6. 문항카드 5 - 자연계열 논술고사 1

6.1 일반정보

유형		논술고사		
전형명		논술전형		
해당대학의 계열(과목)/문항번호		[전자공학전공 / 컴퓨터공학전공 / 수학전공] / 1번		
출제범위	교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분I, 미적분Ⅱ	교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] 「수학과 교육과정」의 〈일반 과목〉	
	핵심개념 및 용어	· 등비수열의 뜻 · 최대·최소 정리	· 정적분의 연산과 성질 · 수열의 극한	· 치환적분법
답안작성(예상소요)시간		40분		/ 100 분

6.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문] (글자 제한 없음)

[가] 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$이고, $r \neq 1$일 때 첫째항부터

제n항까지의 합은 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 이다.

또한 $|r| < 1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$ 이다.

[나] 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $h(x)$는 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

[다] 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $h(x)$가 이 구간에 속한 모든 x에 대하여

$m \le h(x) \le M$ (m과 M은 상수)을 만족할 때, 다음 부등식이 성립한다.

$$m(b-a) \le \int_a^b h(x)\,dx \le M(b-a)$$

[라] 함수 $h(x)$가 어떤 구간에서 연속일 때, 그 구간에 속하는 임의의 실수 a, b, c에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^c h(x)\,dx + \int_c^b h(x)\,dx$$

[마] 닫힌 구간 $[a,\, b]$에서 연속인 함수 $h(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\, \beta]$에서 연속이고, $a = g(\alpha),\, b = g(\beta)$ 이면

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_\alpha^\beta h(g(t))g'(t)\,dt$$

[문제]
구간 $[0, \infty)$에서 연속이며 모든 $x \ge 0$에 대하여 $f(x) = \frac{1}{5}f(2x)$ 를 만족하고 $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ 인 함수 $f(x)$에 대하여, 제시문 [가]~[마]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 자연수 n에 대하여 $a_n = \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(x)\,dx$ 로 정의되는 수열 $\{a_n\}$은 등비수열임을 보이시오.

【1-2】 $\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2^n}}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$ 임을 보이시오.

【1-3】 문제 【1-1】, 【1-2】의 결과를 이용하여 정적분 $\int_1^2 f(x)\,dx$를 구하시오.

【1-4】 임의의 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{100^n}\int_0^{4^n} f(x)\,dx$ 의 값을 구하시오.

6.3 출제의도

· 〈수학Ⅱ〉, 〈미적분I〉, 〈미적분Ⅱ〉에서 학습하는 등비수열, 수열의 극한, 정적분의 성질, 연속함수의 최대최소 정리, 치환적분법 등의 기본적인 개념들의 이해도를 평가하고자 하였다.
· 치환을 통한 적분의 기본변환을 이해하고 적용할 수 있는지를 평가하고, 등비수열의 기본성질을 이해하는가를 평가하고자 하였다.
· 연속함수에 대한 정적분의 정의와 기본 성질을 수험생이 올바로 이해하고 있음을 평가하고자 하였다. 또한, 수열의 수렴성을 증명하는 능력을 평가하고자 하였다.
· 제시문을 올바로 이해한 후 정적분의 성질 및 등비수열의 합과 극한을 올바로 취함으로써 주어진 문제를 해결할 수 있는 종합적인 능력을 평가하고자 하였다.

6.4 출제 근거

제시문 번호	가

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학Ⅱ	(다) 수열 1 등차수열과 등비수열 ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째 항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.	· 수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고 일반항을 구할 수 있다. · 수학2313-2. 등비수열의 첫째항부터 n항까지의 합을 구할 수 있다.
미적분I	(가) 수열의 극한 2 급수 ② 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.	· 미적1122. 등비급수의 뜻을 알고 그 합을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학Ⅱ	이강섭 외	미래엔	2018	119~120	X	
수학Ⅱ	정상권 외	금성출판사	2016	132, 134	X	
미적분I	김원경 외	비상교육	2018	31~32	X	
미적분I	김창동 외	교학사	2018	35	X	

제시문 번호	나

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분I	(나) 함수의 극한과 연속 2 함수의 연속 ② 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	· 미적1222. 연속함수의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분I	김창동 외	교학사	2018	73~75	X	
미적분I	이강섭 외	미래엔	2018	77	X	

제시문 번호	다

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분I	㈑ 다항함수의 적분법 2 정적분 ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.	· 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분I	김창동 외	교학사	2018	162	X	
미적분I	이강섭 외	미래엔	2018	165~166	X	

제시문 번호	라

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분I	㈑ 다항함수의 적분법 2 정적분 ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.	· 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분I	김창동 외	교학사	2018	169~172	X	
미적분I	이강섭 외	미래엔	2018	169~172	X	

제시문 번호	마

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분Ⅱ	㈑ 적분법 1 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	· 미적2411. 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부

					「○,X」 표기	재구성사항
미적분Ⅱ	정상권 외	금성출판사	2017	186	X	
미적분Ⅱ	이강섭 외	미래엔	2018	166~167	X	

하위문제 번호	1-1

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학Ⅱ	㈐ 수열 1 등차수열과 등비수열 ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째 항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.	· 수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고 일반항을 구할 수 있다.
미적분Ⅱ	㈑ 적분법 1 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	· 미적2411. 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학Ⅱ	이강섭 외	미래엔	2018	119~120	○	
미적분Ⅱ	정상권 외	금성출판사	2017	186	○	
미적분Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	169	○	

