8. 문항카드 7 - 자연계열 논술고사 3

8.1 일반정보

<table>
<tr><td colspan="2">유형</td><td colspan="3">논술고사</td></tr>
<tr><td colspan="2">전형명</td><td colspan="3">논술전형</td></tr>
<tr><td colspan="2">해당대학의
계열(과목)/문항번호</td><td colspan="3">[화공생명공학전공 / 기계공학전공 / 물리학전공] / 3번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>교육과정
과목명</td><td>수학Ⅰ, 미적분Ⅱ,
기하와 벡터</td><td colspan="2">교육과학기술부 고시 제2011-361호
[별책8] 「수학과 교육과정」의 〈일반 과목〉</td></tr>
<tr><td>핵심개념
및 용어</td><td>· 직선의 방정식
· 두 점 사이의 거리</td><td>· 점과 직선사이의 거리
· 내적</td><td>· 미분(그래프 개형)</td></tr>
<tr><td colspan="2">답안작성(예상소요)시간</td><td colspan="2">40분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

8.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문] (글자 제한 없음)

[가] 좌표평면 위의 점 (a, b)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y = m(x-a)+b$ 이다.

[나] 좌표평면 위의 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 이다.

[다] 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$라 할 때, 두 벡터의 내적은

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ 이다.

[문제]

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(8,1)$을 지나고 기울기가 음수인 직선 중에서 x축, y축과 만나는 두 점 사이의 거리를 최소로 하는 직선을 l이라 하자. 이때 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 한다. 제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【3-1】 직선 l의 방정식은 $x+2y=10$ 임을 보이시오.

【3-2】 두 점 A, B와 원점 O로 이루어진 삼각형 OAB의 내접원의 중심 Q의 좌표를 구하시오. 또한 원점 O를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 삼각형 OAB의 외접원과 만나는 두 점 중 원점이 아닌 점 C의 좌표를 구하시오.

【3-3】 문제 【3-2】에서 구한 점 Q와 삼각형 OAB 또는 그 내부에 있는 점 R에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$과 벡터 $\vec{w}=(-1,-2)$ 의 내적의 최댓값을 구하시오.

【3-4】 문제 【3-2】에서 구한 점 C의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하자. 삼각형 OAB 또는 그 내부에 있는 점 (x, y)에 대하여 $(x-x_1)^2+4(y-y_1)^2$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오.

8.3 출제의도

· 기하, 벡터, 함수의 최대값, 최솟값을 연관지어 이해하고 서로 응용하는 능력을 평가하고자 하였다.
· 함수의 최대값, 최솟값을 구할 때 유리함수로 표현되는 도함수의 근을 다항식의 인수분해를 통해 구하는 능력을 평가하고자 하였다.
· 삼각형 내접원과 외접원의 성질을 이해하고, 직선과 원의 방정식을 통해 직선과 원의 교점을 연립방정식을 통해 구하는 능력을 평가하고자 하였다.
· 백터 내적의 최댓값을 구함에 있어서 좌표를 이용하여 함수의 최댓값을 구하는 방법 대신 서로 수직 또는 평행인 벡터의 성질을 이용하여 내적의 최댓값을 기하학적으로 구하는 능력을 평가하고자 하였다.
· 좌표평면 위의 한 점과 연립부등식의 영역에 속하는 다른 한 점으로 표현되는 어떤 함수의 최댓값, 최솟값을 기하학적 거리로 해석하여 구하는 능력을 평가하고자 하였다.

8.4 출제근거

제시문 번호	가

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학I	㈐ 도형의 방정식 2 직선의 방정식 ① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.	· 수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학 I	이준열 외	천재교육	2017	150	X	
수학 I	류희찬 외	천재교과서	2018	152~153	X	

제시문 번호	나

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학 I	㈐ 도형의 방정식 1 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	· 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학 I	이준열 외	천재교육	2017	132~133	X	
수학 I	류희찬 외	천재교과서	2018	135~136	X	

제시문번호	다

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
기하와 벡터	㈏ 평면벡터 2 평면벡터의 성분과 내적 ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	· 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
기하와 벡터	김창동 외	교학사	2018	80	X	
기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2018	97	X	

하위문제 번호	3-1

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학Ⅰ	㈐ 도형의 방정식 1 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	· 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	㈐ 도형의 방정식 2 직선의 방정식 ① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.	· 수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.
미적분Ⅱ	㈐ 미분법 1 여러 가지 미분법 ① 함수의 몫을 미분할 수 있다.	· 미적2311. 함수의 몫을 미분할 수 있다.
	㈐ 미분법 2 도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	· 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2017	132~133, 150	○	
수학Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2018	135~136, 152~153	○	
미적분Ⅱ	김원경 외	비상교육	2017	115~119	○	
미적분Ⅱ	이준열 외	천재교육	2018	145~146,150	○	

하위문제 번호	3-2

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준

수학Ⅰ	㈐ 도형의 방정식 3 원의 방정식 ② 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.	· 수학1332-1. 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2017	173~174	○	
수학Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2018	176~177	○	

하위문제 번호	3-3

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
기하와 벡터	㈏ 평면벡터 2 평면벡터의 성분과 내적 ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	· 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
기하와 벡터	김창동 외	㈜교학사	2018	80	○	
기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2018	97	○	

하위문제 번호	3-4

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학Ⅰ	㈐ 도형의 방정식 1 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	· 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	㈐ 도형의 방정식 2 직선의 방정식 ① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.	· 수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	㈐ 도형의 방정식 2 직선의 방정식 ③ 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	· 수학1323. 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2017	132~133, 150, 158~159	○	
수학Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2018	135~136, 152~153, 162~163	○	

8.5 문항 해설

8.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 [가]는 2009 개정 교육과정 교과서 '수학Ⅰ-㈐도형의 방정식-⑵직선의 방정식'에 해당되며 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식 개념에서 발췌한 내용으로 고등학교 1학년 범위 내에서 제시한 내용이었다.
- 제시문 [나]는 2009 개정 교육과정 교과서 '수학Ⅰ-㈐도형의 방정식-⑴평면좌표'의 두 점 사이의 거리의 개념을 제시하였으며 중학교 수준의 내용으로 학생들이 충분히 알 수 있는 내용을 제시하였다.
- 제시문 [다]는 2009 개정 교육과정 '기하와 벡터-㈏평면벡터-⑵평면벡터의 성분과 내적'에 해당되며 〈기하와 벡터〉과목의 성취기준 '기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.'에도 제시되어 있는 내용으로 교과서를 충분히 학습한 학생이라면 쉽게 적용할 수 있었던 제시문이었다.

