2019학년도 서강대학교

모의논술 자료집(2차)

- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

문제

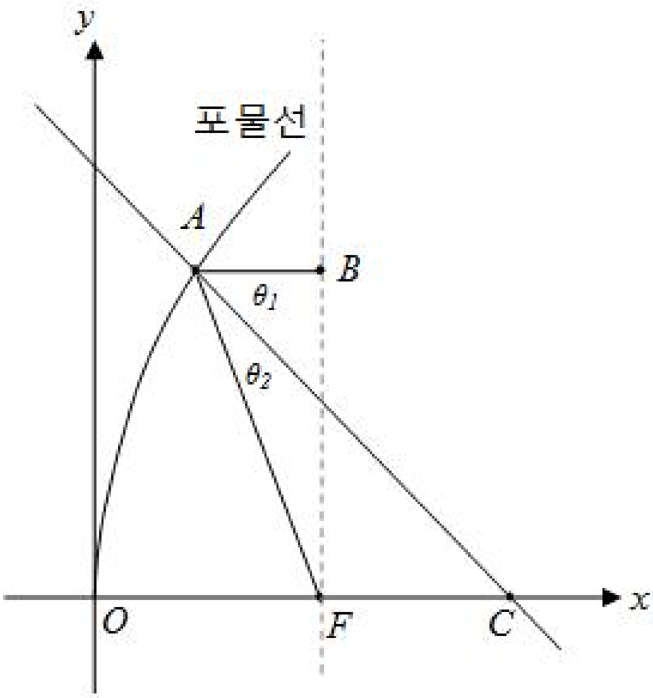
초점이 $F(p,0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선(단, $p>0$) 위에 점 $A(x_1, y_1)$가 있다. 단, 점 A는 1 사분면에 위치하며, $0<x_1<p$ 이다. 점 $B(p, y_1)$는 직선 $x=p$ 위의 점이다.

[1-1] 두 직선 $y=0$와 $x=p$에 동시에 접하는 원의 중심이 문제의 포물선 위에 존재할 수 있는지 살펴보고, 존재한다면 그 중심을 모두 구하시오. 단, 원의 중심은 1사분면에 존재한다.

[1-2] $\overline{AB}+\overline{AF}$를 p로 나타내시오. 그리고, 점 A에서, 중심이 $F(p,0)$이고 반경이 p인 원까지 가장 가까운 거리를 x_1으로 나타내시오.

[1-3] 점 A를 지나고 기울기가 a (단, $a<0$)인 직선의 x 축과의 교점과 y 축과의 교점, 그리고 원점 O로 이루어진 직각 삼각형의 넓이를 S라 하자. a에 따른 S의 최소값과 그때의 a 값을 구하시오.

[1-4] 점 A에서 이 포물선의 접선에 수직이면서 이 점을 지나는 직선이 x 축과 만나는 점을 C라 하자. 각 BAC를 θ_1, 각 CAF를 θ_2라 할 때, θ_1과 θ_2의 관계를 구하시오.



제시문

[가] 초점이 $F(p,0)$이고, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq 0$) 이다.

[나] 중심이 $C(a,b)$이고 반경이 r인 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (단, $r\neq 0$) 이다.

[다] 두 벡터 $\vec{a},\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 이 두 벡터의 내적은 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 이다.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 문제 [1-1]: 〈기하와 벡터〉의 포물선 및 원의 방정식, 〈수학 1〉의 방정식을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는 지 평가한다.

· 문제 [1-2]: 〈수학 1〉에서 학습하는 평면 좌표에서 두 점 사이의 거리, 원의 방정식과 그 성질, 〈기하와 벡터〉에서 포물선 방정식과 그 성질에 대한 이해를 평가한다.

· 문제 [1-3]: 〈수학 1〉에서 직선의 방정식, 〈미적분 1〉의 함수의 최댓값과 최솟값을 〈미적분 2〉의 함수 몫의 미분법을 이용하여 구할 수 있는 지 평가한다.

· 문제 [1-4]: 〈미적분 1〉의 도함수의 활용, 접선의 방정식, 〈수학 1〉의 두 직선의 평행과 수직, 〈기하와 벡터〉의 평면 벡터의 성분 표시, 크기, 내적, 각도를 이해하고 있는 지 평가한다.

2. 문항해설

■ 제시문 [가]는 ‘기하와 벡터’에서 이차곡선 중 포물선에 대한 설명이다.

■ 제시문 [나]는 ‘수학 1’에서 원의 방정식에 대한 설명이다.

■ 제시문 [다]는 ‘기하와 벡터’에서 평면 벡터의 내적에 관한 설명이다.

■ 문제 [1-1]은 원의 성질, 원의 접선의 성질, 그리고 포물선 방정식을 활용하여 문제의 조건에 맞는 이차 방정식을 세우고 이를 풀 수 있는 지 평가한다.

■ 문제 [1-2]은 좌표 평면에서 두 점 사이의 거리를 계산하는 방법을 풀 수 있다.

■ 문제 [1-3]는 직선의 방정식을 세울 수 있고, x축, y축과의 교점, 삼각형의 면적을 구할 수 있는지 평가하는 문제이다. 또한, 문제에 맞는 함수를 만들고, 미분을 활용하여 함수의 최소값을 구할 수 있는지 평가한다.

■ 문제 [1-4]은 음함수의 미분과 접선의 기울기를 구할 수 있는지, 그리고, 이를 활용하여 직선의 방정식을 만들 수 있는지 평가한다. 또한, 좌표 평면에서 벡터를 성분으로 표시하고, 벡터의 내적을 활용하여 각도를 구하는 방법을 평가한다.