하위문제 번호	1-2

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분I	㈏ 함수의 극한과 연속 2 함수의 연속 ② 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	· 미적1222. 연속함수의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있다.
	㈑ 다항함수의 적분법 2 정적분 ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.	· 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분I	김창동 외	교학사	2018	73~75, 169~171	○	
미적분I	김원경 외	비상교육	2018	68, 151	○	

하위문제 번호	1-3

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분I	㈎ 수열의 극한 2 급수 ② 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.	· 미적1122. 등비급수의 뜻을 알고 그 합을 구할 수 있다.
미적분Ⅱ	㈑ 적분법 1 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	· 미적2411. 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분I	김창동 외	교학사	2018	35	○	
미적분I	김원경 외	비상교육	2018	31~32	○	
미적분Ⅱ	정상권 외	금성출판사	2017	186	○	

하위문제 번호	1-4

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학Ⅱ	㈐ 수열 1 등차수열과 등비수열 ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째 항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.	· 수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고 일반항을 구할 수 있다.
미적분Ⅱ	㈑ 적분법 1 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	· 미적2411. 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학Ⅱ	정상권 외	금성출판사	2018	131~132	○	
수학Ⅱ	이강섭 외	미래엔	2018	119~120	○	
미적분Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	169	○	

6.5 문항 해설

6.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 [가]는 2009 개정 교육과정 '수학Ⅱ-㈐수열-①등차수열과 등비수열'와 '미적분Ⅰ-㈎수열의 극한-②급수'에 관련된 제시문이다. 특히 등비수열의 합과 등급급수에 관련된 내용으로 구성되어 있으며 교육과정에서 다루는 내용을 소재로 하고 있다.
- 제시문 [나]는 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-㈏함수의 극한과 연속-②함수의 연속'에 해당하는 내용이며 최대·최소정리에 관련된 내용을 소재로 하는 제시문이다.
- 제시문 [다], [라]는 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-㈑다항함수의 적분법-②정적분'에 관련된 내용으로 교육과정 내에서 다루는 내용이다.
- 제시문 [마]는 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅱ-㈑적분법-①여러 가지 적분법'에서 다루는 내용으로 특히 치환적분법에 관련된 내용을 다루는 제시문이다.

- 문제 [1-1]은 제시문 [마]의 치환적분법과 제시문 [가]의 등비수열의 합에 관련된 내용을 이용하여 해석하는 문제이다. 치환적분법을 활용하여 a_n을 구하고 이것이 등비수열임을 찾아내는 과정으로 교육과정에 적합한 수준의 문항으로 판단된다. 또한 구체적인 값을 대입하여 규칙성을 예측하고 이를 활용하여 주어진 내용을 해석할 수도 있는 문항으로 쉽게 해결할 수 있는 수준이다.
- 문제 [1-2]는 문제 [1-1]의 결과, 제시문 [가], [마]를 활용하여 해결하는 문항이다. 하지만 문제를 해결하기 위한 아이디어가 학생들에게는 익숙한 방법이 아니어서 쉽게 해결하지 못했을 것이다. 제시문과 문제 [1-1]의 결과를 활용하여 추론하는 과정에서 많은 학생이 어려움을 겪었을 것으로 보이지만 교육과정 안에서 해결할 수 있는 문항으로 생각된다.
- 문제 [1-3]은 문제 [1-1]과 [1-2]의 결과를 활용하고 제시문 [라], [마]를 이용하면 쉽게 해결되는 문제이다. 하지만 제시문과 앞선 문제의 결과가 없었다면 어려운 문항으로 단계적인 풀이가 가능하도록 앞선 문제를 제시함으로써 난도를 조절할 수 있었던 문항으로 보인다.
- 문제 [1-4]는 앞선 문제에서 사용되었던 내용과 결과를 활용하여 해결 방법을 추론할 수 있는 문제로 보인다.

6.5.2 출제 검토 교사 의견

- 제시문은 고등학교 교과서 〈수학Ⅱ〉, 〈미적분Ⅰ〉, 〈미적분Ⅱ〉의 내용을 발췌하여 구성하였으며, 고등학교 수학과 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 내용은 수록하지 않았다. 문제 해결을 위한 수학적 개념, 원리, 법칙 등이 교과서의 표현과 유사하게 제시되어 고등학교 수학과 교육과정을 이수한 학생이면 제시문을 이해하는데 어려움이 없을 것으로 예상한다. 또한 고등학교 수학과 교육과정의 성취기준에 해당되는 내용과 문제 해결을 위한 특별한 조건을 구분하여 제시함으로써 학생들이 출제의도를 파악하는데 무리가 없을 것이다.

- 문제 [1-1]은 〈수학Ⅱ〉의 등비수열의 정의($a_{n+1} = ra_n$)와 〈미적분Ⅱ〉의 치환적분법을 제대로 이해하고 있는지를 평가하는 문항이다. 제시문 [가]와 [마]를 이용하여 해결하면 되는 문제이므로 교육과정에 적합하다고 판단된다. 등비수열의 기본 성질과 치환적분의 성질을 연계한 점이 상당히 인상적이다.
- 문제 [1-2]는 제시문 [나]와 [다]를 이용하여 해결하는 문제이다. 즉, 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-㈏함

수의 극한과 연속-②함수의 연속’과 2009 개정 교육과정 ‘미적분Ⅰ-㈑다항함수의 적분법-②정적분’에 관련된 내용이다. 고등학교 교육과정을 충분히 이해하고 있다면 풀이가 가능한 문제로 생각된다. 연속함수의 ‘최대·최소 정리’와 ‘미적분 기본정리’는 〈미적분Ⅰ〉의 내용이지만 그동안 거의 출제되지 않았다. 그런데 문제 해결을 위하여 학생들이 활용해야 하는 제시문 [나], [다]는 ‘최대·최소 정리’와 ‘미적분 기본정리’의 일부 내용을 담고 있어서 해당 내용에 대한 성취기준의 평가가 가능하며, 제시문 [라]의 내용도 연계되어 있어서 〈미적분Ⅰ〉 과목의 전반적인 이해도를 평가할 수 있을 것으로 예상한다.

