를 참고하여 구하고 태양광 전지의 경제성과 대체 에너지원으로서의 발전 방안에 대하여 논하시오.

【문항 4】

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가)

여러 가지 자연현상 및 사회현상은 시간에 따라 변화하는 적절한 양과 그 양의 순간변화율(도함수) 등의 관계식으로 표현할 수 있다. 예를 들어 마찰이 없는 수평면 위에서 용수철에 의해 진동하는 질량 m인 물체의 운동을 기술해보자. y를 용수철 평형점으로부터의 변위(길이)라 하고 용수철 상수를 k라 하면 후크의 법칙에 의해 용수철이 물체에 가하는 힘은 $F=-ky$가 된다. 뉴턴의 운동방정식은 $F=ma$로 표시되는데 가속도 a는 속도 v의 도함수이고, 속도 v는 위치 y의 도함수이므로 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$ 이고, y를 두 번 미분한 결과 $\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$, 즉 y의 이차 도함수를 $\frac{d^2y}{dt^2}$로 나타내면, 관계식

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0 \qquad \text{-----(1)}$$

을 얻는다. ($y=f(t)$인 경우 $\frac{d^2y}{dt^2}$를 $f''(t)$로 쓰기도 한다.) 이와 같이 시간에 따라 변하는 양과 이의 도함수들 사이의 관계를 설정한 등식을 총칭하여 <u>미분방정식</u>이라 부른다.

상수 a에 대해

$$\frac{d\sin at}{dt}=a\cos at,\ \frac{d\cos at}{dt}=-a\sin at$$

라는 사실을 이용하면, 함수 $y=\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$를 미분방정식 (1)에 대입했을 때 모든 t에 대해서 등호가 성립함을 쉽게 확인할 수 있다. 이 때, $y=\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$가 미분방정식 (1)을 '만족'시킨다고 말한다. 이와 같이 '주어진 미분방정식을 만족시키는 함수'를 그 <u>미분방정식의 해</u>라고 부른다.

논의를 진행하기 위하여 몇 가지 수학적 사실이 더 필요하다. 우선 수열 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$이 수렴하며 그 극한값을 e로 나타내는데 약 2.71828이다. e를 밑으로 하는 지수함수 e^t은 모든 실수 t에서 미분 가능하며, 임의의 상수 a에 대하여

$$\frac{de^{at}}{dt}=ae^{at}$$

이 성립한다.

자연현상을 설명하는 미분방정식은 그 해가 초기 조건(한 시점에서의 함수값, 도함수값 등)에 의하여 유일하게 결정된다. 구체적인 예를 들기 위해 아래 미분방정식을 살펴보기로 하자.

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \qquad \text{-----(2)}$$

여기서 a와 b는 상수이다. 이 미분방정식의 해 $y = f(t)$가 초기값 $f(0)$에 의해 유일하게 결정됨을 확인해 보자. 이를 위하여 $f_1(t)$와 $f_2(t)$가 미분방정식 (2)의 해이고, 또한 f_1의 초기값 $f_1(0)$과 f_2의 초기값 $f_2(0)$이 같다고 하자. 이 때 함수 $g(t)$를 $g(t) = f_1(t) - f_2(t)$로 정의하면 $f_1(t)$와 $f_2(t)$가 미분방정식 (2)의 해라는 사실로부터 $g'(t) = ag(t)$가 성립함을 알 수 있다. 보조함수 $h(t)$를 $h(t) = e^{-at}g(t)$로 정의하면 모든 실수 t에 대하여 $h'(t) = 0$임을 확인할 수 있다. 따라서 $h(t)$는 상수함수가 되고, $g(0) = f_1(0) - f_2(0) = 0$이므로 모든 t에 대하여 $h(t) = 0$이 된다. 모든 실수 t에 대하여 e^{-at}은 항상 양수이므로, $h(t)$의 정의로부터 $g(t) = 0$이 모든 t에 대하여 성립하게 된다. 따라서 두 함수 $f_1(t)$와 $f_2(t)$는 같은 함수이다.

비슷한 방법으로 미분방정식 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$의 해 $y = f(t)$가 $f(0)$, $f'(0)$에 의해서 유일하게 결정됨도 보일 수 있다. 이와 같이 미분방정식의 해가 초기 조건에 의해 유일하게 결정되는 것을 통칭하여 미분방정식의 <u>해의 유일성</u>이라 한다.