- 문제 [3-1]은 제시문 [가]와 [나]를 이용하여 점을 지나는 기울기가 음수인 직선의 방정식의 x절편과 y절편을 구한 후 두 점사이의 거리를 구할 수 있으며 이 때 두 점사이의 거리가 최소인 기울기를 구하기 위해 〈미적분II〉 과목에서 제시하고 있는 '여러 가지 미분법'을 이용하여 해결할 수 있었던 문항이었다. 특히 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅱ〉 과목의 성취기준인 '미적2311. 함수의 몫을 미분할 수 있다.'와 '미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.'를 통해서도 교육 과정내 범위임을 확인할 수 있었다. 직선과 x축이 이루는 각을 θ라 두고 선분 $\overline{AB}$의 길이를 삼각함수 형태로의 변형을 통해 〈미적분Ⅱ〉에서 제시된 최대, 최소의 개념을 통해 해결할 수 있었다. 특히 미리 제시된 식을 통해 결론을 유추하여 적용할 수 있도록 하여 쉽게 방향을 결정할 수 있는 문항이었다.
- 문제 [3-2]는 우선 중학교 도형단원과 2009 개정 고등학교 교과서 〈수학Ⅰ〉의 '점과 직선사이의 거리', '원과 직선사이의 위치관계'에서 배운 내용을 이용하여 해결할 수 있었던 문제로서 내접원의 중심에서 삼각형의 세 점을 연결하여 3개의 삼각형으로 분리한 후 넓이 관계를 이용하면 내접원의 중심을 쉽게 구할 수 있었다. 두 번째로는 직각 삼각형에서 외접원의 중심은 빗면의 중점에 있다는 중학교에서 배운 기하학적 성질을 통해 제시문 [가]처럼 직선의 방정식을 구한 후 원점을 지나는 직선에 수직인 직선과 연립하여 계산하는 과정을 통해 해결할 수 있었다.
- 문제 [3-3]은 〈기하와 벡터〉 과목의 성취기준인 '기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.'와 제시문 [다]의 내적에 대한 개념과 내적이 최대가 될 때를 이해하고 있을 경우에 충분히 해결할 수 있었던 다소 쉽게 여겨지는 문제였다.
- 문제 [3-4]는 고등학교 교과서 〈수학Ⅰ〉의 '점과 직선사이의 거리'를 구하는 내용을 바탕으로 문제 [3-2]에서 해결한 내용을 통해 치환을 통해 해결할 수 있었던 문항이었다. 뿐만 아니라 〈기하와 벡터〉과목의 성취기준인 '기벡1112. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.'와 2009 개정 교육과정 '수학Ⅰ-㈐도형의 방정식-⑶원의 방정식'의 원과 직선 사이의 최대·최소를 이용하여 해결할 수 있었던 문제였다. 다소 어렵게 여겨질 수도 있었으나 치환을 통해 해결하거나 기하학적 성질을 통해 해결할 수도 있었던 문제였다. 다양한 해결방법이 제시될 수 있었던 문제로 사고력이 풍부한 학생들에게는 단계적으로 문제 해결이 가능할 수 있었던 문항이었다.

8.5.2 출제 검토 교사 의견

- 전반적으로 제시문은 모두 교과서에서 발췌하여 구성하였으므로 학생들에게 익숙한 표현이었다. 또한 재

구성한 내용이 존재하지 않아 고등학교 수학과 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 내용은 없다. '수학Ⅰ-㈐도형의 방정식'과 '기하와 벡터-㈏평면벡터'의 내용이 함께 구성되어 학생들이 두 성질을 병행하여 문제를 해결할 수 있게 하려는 출제 의도를 쉽게 파악할 수 있을 것이다.

- 제시문 [가]는 2009 개정 교육과정 교과서 '수학Ⅰ-㈐도형의 방정식-[2]직선의 방정식', 제시문 [나]는 고등학교 교과서 '수학Ⅰ-㈐도형의 방정식-[1]평면좌표'의 두 점 사이의 거리의 개념을 제시하였으며 중학교 수준의 내용으로 학생들이 쉽게 받아들일 수 있는 제시문이었다.
- 제시문 [다]는 2009 개정 교육과정 '기하와 벡터-㈏평면벡터-[2]평면벡터의 성분과 내적'에서 필수적으로 요구하는 내용을 안내하고 있어서 이 제시문 역시 학생들이 쉽게 문제로 접근할 수 있었다. 세부 문항의 특징은 각 문항 간에 연계되는 내용이 있으며, 단계적으로 구성 되었다. 또한 학생들이 문제 해결 과정에서 이용해야 할 수학적 내용 중 고등학교 수학과 교육과정을 벗어나는 내용은 발견되지 않았다.