- 문제 [1-3]은 2009 개정 교육과정 ‘수학Ⅱ-㈐수열-①등차수열과 등비수열’과 2009 개정 교육과정 ‘미적분Ⅱ-㈑적분법-①여러 가지 적분법’에 관련된 내용이다. 치환적분을 이용하여 쉽게 해결할 수 있는 문제이므로 많은 학생들이 해결할 수 있으리라 판단된다. 문제 해결을 위하여 교과서 〈수학Ⅱ〉, 〈미적분Ⅰ〉, 〈미적분Ⅱ〉에 걸친 많은 내용을 필요로 하지만, 문제 [1-1]과 문제 [1-2]에서 제시된 내용을 참고하면 학생들이 문제 해결에 오랜 시간을 필요로 하지 않을 것이다.
- 문제 [1-4]는 2009 개정 교육과정 ‘수학Ⅱ-㈐수열-①등차수열과 등비수열’과 2009 개정 교육과정 ‘미적분Ⅱ-㈑적분법-①여러 가지 적분법’에 관련된 내용이다. 이 문제 [1-1]에서 제시된 a_n에 힌트를 얻어 b_n을 제대로 잡으면 등비수열의 정의와 치환적분법으로 해결할 수 있는 문제이다. 학생들이 $f(x)=\frac{1}{5}f(2x)$의 관계와 정적분 $b_n=\int_0^{2^{n-1}} f(x)dx$을 이용하여 수열 $\{b_n\}$의 성질을 파악하지 못하면 다소 어렵게 느낄 수 있다. 그러나 세부 문항과의 연계성과 출제 의도를 잘 파악한 학생이면 간단한 등비수열의 성질로 문제 해결이 가능하다.

6.5.3 자문위원 평가 의견

- 제시문 [가]에 대하여 자문교사 모두가 고등학교 교육과정 범위라는 의견을 주었으며 교육과정 수준에 적정한가라는 질문에도 ‘매우 그렇다’라는 의견을 나타냈다. ‘각각 모든 〈수학Ⅱ〉 및 〈미적분Ⅰ〉 교과서에 공통으로 명시되어 소개되었고, 교육과정 상 주요하게 다뤄진 내용’이라는 의견이 있었다. 특히, ‘등비수열에 대한 내용은 수열의 학습에서 기본이 되고, 등비급수에 대한 내용 또한, 수열의 극한의 후반부 내용이나 대학수학능력시험에서 매해 거르지 않고 출제될 만큼 빈출유형과 관련된 기본 개념이므로 해당 과목을 이수한 학생들에겐 모두 익숙한 내용’이라는 답변을 주었다.
- 제시문 [나]에 대하여 자문교사 모두가 교육과정 범위와 수준이 적정한지에 대한 질문에 ‘매우 그렇다’라고 판단하였다. 특히 제시문 [나]의 정리는 ‘연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다는 교육과정을 바탕으로 연속함수의 가장 기본적인 정리이고, 연속함수의 성질은 함수의 극한에 관한 성질과 유사하고 직관적으로 이해할 수 있는 내용이자 이어 배우게 될 많은 미분법과 적분법의 밑바탕이 될 수 있는 내용인 최대·최소 정리를 제시문으로 제시하여 다른 제시문과의 내용의 연계성이 강조되었다’라는 의견이 있었다.
- 제시문 [다]에 대하여 대부분의 자문교사가 교육과정 범위와 수준에 적정하다고 답변하였으며 일부 의견으로 ‘제시문 [다]의 내용이 구체적으로 명시되어 있지 않지만 넓이를 통하여 유추가 가능한 부등식이다.’이 있었다. 또한 ‘개정 교육과정에서는 구분구적법을 통하여 정적분을 정의하고 있으며, 구분구적법을 이해하고 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있도록 하고 있다. 고등학교 학생들에게는 오히려 구분구적법을 통하여 주어진 부등식이 성립함을 보여주는 것이 이해가 쉬울 것으로 보인다.’라는 의견도 있었다.
- 제시문 [라]에 대하여 자문교사 대부분이 ‘교육과정 범위와 수준에 적정하다고 의견을 주었다. 그리고 단순히 교육과정에 제시된 학습 내용 성취기준에서는 직접적인 내용이 표현되고 있지 않지만 대부분의 교과

서에서 정적분의 성질을 알고, 이를 이용하여 정적분을 계산하는 것을 목표로 제시문 내용을 가르치고 있다'라는 의견을 주었다.

- 제시문 [마]에 대한 자문교사의 의견은 대부분 교육과정 범위와 수준에 적합하다고 답변하였다. 특히 대부분의 교과서에서 제시되고 있는 내용을 발췌한 것으로 고등학교 교육과정을 이수한 학생들이 제시문을 이해하고 적용하는데 어려움이 없었을 것이라는 의견을 주었다.