논제 1. C_1과 C_2가 임의로 주어진 상수라 하자. 보조함수

$$g(t) = (\cos t)f(t) - (\sin t)f'(t)$$

$$h(t) = (\sin t)f(t) + (\cos t)f'(t)$$

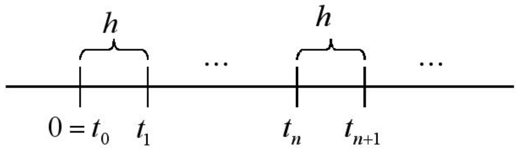
를 이용하여 미분방정식

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \qquad \text{-----(3)}$$

의 해 $y = f(t)$가 초기 조건 $f(0) = C_1$, $f'(0) = C_2$에 의해 유일하게 결정됨을 보이시오.

(나)

컴퓨터를 이용하여 미분방정식의 해를 근사적으로 구할 수 있는데, 가장 간단한 방법은 다음과 같다. 우선 h를 충분히 작은 양수로 택하고, $t_0=0$으로부터 일정한 간격으로 떨어진 $t_0=0$, $t_1=h$, $t_2=2h$, ... $t_n=nh$, ...을 고정하자. 이 $t_0, t_1,$ ... $t_n,$ ...을 격자점이라 부르는데, 우리는 이들 격자점 위에서 미분방정식의 해 $f(t)$의 값을 근사적으로 구하고자 한다.



h가 충분히 작으므로 도함수의 정의 $f'(t)=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$에 의하여 $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$를 $f'(t)$의 근사값으로 사용할 수 있다.

이제 미분방정식 (2)

$$\frac{dy}{dt}=ay+b$$

의 근사적 해법에 대하여 알아보자. 함수 $y=f(t)$가 초기 조건 $f(0)=y_0$을 만족시키는 미분방정식 (2)의 해라 하자. 위의 관찰로부터 $\frac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{h}$이 $f'(t_n)$의 근사값이고 $f'(t_n)=af(t_n)+b$이므로, $\frac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{h}$이 $af(t_n)+b$의 근사값이 된다. 따라서 $f(t_{n+1})$을 $(1+ah)f(t_n)+bh$로 근사시킬 수 있다. 그러므로 y_1, y_2, ...을 점화식

$$y_{n+1}=(1+ah)y_n+bh$$

및 초기 조건 $y_0=f(0)$을 이용하여 귀납적으로 정의하면, $n=1, 2, 3,$ ...에 대하여 y_n은 $f(t_n)$의 근사값이 된다.

비슷한 방법으로 미분방정식 (3)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

의 해의 근사값을 구할 수 있다. 이 때 $f''(t_n)$의 근사값으로

$$\frac{f(t_{n+1})-2f(t_n)+f(t_{n-1})}{h^2}$$

을 사용하는데, 그 이유는 다음 공식이 성립하기 때문이다.

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{f(t+\Delta t)-2f(t)+f(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}=f''(t)$$

논제 2. $h=0.1$이라고 하고, $t_0, t_1, t_2, \ldots$을 위에서 정의한 격자점이라고 하자. 미분방정식 (3)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

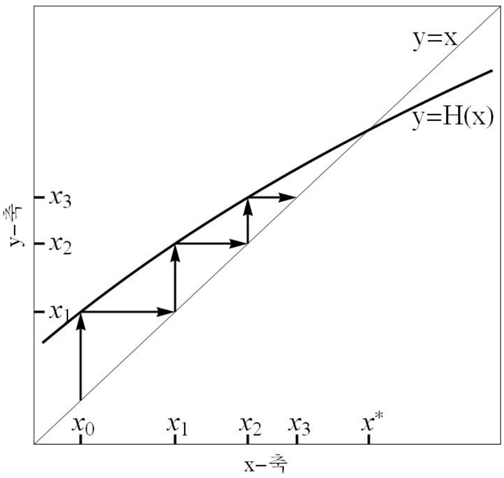
의 해 $y=f(t)$가 초기 조건 $f(t_0)=3$, $f'(t_0)=2$를 만족시킨다고 하자. $f(t_n)$의 근사값 y_n을 귀납적으로 정의하는 점화식과 y_1, y_2의 값을 구하시오.