- 문제 [3-1]은 제시문 [가]의 직선의 방정식에서 기울기 m을 변수로 정리할 수 있으며, 직선과 x축이 이루는 예각의 크기 θ를 변수로 정리하는 방법을 택하여 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 함수로 표현할 수 있었다. 함수가 정리되면 〈미적분Ⅱ〉 내용에서 미분을 이용하여 충분히 결론을 도출할 수 있었다. 학생들의 다양한 사고를 측정할 수 있는 문제수준이었다.
- 문제 [3-2]는 중학교 교육과정에 포함되어 있는 '내접원'과 '외접원'의 내용으로, 이미 중학교 교육과정을 거쳐 고등학교 수학과 교육과정을 이수한 학생들에게는 익숙하여 문제 해결 과정에 무리가 없을 것으로 판단할 수 있다.
- 문제 [3-3]은 내적을 좌표에 의해 구할 수도 있고, 수업시간에 배운 정사영의 개념으로도 접근할 수 있었던 문항이었다.
- 문제 [3-4]의 경우 치환을 통해 2009 개정 교육과정 '수학Ⅰ-㈐도형의 방정식-[3]원의 방정식'의 원과 직선 사이의 최대·최소로 접근할 수도 있었다. 문제 [3-2]에서 도출한 결론을 이용해야 하므로, x, y로 구성된 변수를 적절히 치환하면, 구해야 하는 대상의 기하학적 의미를 파악할 수 있었다. 치환을 하지 못하였더라도 타원의 방정식의 형태로 문제 해결이 가능하다. 난도가 높아 학생들에게 다소 어려울 수 있으나 교육과정의 범위를 벗어난 내용은 아니었다.
- 특히 문제 [3-1]의 경우 단순 암기에 의해 접근하는 학생들이 해결하기 힘들어 뒤에 있는 문제들을 모두 해결하기 힘들 수도 있다고 판단하여 직선의 방정식 $x+2y+10=0$을 미리 제시하여 학생들을 배려한 모습이 돋보인다. 또한 전반적으로 중학교와 고등학교 교육과정 내에서 배운 제시문의 내용을 이 범위 내에서 각 문제에 자연스럽게 적용할 수 있도록 출제된 문제였다.

8.5.3 자문위원 평가 의견

- 제시문 [가]는 교과서에 실려 있는 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식 개념 내용으로 2009 개정 교육과정 〈수학Ⅰ〉 과목의 성취기준인 '수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.'에 부합하는 제시문이었다.
- 제시문 [나]는 〈수학Ⅰ〉의 평면좌표에 관한 제시문으로 2009 개정 교육과정 〈수학Ⅰ〉 과목의 성취기준 '수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.'에 부합하는 제시문이었다.
- 제시문 [다]는 기하와 벡터의 평면벡터의 내적에 관한 개념으로 2009 개정 교육과정 〈기하와 벡터〉 과목의 성취기준 '기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.'에 부합하는 제시문이었다.
- 문제 [3-1]은 제시문 [가]와 [나]를 이용하여 제시된 점을 지나는 기울기가 음수인 직선의 방정식의 x절편과 y절편을 구한 후 두 점사이의 거리를 구할 수 있으며 이 때 두 점사이의 거리가 최소인 기울기를

구하기 위해 〈미적분Ⅱ〉 과목에서 제시하고 있는 여러 가지 미분법을 이용할 수 있었다.

- 문제 [3-2]는 내접원의 반지름을 구하면 중심 좌표가 구해지고, 외접원의 방정식을 구할 수 있는 단계로 문제를 해결할 수 있었다. $\angle AOB$가 수직임을 이용하여 외접원의 중심을 구한 후 원의 방정식을 구하였고, 직선에 수직인 직선과의 교점을 찾을 수 있었던 문제였다. 교육과정의 수준에서 충분히 해결 가능한 문제였고 또한 문제 [3-1]을 해결하지 못했어도 문제에서 제시된 직선의 방정식을 통해 문제 [3-2]부터 해결할 수 있도록 배려한 점도 인상적이었다.
- 문제 [3-3]은 내적이 최대가 될 때의 상황을 바탕으로 문제해결을 시도할 수 있도록 하였으며 내적의 최대일 때, 최소일 때는 교육과정 내에서도 자주 언급하는 내용이므로 학생들에게 큰 어려움 없이 해결할 수 있었던 문제였다.
- 문제 [3-4]는 주어진 식의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제로 평행이동한 타원의 중심은 문제 [3-2]에서 구한 점의 좌표이므로 주어진 문제는 점에서 삼각형 OAB 또는 그 내부에 있는 점 사이의 최대, 최소 문제로 변형되므로 〈수학Ⅰ〉 과목의 내용으로 해결 가능하였다. 이차곡선의 타원의 표준형을 알고 타원이 주어진 영역의 어느 점을 지나느냐를 기하학적으로 해석하고 계산할 수 있으면 충분히 해결할 수 있는 문항이었다.

- 제시문에 대한 교육과정 부합에 대한 질문에서는 평균 4.98 수준으로 '매우 그렇다'는 의견이 대부분이었고 문제에 대한 교육과정 부합에 대한 질문에서는 평균 4.77 수준으로 이 또한 '매우 그렇다'는 의견이 대부분이었다. 제시문의 난이도는 평균 1.47로 '매우 쉽다'는 의견이었으며 각 문제 난이도는 평균 3.27로 보통수준이었다. 복합적인 개념을 적용하여 학생들이 계산 등 많은 부분에서 기본 개념이 필요하여 다소 어렵게 느꼈을 수도 있다는 소수의견도 있었다. 대부분 교육과정 내 개념을 충실히 활용한다면 충분히 해결할 수 있는 문항으로 출제되었다고 의견을 제시하였으며 변별력 등을 확보하기 위하여 문제 [3-3], [3-4]에서 복합적인 사고력을 요구하는 문항이 출제되었기는 하나 고교과정 내에서 충분히 해결할 수 있도록 출제되었다는 의견이 대부분이었다.

8.6 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
3-1	특정 성질을 만족하는 기울기 m인 직선에서 유도되는 함수 $f(m)$을 구하고, 이 함수의 최솟값을 도함수의 성질과 다항식의 인수분해를 이용하여 구하는 능력을 평가한다.	320점
3-2	직각삼각형 내접원의 성질을 이용하여 내접원의 중심을 구하는 능력과 직각삼각형 외접원과 직선의 교점을 연립방정식을 통해 구하는 능력을 평가한다.	
3-3	고정 벡터와 가변 벡터 내적의 최댓값을 구함에 있어서, 벡터의 x축, y축 좌표를 이용해 구하는 대신 서로 수직인 두 벡터의 내적은 0임을 이용하여 내적의 최댓값을 구하는 능력을 평가한다.	
3-4	좌표평면 위의 한 점과 연립부등식의 영역에 속하는 다른 한 점의 좌표에 의해 결정되는 어떤 함수의 최댓값, 최솟값을 기하학적 거리로 표현하여 정하는 능력을 평가한다.	