- 문제 [1-1]은 '고등학교 교육과정 범위와 수준에 부합하는가'라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.7, 4.7로 대부분 '그렇다'라는 의견이다. 특히 '치환적분으로 변형된 식을 통해 등비수열의 귀납적 표현에 해당하는 식을 쉽게 발견할 수 있으므로 치환적분법을 활용할 수 있는 학생이라면 누구나 쉽게 해결할 수 있어 첫 문항의 첫 질문에 요구될법한 '워밍업'의 취지에 부합하는 문항이라고 보여진다'라는 의견이 있었다.
- 문제 [1-2]는 '고등학교 교육과정 범위와 수준에 부합하는가'라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.5, 4.3로 대부분 '그렇다'라는 의견이다. 고등학생들에게 익숙하지 않은 적분표현이라 어렵게 느꼈을 수도 있다는 의견이 있었지만 교육과정에 벗어난 표현과 기호를 사용한 부분이 아니기 때문에 학생들의 기본 개념을 활용한 추론능력을 평가할 수 있는 문항이라는 의견을 주었다.
- 문제 [1-3]은 '고등학교 교육과정 범위와 수준에 부합하는가'라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.7, 4.7로 대부분 '그렇다'라는 의견이다. 특히 적분 구간을 생각하고 치환적분을 이용하여 문제에서 요구하는 적분 구간을 문제 [1-1], [1-2]에서 얻을 수 있는 적분 구간으로 바꾸어 주면 어렵지 않게 해결할 수 있는 문항이라는 의견을 주었다.
- 문제 [1-4]는 '고등학교 교육과정 범위와 수준에 부합하는가'라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.7, 4.7로 대부분 '그렇다'라는 의견이다. 문제 [1-1]에서 파악한 규칙성을 문제 [1-3]에서 확장하여 적당한 값을 구해보고 이것을 문제 [1-4]에서 일반화 할 수 있는지를 평가하는 것이라는 의견이 있었다. 문제 [1-3]을 정확한 이해하고 해결한 학생이라면 문제 [1-4]를 해결하는 데에 동일한 규칙성을 바탕으로 귀납적인 추론을 통해 무난하게 해결할 수 있었을 것이라는 의견이 있었다.

- 문제 1의 제시문에 대한 난이도에 대한 질문에 5점 척도 가중평균이 1.9로 대부분 '쉽다'라는 의견이었으며 문항에 대한 난이도는 3.2로 '보통이다'라는 의견을 줬다. 이는 문제 [1-2]가 학생들에게 익숙하지 않은 표현일 수 있다는 의견 때문에 나타난 것으로 파악된다. 구체적으로 '문제 [1-2]가 낯설기는 하지만 고등학교 교육과정을 이수한 학생이라면 제시문을 쉽게 이해할 수 있고 제시문을 이용한다면 학생들이 어렵지 않게 해결할 수 있을 것입니다. 또한, 교육청 모의고사에 자주 사용되는 함수의 조건을 이용하는 문제가 출제되어 학생들이 풀이에 쉽게 접근할 수 있겠지만 문제해결과정을 서술하는 것에 익숙하지 않아 이를 서술하는 데에 어려움을 느낄 수 있다고 생각되기에 적절한 수준의 변별력을 보일 것으로 예상됩니다.' 라는 의견이 있었다.

6.6 채점 기준

<table>
<tr><th>하위문항</th><th>채점기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>1-1</td><td>주어진 함수의 성질을 활용하여 치환적분을 통해 일반항이 정적분으로 표현된 특정 수열이 등비수열을 이루는 것을 보이는 문제로서, 치환을 통한 적분의 기본변환을 이해하고 적용할 수 있는지를 평가하고, 등비수열의 기본성질을 이해하는가를 평가한다.</td><td rowspan="4">320점</td></tr>
<tr><td>1-2</td><td>연속함수에 대한 정적분의 정의와 기본 성질을 올바르게 이해하고 있음을 평가하며, 기초적이지만 올바른 이해가 동반된 엄밀한 방법으로 수열의 수렴성을 증명하는 능력을 평가한다.</td></tr>
<tr><td>1-3</td><td>제시문과 앞서 문항에서 증명한 결과들을 종합하고, 정적분의 성질 및 등비수열의 합과 극한을 올바로 취함으로써 주어진 문제를 해결할 수 있는 종합적인 능력을 평가한다.</td></tr>
<tr><td>1-4</td><td>앞선 문제 1-1과 유사하지만 약간 변형되어 난이도가 추가된 문제로, 치환적분과 등비수열의 성질을 올바로 이해하고 활용할 수 있는 능력을 갖추고 있는가를 평가한다.</td></tr>
</table>

〈유의사항〉

- 하나의 문제라도 답안지를 백지로 제출한 경우 과락 처리함
- 문제 번호와 답안을 바꿔 작성한 경우 과락 처리함
- 검은색 이외의 색깔 펜을 사용한 경우 과락 처리함
- 답안이나 답안지 여백에 문제와 관계없는 불필요한 낙서나 이와 유사한 표식이 있는 경우 또는 답안 내용 중 확연히 수험생 본인을 식별할 수 있는 내용이 있는 경우 과락 처리함

6.7 답안 사례

【1-1】

주어진 조건 $f(x)=\frac{1}{5}f(2x)$ 을 이용하면

$$a_{n+1}=\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} f(x)\,dx=\frac{1}{5}\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} f(2x)\,dx$$

이고 [마]의 치환적분 공식에 $x=\frac{1}{2}t$ 를 대입하면

$$\frac{1}{5}\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} f(2x)\,dx=\frac{1}{10}\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(t)\,dt=\frac{1}{10}a_n$$

이므로 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\frac{1}{10}a_n$ 이 성립하여 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

【1-2】

[라]에 의해 임의의 n에 대하여 $\int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2^n}}^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$ 이다.