(다)

위에서 본 바와 같이 미분방정식이 주어지면 그 해를 근사하는 적절한 점화식을 항상 찾을 수 있기 때문에 미분방정식 연구는 점화식 연구와 밀접한 관계가 있다. 우선 함수 $H(x)$를 이용하여 정의한 점화식

$$x_{n+1}=H(x_n)$$

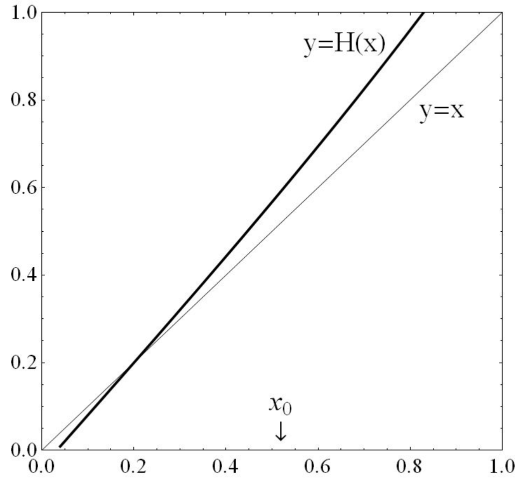
을 살펴보자. 초기값 x_0이 [예시그림 1]에 표시된 바와 같다고 하자. 다음 값 x_1은 $x_1=H(x_0)$이 되는데 이 값이 [예시그림 1]의 y축에 표시되어 있다. 이 점으로부터 수평선을 직선 $y=x$와 만날 때까지 그으면 그 교점의 x좌표는 당연히 x_1이 되며, 이 값이 x축에 표시되어 있다. 이 x_1을 새로운 초기값으로 점화식을 다시 적용하면 다음 값 x_2는 $x_2=H(x_1)$이 되며 이 값이 y축에 x_2로 표시되어 있다. 이 과정을 반복해서 [예시그림 1]에서와 같이 굵게 표시한 화살표들을 그릴 수 있다. 이와 같이 $x_0, x_1, x_2, \ldots$의 움직임에 관한 정보를 화살표들로 그린 것을 x_0에서 시작하는 거미줄그림이라 부른다.



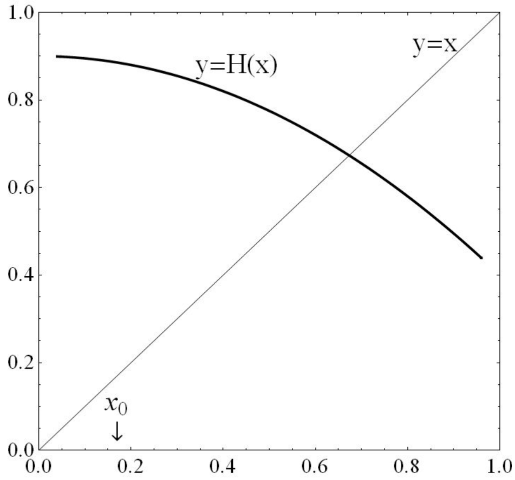
[예시그림 1]

만약 x^*가 $H(x^*)=x^*$를 만족하면 이 x^*를 점화식 $x_{n+1}=H(x_n)$의 부동점이라 부른다. [예시그림 1]에서 볼 수 있듯이 x^*는 $y=H(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표이다. x^*가 점화식 $x_{n+1}=H(x_n)$의 부동점일 때, x^*를 포함하는 적절한 개구간을 잡아서 그 개구간에 속하는 모든 c에 대하여 $x_0=c$, $x_{n+1}=H(x_n)$으로 정의된 수열 $\{x_n\}$이 x^*로 수렴하도록 할 수 있으면, x^*를 안정성을 가진 부동점 또는 줄여서 안정부동점이라 부른다. [예시그림 1]의 경우 x^*는 안정부동점이다. 안정부동점이 아닌 부동점을 불안정부동점이라 부른다.