〈유의사항〉
- 하나의 문제라도 답안지를 백지로 제출한 경우 과락 처리함
- 문제 번호와 답안을 바꿔 작성한 경우 과락 처리함
- 검은색 이외의 색깔 펜을 사용한 경우 과락 처리함
- 답안이나 답안지 여백에 문제와 관계없는 불필요한 낙서나 이와 유사한 표식이 있는 경우 또는 답안 내용 중 확연히 수험생 본인을 식별할 수 있는 내용이 있는 경우 과락 처리함

8.7 답안 사례

【3-1】

점 $(8,1)$을 지나고 음의 기울기 m을 가지는 직선 l의 방정식은 $y=m(x-8)+1$ 이고,

이 직선 l의 x축과의 교점은 $\left(8-\dfrac{1}{m},0\right)$, y축과의 교점은 $(0,\,-8m+1)$ 이다.

선분 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이의 제곱을 기울기 m의 함수로 나타내면

$$f(m)=\left(8-\frac{1}{m}\right)^2+(8m-1)^2$$

이고, 도함수는

$$f'(m)=2\left(8-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m^2}\right)+2(8m-1)8=2(8m-1)\left(\frac{1}{m^3}+8\right)$$

이다. $m<0$ 이므로 $f'(m)=0$ 은 $m=-\dfrac{1}{2}$ 에서 유일한 근을 가진다.

$m<-\dfrac{1}{2}$ 에서 $f'(m)<0$ 이고 $-\dfrac{1}{2}<m<0$ 에서 $f'(m)>0$ 이므로

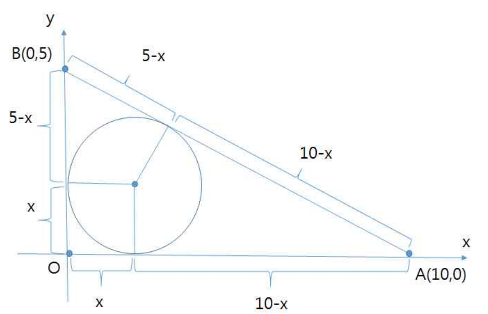
$m=-\dfrac{1}{2}$ 에서 함수 $f(m)$이 최솟값을 가지고,

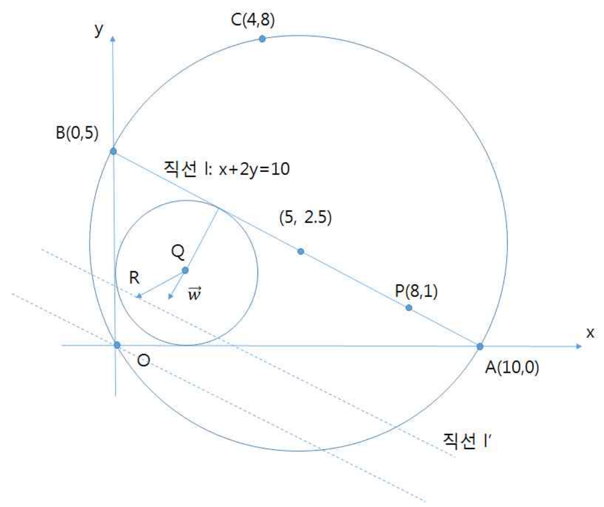
이때 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이가 최소가 되며, 직선 l의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}x+5$ (또는 $x+2y=10$)이다.

【3-2】

내접원의 중심에서 직각삼각형 각 변에 수선을 내리면 삼각형의 합동에 의해 빗변의 길이가

$15-2x=\sqrt{125}$ 이므로 $x=\dfrac{15-5\sqrt{5}}{2}$, 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{15-5\sqrt{5}}{2},\dfrac{15-5\sqrt{5}}{2}\right)$ 이다.





직선 l에 수직이고 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y=2x$이다.

삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 삼각형 OAB의 외접원의 중심은 점 A$(10,0)$과 점 B$(0,5)$를 잇는 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(5,\frac{5}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{5\sqrt{5}}{2}$이다.

따라서 삼각형 OAB의 외접원의 방정식은 $(x-5)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$ 이다.

여기에 직선의 방정식 $y=2x$을 대입하여 x에 관한 방정식으로 정리하면 $5x(x-4)=0$이므로,

외접원과 만나는 원점이 아닌 점 C의 좌표는 $(4,8)$이다.

【3-3】

벡터 $\vec{w}=(-1,-2)$는 직선 l에 수직이며,

두 벡터 $\vec{w}$와 $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때 $\vec{w}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=|\vec{w}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|\cos\theta$ 이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|\cos\theta$는 $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$의 성분 중 직선 l에 수직인 성분에 해당하므로 답안 【1-2】의 그림에 나타낸 바와 같이 직선 l에 평행한 직선 l' 위의 임의의 점 R에 대하여 $\vec{w}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$의 값이 같다.

따라서 직선 l'이 직선 l에서 가장 멀리 떨어졌을 때 $\vec{w}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$은 최대가 되고,

이때 점 R은 직선 l'과 삼각형 OAB의 교점인 원점이 된다.

따라서

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(0,0)-\left(\frac{15-5\sqrt{5}}{2},\frac{15-5\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{-15+5\sqrt{5}}{2},\frac{-15+5\sqrt{5}}{2}\right)$$

이고,

$$\vec{w}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\left(\frac{-15+5\sqrt{5}}{2},\frac{-15+5\sqrt{5}}{2}\right)\cdot(-1,-2)=\frac{45-15\sqrt{5}}{2}$$

이다.

【3-4】

점 (x,y)는 삼각형 OAB 또는 그 내부에 있으므로 다음의 연립부등식을 만족한다.