구간 $[0,1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M과 m이라 하면,

임의의 n에 대하여 구간 $\left[0,\frac{1}{2^n}\right]$ 에서 $m \le f(x) \le M$ 이므로

[다]에 의해서 $\frac{m}{2^n} \le \int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x)\,dx \le \frac{M}{2^n}$ 이 성립한다. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ 이므로

위 부등식의 양변에 $n\to\infty$ 의 극한을 취하면 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x)\,dx=0$

을 얻는다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2^n}}^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx-\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$ 이다.

【1-3】

문제 【1-1】에 의해 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$, 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이고

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x)\,dx = \frac{1}{10}\int_{1}^{2} f(t)\,dt$$

이므로 $\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} f(x)\,dx = \frac{1}{10^n}\int_{1}^{2} f(x)\,dx$ 이다. 따라서

$$\int_{\frac{1}{2^n}}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k}\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\int_{1}^{2} f(x)\,dx$$

이 성립한다. 위 등식의 양변에 $n\to\infty$의 극한을 취하면 【1-2】에 의해

$$1 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{9}\int_{1}^{2} f(x)\,dx$$

이므로 $\int_{1}^{2} f(x)\,dx = 9$ 이다.

【1-4】

자연수 n에 대하여 $b_n = \int_{0}^{2^{n-1}} f(x)\,dx$ 이라 놓으면

$$b_{n+1} = \int_{0}^{2^n} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{2^{n-1}} f(2t)\,dt = 10\int_{0}^{2^{n-1}} f(t)\,dt = 10\,b_n$$

이고 $b_1 = \int_{0}^{1} f(x)dx = 1$ 이므로 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 10인 등비수열이다. 따라서

$$\int_{0}^{2^n} f(x)\,dx = b_{n+1} = 10^n$$

이다. 이때 $\int_{0}^{4^n} f(x)\,dx = \int_{0}^{2^{2n}} f(x)\,dx$ 이므로 $\int_{0}^{4^n} f(x)\,dx = 10^{2n} = 100^n$,

즉 $\frac{1}{100^n}\int_{0}^{4^n} f(x)\,dx = 1$ 이다.

7. 문항카드 6 - 자연계열 논술고사 2

7.1 일반정보

<table>
<tr><td colspan="2">유형</td><td colspan="3">논술고사</td></tr>
<tr><td colspan="2">전형명</td><td colspan="3">논술전형</td></tr>
<tr><td colspan="2">해당대학의
계열(과목)/문항번호</td><td colspan="3">[전자공학전공 / 컴퓨터공학전공 / 수학전공] / 2번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>교육과정
과목명</td><td>수학Ⅱ, 미적분I,
미적분Ⅱ</td><td colspan="2">교육과학기술부 고시 제2011-361호
[별책8] 「수학과 교육과정」의 〈일반 과목〉</td></tr>
<tr><td>핵심개념
및 용어</td><td colspan="3">· 함수의 증가와 감소 · 함수의 극한의 대소 관계 · 절대부등식의 증명</td></tr>
<tr><td colspan="2">답안작성(예상소요)시간</td><td colspan="2">60분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

7.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문] (글자 제한 없음)

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

(1) $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

(2) $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

[나] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[다] 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여 $f(x) < g(x)$ 이면 $\alpha \le \beta$ 이다.

[문제] 제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【2-1】 p, q가 실수이고 $p^2 > 3q$ 이면, 함수 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ 가 감소하는 구간이 있음을 보이시오.

【2-2】 k가 실수이고 $4k \le 3$ 이면, 서로 다른 임의의 두 실수 a, b에 대하여 부등식

$k(a+b)^2 < a^2 + ab + b^2$ 이 성립함을 보이시오.

【2-3】 k가 실수일 때, 서로 다른 임의의 두 실수 a, b에 대하여 부등식 $k(a+b)^2 < a^2 + ab + b^2$ 이 성립하면 $4k \le 3$ 임을 보이시오.

【2-4】 p, q가 실수일 때 함수 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ 를 생각하자. 서로 다른 임의의 두 실수 a, b에 대하여 부등식

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > q - \frac{p^2}{3}$$

이 성립함을 보이시오. 또 $p^2 \le 3q$ 이면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가함을 보이시오.

【2-5】 실수 p에 대하여

$$\alpha(p) = \begin{cases} -2p-3 & (p < -3) \\ \dfrac{p^2}{3} & (-3 \le p < 0) \\ 0 & (p \ge 0) \end{cases}$$

이라고 정의하자. p, q가 실수이고 $q \ge \alpha(p)$ 이면, 함수 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ 가 열린 구간 $(0, 1)$에서 증가함을 보이시오.

7.3 출제 의도

· 이 문항에서는 삼차함수의 증가와 감소를 판단하기 위하여 증가함수의 개념과 절대부등식 및 미적분학의 기본적인 사실을 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 구체적으로는 다음과 같다.
· 이차방정식의 판별식의 부호를 이용하여 이차함수의 그래프와 x축과의 위치관계를 알 수 있는지와 도함수를 활용하여 함수의 증가와 감소를 판단할 수 있는지를 평가하고자 하였다.
· 주어진 조건을 이용하여 기본적인 절대부등식을 유도할 수 있는지를 평가하고자 하였다.
· 등호가 성립하지 않는 부등식에서 의미 있는 결과를 얻기 위하여 극한의 기본적인 성질들을 활용할 수 있음을 인식하고, 특히 극한의 대소 관계를 올바르게 적용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.
· 이차함수의 완전제곱식 표현을 응용하여 이차식에 대한 절대부등식을 올바르게 유도할 수 있는지와 증가함수의 뜻을 정확히 알고 간단한 함수가 증가함수임을 보일 수 있는지를 평가하고자 하였다.
· 이차함수에서 x의 값의 범위가 제한될 때, 최솟값을 구하는 방법을 알고 있는지를 평가하고자 하였다.