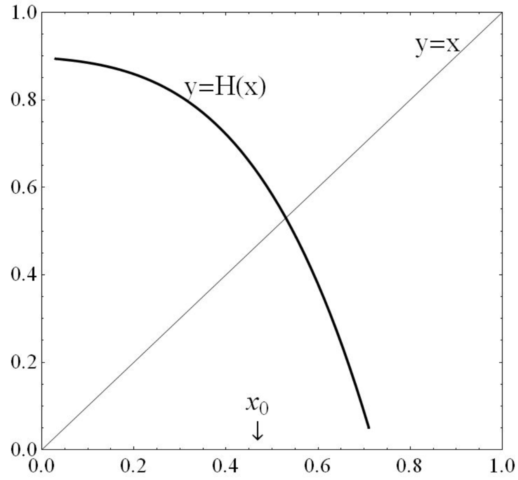
논제 3. 아래에 주어진 [논제 3: 그림 1], [논제 3: 그림 2], [논제 3: 그림 3]에서 함수 $y=H(x)$의 그래프는 굵은 선으로, $y=x$의 그래프는 가는 선으로 표시되어 있다. [논제 3: 그림 1~3]의 경우에 각 그림에 표시된 x_0에서 시작하는 거미줄그림의 개형을 답안지에 그리시오. 이를 기반으로 부동점의 안정성 여부를 일반적인 경우에 대하여 곡선 $y=H(x)$의 기울기와 관련해서 논하시오. (단, 함수 $H(x)$가 미분가능하고 도함수가 연속이며, 부동점 x^*에서 곡선 $y=H(x)$의 기울기는 ± 1이 아니라고 가정한다.)



[논제 3: 그림 1]



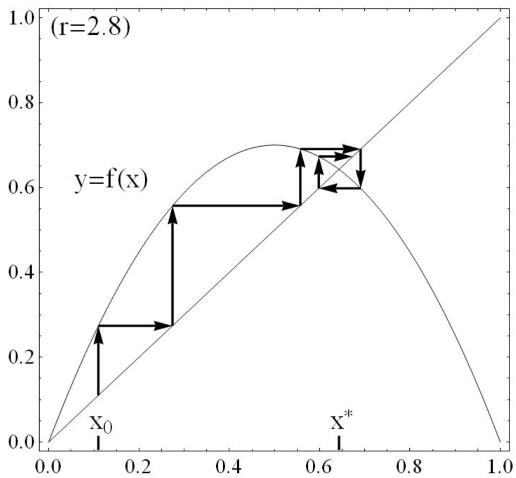
[논제 3: 그림 2]



[논제 3: 그림 3]

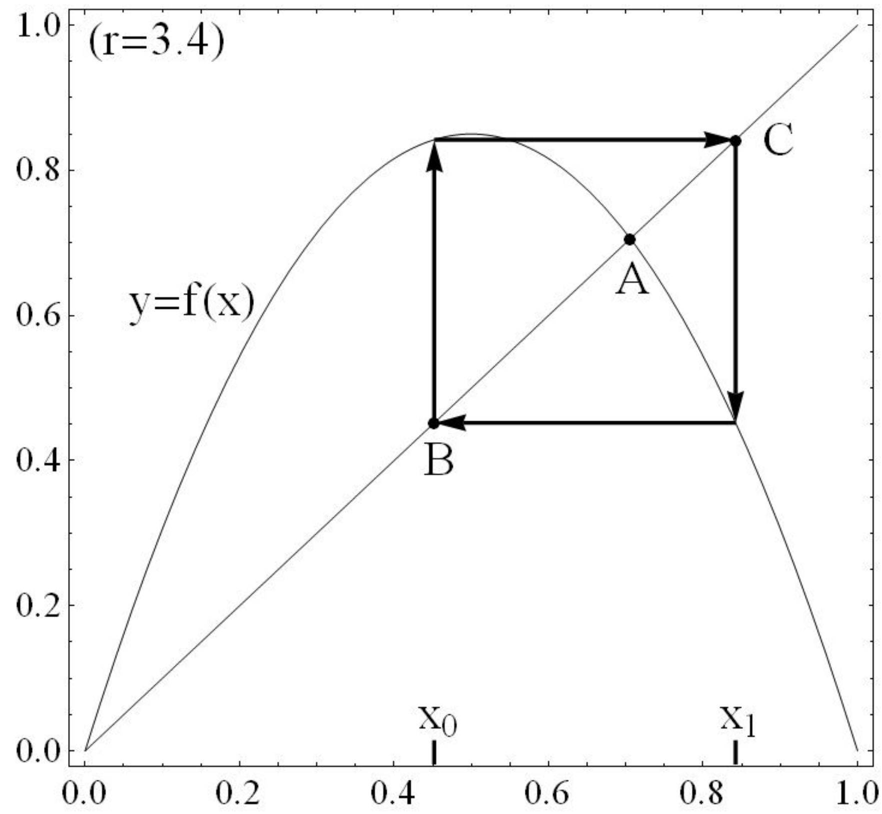
(라)