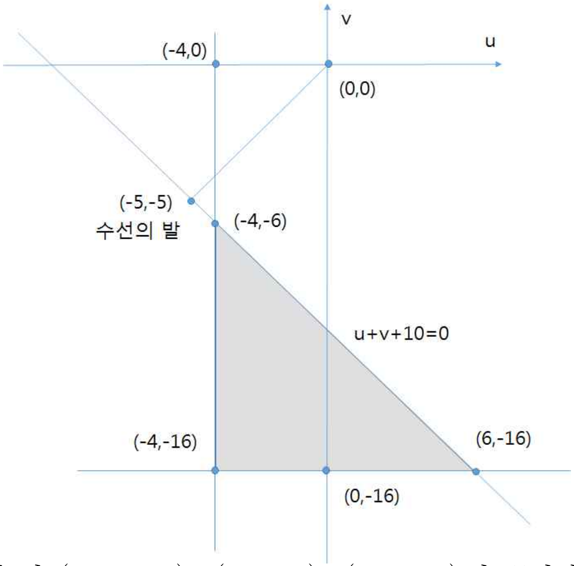
$$x+2y\le 10,\ x\ge 0,\ y\ge 0$$

$u=x-4$, $v=2(y-8)$로 변수를 치환하면 $(x-4)^2+4(y-8)^2=u^2+v^2$ 이다.

(u,v)에 대한 부등식을 얻기 위해, $x=u+4$, $y=\frac{v}{2}+8$을 위의 연립부등식에 대입하여 정리하면,

$$u+v\le -10,\ u\ge -4,\ v\ge -16$$

이다.



위 연립부등식의 영역은 세 점 $(-4,-16)$, $(6,-16)$, $(-4,-6)$이 꼭짓점인 삼각형과 그 내부이다. 따라서 위의 그림에서 보는 바와 같이 원점에서 가장 먼 삼각형 또는 그 내부의 점은 $(6,-16)$이고, 이때 u^2+v^2 은 최댓값 292를 가진다.

직선 $u+v+10=0$ 에서 원점까지 가장 가까운 점은 원점에서 직선에 내린 수선의 발인 $(-5,-5)$이나 이는 삼각형에 속하지 않으므로 꼭짓점 $(-4,-6)$이 원점에서 가장 가까운 점이고 이때 u^2+v^2는 최솟값 52를 가진다.

9. 문항카드 8 – 자연계열 논술고사 4

9.1 일반정보

유형		논술고사		
전형명		논술전형		
해당대학의 계열(과목)/문항번호		[화공생명공학전공 / 기계공학전공 / 물리학전공] / 4번		
출제범위	교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ	교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] 「수학과 교육과정」의 〈일반 과목〉	
	핵심개념 및 용어	· 정적분(넓이) · 평균값 정리	· 부등식의 영역 · 치환적분법	· 합성함수의 미분법
답안작성(예상소요)시간		40분		/ 100 분

9.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문] (글자 제한 없음)

[가] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이면,

정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인

도형의 넓이를 나타낸다.

[나] 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고,

이 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이면 $f(x)-g(x) \ge 0$이므로

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx \ge 0$$

이다. 따라서 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$가 성립한다.

[다] **(평균값 정리)** 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

[문제] 제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【4-1】 닫힌 구간 $[-1,1]$에서 연속인 도함수를 가지는 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$g(-1)=g(1)=0$ 이고, 구간 $[-1,1]$에 속하는 모든 x에 대하여 $-1 \le g'(x) \le 1$

이때 구간 $[-1,1]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 아래 부등식이 성립함을 보이시오.

$$-1+|x| \le g(x) \le 1-|x|$$

【4-2, 4-3, 4-4】

닫힌 구간 $[-1,1]$에서 연속인 도함수를 가지는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$f(-1)=f(1)=0$ **이고, 구간** $[-1,1]$**에 속하는 모든** x**에 대하여** $|f'(x)| \le \left|\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right|$

이와 같은 함수 중에서 정적분 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ **를 최대와 최소로 하는 함수** $f(x)$**를 각각** $f_{\max}(x)$ **와** $f_{\min}(x)$ **라고 하자.**

【4-2】 $-1 \le x \le 1$ 일 때 $f_{\max}(x)=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}$ 임을 보이시오.

【4-3】 정적분 $\int_{-1}^{1}\{f_{\max}(x)-f_{\min}(x)\}dx$ 를 구하시오.

【4-4】 열린 구간 $(-1,1)$에 속하는 임의의 실수 x에 대하여, 아래 관계식을 만족하는 실수 w가 구간 $(-1,1)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

$$(x+1)w+f_{\max}(x)\left\{f_{\max}(w)+\sqrt{3}\right\}=0$$

9.3 출제 의도

· 곡선 내지 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 <수학Ⅰ>, <미적분Ⅰ>, <미적분Ⅱ>에 등장하는 미적분학의 기본 지식들(정적분, 평균값정리, 합성함수의 미분법, 치환적분법등)을 이용하여 구할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

9.4 출제 근거

제시문 번호	가

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분Ⅰ	㈑ 다항함수의 적분법 3 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	· 미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분Ⅰ	김창동 외	교학사	2018	177~178	X	
미적분Ⅰ	김원경 외	비상교육	2018	158~159	X	

제시문 번호	나

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분Ⅰ	㈑ 다항함수의 적분법 2 정적분 ② 정적분의 뜻을 안다.	· 미적1422. 정적분의 뜻을 안다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분Ⅰ	김창동 외	교학사	2018	162~163, 169	X	
미적분Ⅰ	김원경 외	비상교육	2018	142~144, 149~150	X	

제시문 번호	다

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분Ⅰ	㈐ 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용	· 미적1332. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

	② 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.	