7.4 출제 근거

제시문 번호	가

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분I	㈐ 다항함수의 미분법 ③ 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.	· 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분I	류희찬 외	천재교과서	2018	125	X	
미적분I	정상권 외	금성출판사	2018	125	X	

제시문 번호	나

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분I	㈐ 다항함수의 미분법 ③ 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.	· 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분I	류희찬 외	천재교과서	2018	126	X	
미적분I	정상권 외	금성출판사	2018	126	X	

제시문 번호	다

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분I	(나) 함수의 극한과 연속 2 함수의 연속 ② 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	· 미적1222. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분I	류희찬 외	천재교과서	2018	66	X	
미적분I	정상권 외	금성출판사	2018	62	X	

하위문제 번호	2-1

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분I	(다) 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.	· 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분I	류희찬 외	천재교과서	2018	125~126	X	
미적분I	정상권 외	금성출판사	2018	125~126	X	

하위문제 번호	2-2

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학Ⅱ	(가) 집합과 명제 2 명제 ④ 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.	· 수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학Ⅱ	김창동 외	교학사	2017	50	X	
수학Ⅱ	정상권 외	금성출판사	2017	54	X	

하위문제 번호	2-3

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학Ⅱ	㈎ 집합과 명제 2 명제 ④ 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.	· 수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학Ⅱ	김창동 외	교학사	2017	50	X	
수학Ⅱ	정상권 외	금성출판사	2017	54	X	

하위문제 번호	2-4

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
수학Ⅱ	㈎ 집합과 명제 2 명제 ④ 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.	· 수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
미적분I	㈐ 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.	· 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
수학Ⅱ	김창동 외	교학사	2017	50	X	
수학Ⅱ	정상권 외	금성출판사	2017	54	X	
미적분I	류희찬 외	천재교과서	2018	125~126	X	
미적분I	정상권 외	금성출판사	2018	125~126	X	

하위문제 번호	2-5

▶ 교육과정 근거

과목명	교육과정	성취기준
미적분I	㈐ 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.	· 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
미적분Ⅱ	㈐ 미분법 2 도함수의 활용	· 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

	② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	

▶ **자료 출처**

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	재구성여부	
					「○,X」 표기	재구성사항
미적분I	류희찬외	천재교과서	2018	125~126	X	
미적분I	정상권외	금성출판사	2018	125~126	X	
미적분Ⅱ	류희찬외	천재교과서	2018	136~141	X	
미적분Ⅱ	정상권외	금성출판사	2018	132~141	X	

7.5 문항 해설

7.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 [가], [나]는 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-㈐다항함수의 미분법-③도함수의 활용'에 관련된 제시문이다. 함수의 증가와 감소에 대한 정의를 대부분의 교과서에서 다루는 표현을 활용하여 제시하였으며 학생들에게 익숙한 표현으로 판단된다. 함수의 증가와 감소에 대한 표현을 함수값의 대소관계와 미분계수의 부호에 따라 판단할 수 있다는 기본적인 교육과정 상의 내용을 제시하고 있어 쉽게 이해할 수 있는 수준으로 생각된다.
- 제시문 [다]는 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-㈏함수의 극한과 연속-①함수의 극한'에 관련된 제시문이다. 함수의 극한의 대소비교에 대한 내용으로 모든 교과서에서 다루고 있는 개념이며 학교현장에서 자주 언급되는 내용이다.

- 문제 [2-1]은 미분계수를 이용하여 함수의 증가, 감소를 판정하고 그래프를 그릴 수 있는가를 묻고 있는 문항으로 교육과정에서 중요하게 다루고 있는 개념이다. 따라서 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 쉽게 이해하고 해결할 수 있는 수준의 문제로 판단된다.
- 문제 [2-2], [2-3]은 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그리고 이를 활용하여 절대부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문항이다. 이 부분은 교육과정에서 강조되는 것으로 모든 교과서에서 비중있게 다루고 있다. 특히 두 소문항은 역인 관계에 있는 명제로 대우법이나 귀류법을 활용하여 증명을 할 수도 있는 문항으로 판단된다. 따라서 고등학교 교육과정 안에서 출제된 문항이다.
- 문제 [2-4]는 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그리고 이를 활용하여 절대부등식을 증명하는 것이다. 평균값의 정리의 기하학적인 의미를 이해하고 이를 활용하여 주어진 부등식을 증명하는 내용으로 고등학교 교육과정에 적절한 수준의 문항이다.
- 문제 [2-5]는 미분계수의 부호에 따라 증가와 감소를 판정할 수 있다는 기본적인 교육과정 상의 개념을 활용하여 해결이 가능한 문항으로 많은 학생이 어렵지 않게 해결할 수 있는 수준으로 생각된다.