3. 채점기준

■ 문제 [1-1]: 원과 접선의 성질을 이해하고 이차 방정식을 풀 수 있는 지 평가한다.

■ 문제 [1-2]: 좌표 평면에서 두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는 지, 포물선과 원의 성질을 이해하고 있는 지 평가한다.

■ 문제 [1-3]: 직선의 방정식을 세울 수 있고 미분을 이해하여 최소값을 구할 수 있는 지 평가한다.

■ 문제 [1-4]: 음함수의 미분을 할 수 있고 접선 및 이에 수직인 직선의 방정식을 세울 수 있는지 평가한다. 그리고, 평면 벡터의 성분 표시, 평면 벡터의 내적을 활용하여 두 벡터 사이의 각도를 구할 수 있는 지 평가한다.

4. 예시답안 및 예시답안에 대한 근거

[1-1]
x축과 직선 $x=p$에 동시에 접하면서 1사분면에 존재하는 원의 중심은 $(x,|p-x|)$로 둘 수 있다. 이 중심이 포물선 $y^2=4px$ 위에 있기 위해서는 $|p-x|^2=4px$를 만족해야 한다. 이 2차 방정식의 해는 $x=(3\pm 2\sqrt{2})p$이다. 따라서, 문제의 조건을 만족하는 원은 2개가 존재한다. $x=(3+2\sqrt{2})p$인 경우, 중심의 y 좌표는 $x-p=2(\sqrt{2}+1)p$이며, $x=(3-2\sqrt{2})p$인 경우, 중심의 y 좌표는$p-x=p-(3-2\sqrt{2})p=2(\sqrt{2}-1)p$ 이다. 따라서 원의 중심의 좌표는 $((3\pm 2\sqrt{2})p, 2(\sqrt{2}\pm 1)p)$이다.

[1-2]
$\overline{AB}+\overline{AF}$ =
$(p-x_1)+\sqrt{y_1^2+(p-x_1)^2}=(p-x_1)+\sqrt{4px_1+(p-x_1)^2}=(p-x_1)+\sqrt{(p+x_1)^2}=2p$
그리고, $\overline{AF}=p+x_1$이고, 원의 반경이 p이므로 점 A와 원까지 가장 가까운 거리는 x_1이다.

[1-3]
점 $A(x_1,y_1)$를 지나고 기울기가 a인 직선은 $y-y_1=a(x-x_1)$로 나타낼 수 있다.
이 직선의 방정식에 $x=0$를 대입하면 $y=y_1-ax_1$이고, $y=0$를 대입하면 $x=-\frac{y_1}{a}+x_1=-\frac{1}{a}(y_1-ax_1)$이다. 그리고, 점 $A(x_1,y_1)$는 포물선 위의 점이므로 $y_1^2=4px_1$를 만족한다. 따라서, 넓이 $S=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}(-\frac{1}{a})(y_1-ax_1)^2=-\frac{1}{2a}(y_1-\frac{a}{4p}y_1^2)^2$ $=-\frac{y_1^2}{2a}(1-\frac{y_1}{4p}a)^2$이다.
a에 대한 넓이 S의 최소값은 다음과 같이 미분으로 구할 수 있다.

$\therefore \frac{dS}{da}=-\frac{y_1^2}{2}\frac{(1-\frac{y_1}{4p}a)(-\frac{y_1}{4p}a-1)}{a^2}=0$. 그런데 $a<0$이므로, $a=-\frac{4p}{y_1}\ (=-\frac{y_1}{x_1})$이고, 넓이의 최소값은 $S=\frac{y_1^3}{2p}=2x_1y_1$이다.

(다른 방법)
$-a=t$로 치환하면, $t>0$이고 $S=-\frac{y_1^2}{2a}(1-\frac{y_1}{4p}a)^2=\frac{(y_1+x_1t)^2}{2t}=\frac{1}{2}(\frac{y_1^2}{t}+2x_1y_1+x_1^2t)$

$\therefore S\ge \frac{1}{2}(2x_1y_1+2\sqrt{\frac{y_1^2}{t}x_1^2t})=2x_1y_1$. 이때, $\frac{y_1^2}{t}=x_1^2t$, 즉 $a=-t=-\frac{y_1}{x_1}$일 때 최소값을 가진다.

[1-4]

$y^2 = 4px$를 x에 대해 미분하면 $2y\dfrac{dy}{dx} = 4p$이다. 따라서 점 A에서 접선의 기울기는 $\dfrac{2p}{y_1}$이다.

그러므로, 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{y_1}{2p}$이며, 이 직선의 방정식은

$y - y_1 = -\dfrac{y_1}{2p}(x - x_1)$이다. 따라서, 점 C의 좌표는 $(2p + x_1, 0)$이다.

그리고, 벡터를 성분으로 표시하면

$\overrightarrow{AB} = (p, y_1) - (x_1, y_1) = (p - x_1, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (2p + x_1, 0) - (x_1, y_1) = (2p, -y_1)$

$\overrightarrow{AF} = (p, 0) - (x_1, y_1) = (p - x_1, -y_1)$

이다.

따라서,

$$\cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{2p(p - x_1)}{(p - x_1)\sqrt{4p^2 + y_1^2}} = \frac{2p}{\sqrt{4p^2 + y_1^2}}.$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{2p(p - x_1) + y_1^2}{\sqrt{(p - x_1)^2 + y_1^2}\sqrt{4p^2 + y_1^2}} = \frac{2p(p + x_1)}{\sqrt{(p + x_1)^2}\sqrt{4p^2 + y_1^2}} = \frac{2p}{\sqrt{4p^2 + y_1^2}}.$$

즉, $\theta_1 = \theta_2$.