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분Ⅰ	김창동 외	교학사	2018	116	X	
미적분Ⅰ	김원경 외	비상교육	2018	102	X	

하위문제 번호	4-1

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분Ⅰ	㈑ 다항함수의 적분법 2 정적분 ② 정적분의 뜻을 안다.	· 미적1422. 정적분의 뜻을 안다.
수학Ⅰ	㈐ 도형의 방정식 5 부등식의 영역 ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.	· 수학1351-3. 연립부등식의 영역을 나타낼 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분Ⅰ	김창동 외	교학사	2018	177~178	○	
미적분Ⅰ	김원경 외	비상교육	2018	158~159	○	
수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2017	212~217	○	
수학Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2018	202~209	○	

하위문제 번호	4-2

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학Ⅰ	㈐ 도형의 방정식 5 부등식의 영역 ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.	· 수학1351-3. 연립부등식의 영역을 나타낼 수 있다.
미적분Ⅰ	㈑ 다항함수의 적분법 2 정적분 ② 정적분의 뜻을 안다.	· 미적1422. 정적분의 뜻을 안다.
미적분Ⅱ	㈑ 적분법 1 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	· 미적2411. 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항

미적분 I	김창동 외	교학사	2018	177~178	○	
미적분 I	김원경 외	비상교육	2018	158~159	○	
미적분 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2018	141	○	
미적분 II	이준열 외	천재교육	2018	176	○	
수학 I	이준열 외	천재교육	2017	212~217	○	
수학 I	류희찬 외	천재교과서	2018	202~209	○	

하위문제 번호	4-3

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분 I	㈑ 다항함수의 적분법 3 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	· 미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분 I	김창동 외	교학사	2018	177~178	○	
미적분 I	김원경 외	비상교육	2018	158~159	○	

하위문제 번호	4-4

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분 I	㈐ 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용 ② 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.	· 미적1332. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.
미적분 II	㈐ 미분법 1 여러 가지 미분법 ② 합성함수를 미분할 수 있다.	· 미적2312. 합성함수를 미분할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분 I	김창동 외	교학사	2018	116	○	
미적분 I	김원경 외	비상교육	2018	102	○	
미적분 II	김원경 외	비상교육	2017	100~101	○	
미적분 II	이준열 외	천재교육	2018	125~126	○	

9.5 문항 해설

9.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 [가]는 2009 개정 교육과정 교과서 ‘미적분Ⅰ-㈑다항함수의 적분법-③정적분의 활용’과 〈미적분Ⅰ〉 과목의 성취기준인 ‘미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이’를 바탕으로 제시된 내용이었다.
- 제시문 [나]는 〈미적분Ⅰ〉 과목의 성취기준인 ‘미적1422. 정적분의 뜻을 안다.’를 바탕으로 응용된 제시문이었으며 특히 〈미적분Ⅱ〉 과목의 성취기준 ‘미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.’에서도 이와 유사한 개념을 확인할 수 있었던 개념이다.
- 제시문 [다]는 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅰ〉 과목의 성취기준인 ‘미적1332. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.’를 그대로 가져온 부분으로 학생들이 쉽게 적용할 수 있는 제시문이었다. 또한 모든 문제를 해결하면서 아이디어를 쉽게 떠올릴 수 있도록 제시된 내용이었다.

- 문제 [4-1]은 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅰ〉 과목의 성취기준인 ‘미적1422. 정적분의 뜻을 안다.’와 〈수학Ⅰ〉 과목의 부등식과 제시문 [나]에서 제시된 내용을 바탕으로 이해할 수 있는 문항이었고 또한 제시문 [다]에서 제시된 평균값의 정리 개념을 통해서도 해결할 수 있는 문항으로 부등식을 증명할 수 있었던 문항이었다.
- 문제 [4-2]는 문제 [4-1]을 바탕으로 유추할 수 있는 문제였으며 닫힌구간에서 함수를 정의하고, 제시문 [나]와 치환적분법을 이용하여 함수의 범위를 구한 다음 고등학교 교과서 〈미적분Ⅱ〉에서 배운 치환적분을 통해 해결할 수 있는 문항이었다. 치환적분에 관한 내용은 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅱ〉 과목의 성취기준인 ‘미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.’에 명시되어 있다.
- 문제 [4-3]은 문제 [4-2]에서 구한 $f_{\max}(x)$와 이를 통해 생각할 수 있었던 $f_{\min}(x)$를 적용할 수 있었다. 기본적으로는 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅰ〉 과목의 성취기준인 ‘미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.’에서 이해한 정적분의 개념을 생각하며 문제를 파악할 수 있었던 문항이었다. 또한 기하학적 의미를 통해 문제의 내용을 도형으로 나타내어 정적분 없이도 넓이를 확인할 수 있었던 문항이기도 하였다. 그리고 계산과정이 복잡해보이지만 치환을 통해서도 직접 적분 계산을 통해서도 충분히 해결할 수 있는 문항이었다.
- 문제 [4-4]는 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅰ〉 과목의 성취기준인 ‘미적1332. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.’와 〈미적분Ⅱ〉 과목의 성취기준인 ‘미적2312. 합성함수를 미분할 수 있다.’, ‘미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.’의 내용을 기반으로 이해할 수 있었던 문항이었다. 변수가 많아서 학생들이 생소하게 여겨질 수도 있었으나 제시문 [다]에서 제시한 내용을 바탕으로 한 개의 변수를 기준으로 정리만 할 수 있었다면 해결할 수 있었던 문항이었다. 즉, 구간을 $(-1,\ x)$에 대해서 판단하고 w에 대해 식을 정리할 수 있었다. 또한 함수가 문제 [4-2]에서 미리 제시되어 있어서 이를 바탕으로 직접 문제의 방향을 유추하여 시도해 볼 수도 있었다.

9.5.2 출제 검토 교사 의견

- 모든 제시문은 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅰ〉 교과서에서 발췌하였다. 특히, 제시문 [나]는 문제를 쉽게 해결할 수 있도록 풀어 적으면서 난이도를 조절하였다. 〈미적분Ⅰ〉은 인문계열 학생들도 필수적으로 배우기 때문에, 자연계열 수학 교육과정을 이수한 학생들이라면 제시문의 내용을 이해하고 문제를 적용하는데 어려움이 없었을 것이다. 또한 모든 제시문은 문제 [4-1]을 증명할 수 있는 단서가 될 수 있었으

며, 문제 [4-2], 문제 [4-3]을 해결하기 위한 이론적 토대가 되므로 학생들에게 출제 의도를 안내하기 위해 필요한 내용이었다.

- 제시문 [가]와 [나]는 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-㈑다항함수의 적분법'의 '2정적분', '3정적분의 활용'에서 발췌하였다. 특히 제시문 [나]는 교과서의 내용을 한 번 더 풀어서 적었으며, 이로 인해 학생들이 문제에 쉽게 접근하도록 배려하였다.