7.5.2 출제 검토 교사 의견

- 제시문은 고등학교 교과서 〈미적분Ⅰ〉의 '함수의 극한에 대한 성질'과 '함수의 증가와 감소'의 내용을 발췌하여 구성하였으며, 고등학교 수학과 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 내용은 수록하지 않았다. 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있는 서로 다른 두 기준을 제시문 [가]와 제시문 [나]에 각각 수록하여 출제 의도에 해당 내용이 포함되어 있음을 학생들이 명확히 파악할 수 있도록 안내하였다. 제시문 [다]의 '$f(x) < g(x)$' 표현은 교과서와 달리 등호 표현이 빠져 있으나 여전히 제시된 명제는 참이며, 논리적으로 전혀 문제가 없다. 오히려 세부 문항에서 활용해야 하는 문제의 상황과 유사하게 표현하여 학생들이 쉽게 활용할 수 있도록 배려하였음을 알 수 있다.

- 문제 [2-1]은 삼차함수 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ 의 도함수가 음수가 되는 구간이 존재하는지를 평가한다. 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-㈐다항함수의 미분법-③도함수의 활용'에서 '함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.'라고 명시하고 있다. 따라서 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 주어진 문제를 쉽게 해결할 것으로 보인다.
- 문제 [2-2]는 2009 개정 교육과정 '수학Ⅱ-㈎집합과 명제-②명제'에서 '절대부등식의 의미를 이해하고,

간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.'라고 명시하고 있다. 성취수준에서 '수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.'라고 명시하고 있으며, 이 문제에 사용되는 인수분해는 중학교 수학에서도 배우는 수준이므로 '간단한 절대부등식'이라고 판단된다. 특히, 이 문항은 문제 [2-4], [2-5]를 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 징검다리 역할을 하고 있어서 쉬우면서 중요한 문제이다. 문제 해결을 위해서 〈수학Ⅱ〉 과목에 소개된 절대부등식 중 '두 실수 a, b에 대하여 $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$'의 성질이 필요하지만 실수의 사칙연산 수준의 쉬운 개념으로 비록 제시문에 이 내용이 수록되지 않았더라도 학생들이 쉽게 문제를 해결할 수 있을 것으로 예상한다.

- 문제 [2-3]은 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(나)함수의 극한과 연속-①함수의 극한'의 개념으로 부등식을 증명하는 창의적인 아이디어가 돋보이는 문제로 평가된다. 그렇기 때문에 2009 개정 교육과정 내에서 수학적 판단력과 사고력을 평가하기에 적합한 문제이다.
- 문제 [2-4]는 문제 [2-5]를 해결하는 힌트를 제공하는 문제로서 인수분해를 통해 완전제곱만 할 수 있으면 해결할 수 있는 문제이다.
- 문제 [2-5]는 삼차함수 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ 의 도함수가 이차함수임을 인지하여 구간 $(0, 1)$의 최솟값이 0보다 크면 그 구간의 모든 점이 0보다 크다는 성질을 이용하여 고등학교 교육과정을 이수한 학생이라면 해결할 수 있을 것이다. 제시문 [가]와 제시문 [나]를 참고하여 해결할 수 있으며, 함수의 증가와 감소를 서로 다른 두 가지 방법을 병행하여 판정할 수 있는 좋은 평가 문항으로 판단한다.

7.5.3 자문위원 평가 의견

- 제시문 전체에 대하여 자문교사 모두 고등학교 교육과정 범위 내에 있고 적정한 수준의 제시문이라고 판단하였다. 제시문에 대한 '교육과정 범위와 수준에 부합하는가'라는 질문에 5점 척도 가중평균이 4.8 이상으로 대부분 '매우 그렇다'라고 평가하였다. 또한 대부분의 자문교사의 의견은 교과서에 충실한 내용을 활용하여 제시문을 구성하여 고등학교 교육과정을 이수한 학생이라면 충분히 이해가 가능한 수준이라고 응답하였다.

- 문제 [2-1]은 '고등학교 교육과정 범위와 수준에 부합하는가'라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.9, 4.9로 대부분 '매우 그렇다'라는 의견이다. 구체적인 의견으로는 '도함수를 이용하여 감소하는 구간이 있음을 보이는 문제로 교과서 문제 수준에서 다루어지는 내용이다. 대학수학능력시험에서도 자주 다루는 내용이기에 큰 어려움이 느껴지지는 않을 것으로 판단된다.'라는 의견이 있었다.
- 문제 [2-2]는 '교육과정 범위와 수준에 부합하는가'라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.6, 4.6로 대부분 '그렇다'라는 의견이다. 구체적인 의견은 다음과 같다. '미분을 활용하여 그래프를 그리고 이를 통해 해결할 수 있는 문제이다.', '제시문 [가], [다]를 사용하지 않고 절대부등식의 증명법을 이용하여 증명할 수 있다.' 등과 같이 제시문의 내용뿐만 아니라 고등학교 교육과정 상의 다른 개념을 활용하여 증명할 수 있다는 의견이 있었다.
- 문제 [2-3]은 '교육과정 범위와 수준에 부합하는가'라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.4, 4.4로 대부분 '그렇다'라는 의견을 주었다. 또한 '절대부등식의 성립 조건을 묻는 문항이다'라는 의견이 있었으며 '문제 [2-2]에서 제시한 명제와 서로 역관계로 대우법이나 귀류법을 이용할 수도 있다.'라는 의견도 있었다.
- 문제 [2-4]는 '교육과정 범위와 수준에 부합하는가'라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.5, 4.5로 대부분 '그렇다'라는 의견을 주었다. 특히 '변곡점에서의 접선의 기울기라는 기하학적인 의미를 파악하는 것이 문제해결의 중요한 포인트이다.'라는 의견처럼 고등학교 교육과정 상에서 중요한 내용을 묻고 있는 문항으로 생각된다.