r을 양의 상수라 하고 $f(x)=rx(1-x)$라 하자. 그리고 $0<c<1$에 대하여 점화식 $x_{n+1}=f(x_n)=rx_n(1-x_n)$ 및 초기값 $x_0=c$로 정의된 수열$\{x_n\}$의 행동을 살펴보기로 하자. 앞으로 이 수열을 c에서 출발한 수열이라 부르자. 또한 c를 $\{x_n\}$의 출발점이라 하자.



[예시그림 2]

[예시그림 2]는 $r=2.8$일 때 거미줄 그림의 예를 보여주고 있다. 이 그림을 통하여 0과 1 사이에 있는 모든 c에 대해서 c에서 출발한 수열이 부동점 x^*로 수렴함을 볼 수 있다. [예시그림 3]은 $r=3.4$인 경우를 보여주고 있는데, 그 특징은 특별한 점 x_0과 x_1이 존재해서 x_0에서 출발한 수열이 x_1으로 간 후 다시 x_0으로 돌아오는 주기 2의 주기적 패턴을 보이고 있다는 것이다.



[예시그림 3]

이제 상수 r의 값을 3.4에서 점차 증가시키면 4, 8, 16, 32 등의 2^n $(n=2, 3, \ldots)$을 주기로 갖는 주기점들이 점차적으로 출현한다. 그리고 r이 약 3.57을 넘게 되면, 소위 카오스 현상이 나타난다. 아래의 <예시표 1>은 이 카오스 현상에 대한 이해를 돕기 위한 것으로 상수 r값을 3.79, 3.80, 3.81로 주고, 이 각각의 경우에 대하여 0.2999, 0.3000, 0.3001에서 출발한 수열의 x_{600}값을 컴퓨터로 계산한 결과이다.

<예시표 1> 상수 r과 초기값 x_0에 따른 x_{600}값

r \ x_0	0.2999	0.3000	0.3001
3.79	0.697998	0.630530	0.271574
3.80	0.882534	0.545618	0.687939
3.81	0.634374	0.700818	0.927301

이 표에서 출발점의 미소한 변화가 시간이 흐른 후에는 큰 차이를 가져옴을 관찰할 수 있다. 또한 상수 r을 근소하게 변화시켜도 결과값에 큰 차이가 나타나는 것을 확인할 수 있다. 이와 같이 출발점의 미소한 차이에 대해 큰 변화를 보이는 것이 카오스 현상의 주요한 특징이다. 또한 카오스 현상은 대부분의 출발점 c에 대해 c에서 출발한 수열이 매우 불규칙해진다는 특징을 가진다. 이러한 카오스 현상은 점화식으로 주어진 수열뿐만 아니라 자연현상에서 도출된 많은 미분방정식들에서도 나타나는데 이 현상은 흥미로움을 넘어 자연현상의 이해에 새로운 도전의 장을 열어주고 있다.

논제 4-1. [예시그림 3]에서 출발점이 임의의 점일 때, n이 증가함에 따라 수열 $\{x_n\}$이 어떻게 행동하는지 추정하고 그 이유를 설명하시오.

논제 4-2. 자연법칙이 미분방정식으로 기술되고 이 미분방정식의 해는 초기조건에 의해 유일하게 결정된다는 사실은 “어느 한 시점의 상태가 미래를 완벽하게 결정한다”는 결정론적 세계관에 지대한 영향을 주었다. 그러나 이러한 결정론적 자연법칙의 지배를 받는 자연현상이라도 만약 그것이 카오스 성질을 가지고 있다면, 초기 조건이 미래를 유일하게 결정한다는 사실에도 불구하고 인간이 미래 시점의 상태를 정확하게 예단하는 일은 실질적으로 불가능하게 된다. 그 이유에 대해 위에서 제시한 사실들을 기반으로 설명하고, 이 사실이 결정론적 세계관에 미치는 영향에 대해 논하시오.