- 문제 [4-1]의 경우, 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-㈑다항함수의 적분법-2정적분'의 개념을 바탕으로 '수학Ⅰ-㈐도형의 방정식-5 부등식의 영역'으로 제시문 [나]를 참고하는 방법으로 닫힌구간 $[-1, 1]$에 속하는 x로 분할하여 각각 정적분하여 결론을 도출하는 방법과 제시문 [다]를 참고하여 '평균값 정리'에 의해 결론을 도출할 수 있는 두 가지 방법이 제시되었다.
- 문제 [4-2]의 경우, $g'(x)$의 범위가 상수로 제시된 문제 [4-1]의 과정을 바탕으로 해결하는 문제이므로 문제 [4-1]을 해결한 학생이라면 쉽게 접근할 수 있었다.
- 문제 [4-3]의 경우, 공식으로 해결하거나 정적분의 정의를 이해하고 접근하는 두 유형으로 풀이한 학생들이 많았을 것이다. 단순히 공식을 암기하여 해결할 수도 있지만 정적분의 정의로 접근하는 학생들이 더 쉽고 빠르게 문제를 해결할 수 있었기에 좋은 문제였다고 판단된다.
- 문제 [4-4]의 경우, 문제 [4-2]에서 제시한 함수 $f_{\max}(x)$와 제시문 [다]의 '평균값 정리'를 이용하면 결론을 도출할 수 있었다.
- 모든 문제는 고등학교 수학과 교육과정의 내용을 이용하여 풀이할 수 있도록 구성되었으며, 정적분의 내용과 그 성질을 종합적으로 평가하기에 적합하였다. 또한 모든 문제 해결 과정에 무리한 계산을 요구하고 않았으므로 단순한 계산 능력 보다는 수학적 사고력을 요구하는 문제였다고 판단된다.

9.5.3 자문위원 평가 의견

- 제시문 [가]는 교과서 내 곡선과 축 사이의 넓이를 구하는 개념 내용으로 고등학교 교육과정 범위에 있다. 또한, 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅰ〉 과목의 성취기준인 '미적분I-1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.'에 부합하는 제시문이었다.
- 제시문 [나]는 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 과정을 응용한 내용이며 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅰ〉 과목의 성취기준인 '미적분Ⅰ-1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.'에 부합하는 제시문이었다.
- 제시문 [다]는 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅰ〉 과목의 성취기준인 '미적분I-1332. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.'에 부합하는 제시문이었다.

- 전반적인 문제는 〈미적분Ⅰ〉에서 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 정적분의 뜻, 평균값 정리를 이해할 수 있는 수준과 〈미적분Ⅱ〉에서 치환을 이용한 적분 등을 이해할 수 있는 수준이면 해결할 수 있는 수준의 문제로 구성되었다.
- 문제 [4-1]은 평균값 정리를 활용하여 주어진 범위를 나누어서 부등식을 증명하는 문항이었으며 제시문 [다]에서 주어진 내용에 부합하는 내용으로 제시문 [나]의 내용은 문제에서 힌트로도 적용될 수 있는 내용이었다. 〈미적분Ⅰ〉에서 배운 '미분과 적분의 관계'의 개념을 이해하고 있으면 제시문과 결합하여 충분히 해결할 수 있었던 문제였다.
- 문제 [4-2]는 문제 [4-1]의 활용으로 고등학교 교육과정의 수준은 넘어서지 않으나 $f_{\max}(x)$와 $f_{\min}(x)$과 같이 함수에서 첨자를 사용한 최대, 최소의 수학적 기호의 사용이 학생들에게 다소 생소할 수도 있었

지만 기호 자체에 거부감만 없었다면 제시문을 기반으로 하여 생각할 수 있었던 문제였다.

- 문제 [4-3]은 문제 [4-2]에서 구한 함수 $f_{\max}(x)$ 와 $f_{\min}(x)$ 을 적분하는 과정에서 삼각함수의 치환을 다루는 점이 있어서 다소 어렵게 생각할 수 있다고 판단되기도 하였다. 하지만 2009 개정 교육과정 〈미적분Ⅱ〉 과목의 성취기준인 '미적분Ⅱ-2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.'의 개념을 이해할 수 있는 수준이면 단계적으로 해결할 수 있었던 문제였으며 또한 대학수학능력시험 및 평가원 등의 시험 내에서도 자주 등장했던 유형의 적분방법이어서 교육과정내의 범위를 충분히 유지하였다고 판단할 수 있다.
- 문제 [4-4]는 주어진 관계식을 만족하는 실수 x가 구간 (-1, 1)에 적어도 하나 존재함을 보이는 것인데 문제 [4-2]의 결과와 정의를 이용하여 대수적인 식으로 표현하여 주어진 관계식을 $f_{\max}(x)$ 와 $f_{\min}(x)$ 에 관한 방정식 관점에서 x의 값이 -1과 1사이에서 변할 때 w에 관한 방정식의 해가 -1과 1사이에 존재함을 보여 해결할 수 있었다. 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(다)다항함수의 미분법-③도함수의 활용'에서 이해한 내용을 바탕으로 기존 교육과정 범위 내에서 해결할 수 있는 문항이었다. 그러나 이를 유추하는 과정이 교육과정 범위에 벗어나지는 않았지만 제시문을 사용할 수 있게 식을 변형하는 부분과 같이 다소 높은 문제 해결력이 요구되어 변별력이 있는 문제라고 생각할 수 있었다. 하지만 함수를 이미 문제 [4-2]에서 확정해주었고, 변수가 두 가지이므로 등식의 좌변과 우변에 각각 정리해볼 수 있었으며, 평균값의 정리를 정확히 이해하고 있다면 존재성을 보이려는 변수가 단독으로 배치되도록 정리할 필요가 있음을 고려하였다면 교육과정 내에서 충분히 해결할 수 있었던 문제였다.