- 문제 [2-5]는 '교육과정 범위와 수준에 부합하는가'라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.5, 4.4로 대부분 '그렇다'라는 의견을 주었다. 구체적으로 '〈수학Ⅱ〉-집합과 명제-대우명제를 활용한 문제해결 접근이 용이하다고 판단된다.'라는 의견이 있었다.

7.6 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
2-1	이차방정식의 판별식의 부호를 이용하여 이차함수의 그래프와 x축과의 위치 관계를 알 수 있는지와 도함수를 활용하여 함수의 증가와 감소를 판단할 수 있는지를 평가한다.	480점
2-2	주어진 조건을 이용하여 기본적인 절대부등식을 유도할 수 있는지를 평가한다.	
2-3	등호가 성립하지 않는 부등식에서 의미 있는 결과를 얻기 위하여 극한의 기본적인 성질들을 활용할 수 있음을 인식하고, 특히 극한의 대소 관계를 올바르게 적용할 수 있는지를 평가한다.	
2-4	이차함수의 완전제곱식 표현을 응용하여 이차식에 대한 절대부등식을 올바르게 유도할 수 있는지와 증가함수의 뜻을 정확히 알고 간단한 함수가 증가함수임을 보일 수 있는지를 평가한다.	
2-5	이차함수에서 x의 값의 범위가 제한될 때, 최댓값 또는 최솟값을 구하는 방법을 알고 있는지와 도함수의 부호를 이용하여 함수의 증가와 감소를 판단할 수 있는지를 평가한다.	

〈유의사항〉
- 하나의 문제라도 답안지를 백지로 제출한 경우 과락 처리함
- 문제 번호와 답안을 바꿔 작성한 경우 과락 처리함
- 검은색 이외의 색깔 펜을 사용한 경우 과락 처리함
- 답안이나 답안지 여백에 문제와 관계없는 불필요한 낙서나 이와 유사한 표식이 있는 경우 또는 답안 내용 중 확연히 수험생 본인을 식별할 수 있는 내용이 있는 경우 과락 처리함

7.7 답안 사례

【2-1】

함수 $f(x)$ 의 도함수는 이차함수 $f'(x)=3x^2+2px+q=3\left(x+\frac{p}{3}\right)^2+q-\frac{p^2}{3}$ 이다.

이제, $p^2>3q$ 라고 가정하자. 그러면 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식이

$D=(2p)^2-12q=4(p^2-3q)>0$ 또는

이차함수 $f'(x)$ 의 꼭짓점의 y 좌표 $q-\frac{p^2}{3}$ 이 0 보다 작으므로,

이차함수 $f'(x)$ 의 그래프가 x 축의 서로 다른 두 점 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ 를 지난다.

이때 $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ 이므로 구간 (α, β) 에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)<0$ 이다.

따라서 제시문 [나]에 의하여 함수 $f(x)$ 는 구간 (α, β) 에서 감소한다.

【2-2】

$4k\le 3$, 즉 $k\le\frac{3}{4}$ 이면, 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여

$$a^2+ab+b^2-k(a+b)^2 \ge a^2+ab+b^2-\frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$=\frac{1}{4}(a-b)^2>0$$

이므로 부등식 $k(a+b)^2<a^2+ab+b^2$ 이 성립한다.

【2-3】

서로 다른 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $k(a+b)^2<a^2+ab+b^2$ 이 성립한다고 하자.

그러면 제시문 [다]에 의하여, 임의의 실수 a 에 대하여

$$k(2a)^2=\lim_{x\to a}k(a+x)^2\le\lim_{x\to a}\left(a^2+ax+x^2\right)=3a^2$$

이다. 특히 $a=1$ 을 대입하면 $4k\le 3$ 을 얻는다.

【2-4】

서로 다른 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = a^2+ab+b^2+p(a+b)+q$$

이다. 따라서 문제 [2-2]의 결과에 의하여,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{3}{4}(a+b)^2+p(a+b)+q$$

$$= \frac{3}{4}\left(a+b+\frac{2p}{3}\right)^2-\frac{p^2}{3}+q \geq -\frac{p^2}{3}+q$$

이므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > q-\frac{p^2}{3}$$

이다. 또한 $p^2 \leq 3q$ 이면, $x_1 < x_2$ 인 임의의 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > q-\frac{p^2}{3} \geq 0$$

이므로 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다. 따라서 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

【2-5】

(1) 먼저, $p<-3$ 이고 $q \geq \alpha(p) = -2p-3$ 이라고 가정하자. 그러면 이차함수

$$f'(x) = 3x^2+2px+q = 3\left(x+\frac{p}{3}\right)^2+q-\frac{p^2}{3}$$

의 꼭짓점의 x좌표 $x=-\frac{p}{3}$가 1보다 크고 $f'(1)=3+2p+q \geq 0$ 이므로 열린 구간 $(0, 1)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x) > f'(1) \geq 0$ 이다. 따라서 제시문 [나]에 의하여 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 증가한다.

(2) $-3 \leq p < 0$ 이고 $q \geq \alpha(p) = \frac{p^2}{3}$ 이면 $p^2 \leq 3q$ 이므로 문제 [2-4]의 결과에 의하여 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 특별히 구간 $(0, 1)$에서도 증가한다.

(3) 마지막으로 $p \geq 0$ 이고 $q \geq \alpha(p) = 0$ 이면 열린 구간 $(0, 1)$ 에 속하는 모든 x 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q \geq 3x^2 > 0$$

이다. 따라서 제시문 [나]에 의하여 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, 1)$ 에서 증가한다.