- 제시문에 대한 교육과정 부합에 대한 질문에서는 평균 4.81 수준으로 '매우 그렇다'는 의견이 대부분이었고 문제에 대한 교육과정 부합에 대한 질문에서는 평균 4.53 수준으로 이 또한 '매우 그렇다'는 의견이 대부분이었다. 제시문의 난이도는 평균 2.13로 '매우 쉽다'는 의견이었으며 각 문제 난이도는 평균 3.93으로 약간 어려운 수준으로 판단하였다. 첨자 등을 도입하였거나 문제 [4-2]처럼 함수를 보이는 부분, 복수의 변수를 통해 평균값 정리를 이해하는 능력, 미분/적분 내용을 함께 고려해야 하는 점 등 학생들 입장에서는 다소 어렵게 생각할 수 있었던 문제였다고 생각하는 다수의 의견이 있었지만 교육과정을 준수한 변별력 확보라는 차원에서뿐만 아니라 개념과 제시문의 내용에서 아이디어를 얻고 문제 [4-1] 내용을 기반으로 문제 해결이 이루어졌다면 수월하게 해결할 수 있었던 학생들도 있었을 것이라 여겨진다.

9.6 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
4-1	연립부등식의 영역을 나타낼 수 있고, 정적분의 뜻을 이해하고 있는 지를 평가한다.	480점
4-2	연립부등식의 영역을 나타낼 수 있고, 정적분의 뜻을 이해하고 있는지를 평가한다. 또한 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.	
4-3	곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.	
4-4	함수에 대한 평균값 정리를 이해하고 있는지를 평가한다.	

〈유의사항〉

- 하나의 문제라도 답안지를 백지로 제출한 경우 과락 처리함
- 문제 번호와 답안을 바꿔 작성한 경우 과락 처리함
- 검은색 이외의 색깔 펜을 사용한 경우 과락 처리함
- 답안이나 답안지 여백에 문제와 관계없는 불필요한 낙서나 이와 유사한 표식이 있는 경우 또는 답안 내용 중 확연히 수험생 본인을 식별할 수 있는 내용이 있는 경우 과락 처리함

9.7 답안 사례

【4-1】

부등식 $-1 \le g'(t) \le 1 \quad (-1 \le t \le 1)$에 대하여 -1부터 x까지 적분하면, 제시문 [나]에 의하여 아래 부등식을 얻는다.

$$-x-1 \le \int_{-1}^{x} g'(t)dt = g(x) \le x+1$$

마찬가지로 x부터 1까지 적분하면

$$-1+x \le \int_{x}^{1} g'(t)dt = -g(x) \le 1-x$$

이므로 $x-1 \le g(x) \le -x+1$ 이다.

두 부등식으로부터 문제에 주어진 부등식 $-1+|x| \le g(x) \le 1-|x|$ 이 성립함을 알 수 있다.

【4-2】

x가 양인 경우와 음인 경우로 나누어 풀이한다.

가) $0 \le x \le 1$ 인 경우, 아래 부등식 $(0 \le t \le 1)$

$$-\frac{t}{\sqrt{4-t^2}} \le f'(t) \le \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$$

에서 x부터 1까지의 적분을 고려하여

$$-\int_{x}^{1} \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt \le \int_{x}^{1} f'(t)\,dt \le \int_{x}^{1} \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$$

$$\sqrt{3}-\sqrt{4-x^2} \le f(1)-f(x) \le \sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}$$

을 얻는다. 따라서 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$$\sqrt{3}-\sqrt{4-x^2} \le f(x) \le \sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}$$

나) $-1 \le x \le 0$ 인 경우, 아래 부등식 $(-1 \le t \le 0)$

$$\frac{t}{\sqrt{4-t^2}} \le f'(t) \le -\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$$

에서 -1부터 x까지의 적분을 고려하면 가)와 동일한 부등식을 얻는다.

$$\sqrt{3}-\sqrt{4-x^2} \le f(x) \le \sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}$$

따라서 모든 구간 $[-1,1]$에서 $f(x)$는 $\sqrt{3}-\sqrt{4-x^2} \le f(x) \le \sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}$ 을 만족한다.

이로부터 $f_{\max}(x)=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}$ 임을 알 수 있다.

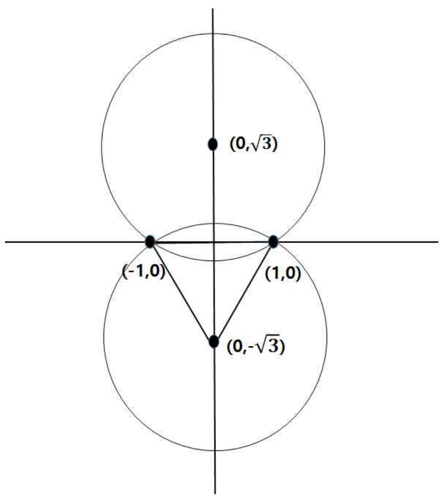
【4-3】

함수 $f_{\max}(x)=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}$ 의 그래프는 반지름의 길이가 2이고 중심이 $(0,-\sqrt{3})$인 원의 일부로서, 두 점 $(-1,0)$과 $(1,0)$을 연결하는 호이다.

또한 $f_{\min}(x)=-f_{\max}(x)$ 이므로 $\int_{-1}^{1}\{f_{\max}(x)-f_{\min}(x)\}dx=2\int_{-1}^{1}f_{\max}(x)\,dx$ 이고 이것은 원과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 두 배이다.

세 점 $(0,-\sqrt{3})$, $(-1,0)$, $(1,0)$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형을 이루며 넓이는 $\sqrt{3}$이다.

그러므로 구하고자 하는 정적분의 값은 $2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times 4-\sqrt{3}\right)=\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$ 이다.



【4-4】

함수 $f_{\max}(x)$ 에 대하여 평균값 정리를 -1 과 구간 $(-1,1)$ 에 속하는 임의의 x 에 관해 적용하면, 아래관계를 만족하는 w 가 -1과 x 사이에, 따라서 -1과 1 사이에 존재한다.

$$\frac{f_{\max}(x)-f_{\max}(-1)}{x+1} = \frac{f_{\max}(x)}{x+1} = f'_{\max}(w)$$

여기에 $f'_{\max}(w) = -\frac{w}{\sqrt{4-w^2}} = -\frac{w}{f_{\max}(w)+\sqrt{3}}$ 을 대입하여 정리하면 구하고자 하는 식을 얻게 된다.