2019학년도 서강대학교

모의논술 자료집

- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

문제

※ 제시문 [가]-[바]를 읽고, 아래의 물음에 답하여라.

문제 1. 로그함수 $f(x) = \ln x$ 에 대하여 다음을 보여라.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

문제 2. 임의의 양의 실수 x 에 대하여 아래 부등식이 성립하도록 하는 양의 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

$$\ln x \le kx - 1$$

문제 3. α 가 양의 실수일 때, 아래 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{1}{\alpha}(1 - x^{-\alpha}) \le \ln x \le \frac{1}{\alpha}(x^{\alpha} - 1) \quad (x > 0)$$

문제 4. 문제 3의 부등식을 이용하여 아래의 극한식이 성립함을 보여라.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} \ln x = 0$$

제시문

[가] 다음과 같은 극한

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

이 존재하고, 그 극한값이 유리수가 아닌 무리수 $2.71828182\cdots$ 임이 알려져 있다. 이 극한값을 e로 나타낸다.

[나] 1이 아닌 양의 실수 a를 밑으로 하는 지수함수 $y=a^x$는 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일 대응이므로 역함수를 갖는다. 이 역함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 하고 $y=\log_a x$로 나타낸다. 지수함수 $y=a^x$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 로그함수 $y=\log_a x$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다. 특별히, 밑이 e인 로그함수를 $y=\ln x$로 나타낸다. 로그의 정의에 의해서 $\ln e=1$이다. 또한, $\ln 1=0$이고, $0<x<1$일 때는 $\ln x<0$이고 $x>1$일 때는 $\ln x>0$이다.

[다] 임의의 양의 실수 x, y와 임의의 실수 r에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(3) $\log_a(x^r) = r\log_a x$

[라] 함수 f의 도함수를 다음의 식으로 정의한다.

$$f'(x)=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

[마] 실수 a가 아니면서 a에 충분히 가까운 모든 실수 x에 대하여 세 함수 f, g, h가

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

을 만족하며

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$$

이면

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

이다. 같은 결과가 $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때의 극한에 대해서도 성립한다.

[바] 임의의 자연수 n에 대하여 다음의 극한식이 성립한다.

$$\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x^n}=0, \quad \lim_{x \to 0+}\sqrt[n]{x}=0$$

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 도함수의 정의를 이용하여, 자연로그함수 $\ln x$의 도함수를 구할 수 있는지를 평가
· 미분을 활용하여 로그와 관련된 부등식을 유도할 수 있는지를 평가
· 로그의 성질을 이용하여 단순한 부등식에서 보다 복잡한 부등식을 얻을 수 있는지를 평가
· 적절한 부등식을 활용하여 유용한 극한식을 얻을 수 있는지를 평가

2. 문항해설

제시문 해설:

제시문 [가]는 2009 개정교육과정 “[미적분 II] (가) 지수함수와 로그함수 ② 지수함수와 로그함수의 미분”에 해당하는 제시문이다. 자연로그의 밑인 무리수 e를 어떤 극한을 이용하여 정의하였다.

제시문 [나]는 2009 개정교육과정 “[미적분 II] (가) 지수함수와 로그함수 ① 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프”에 해당하는 제시문이다. 지수함수, 로그함수의 뜻과 기본적인 성질을 서술하였다.

제시문 [다]는 2009 개정교육과정 “[미적분 I] (라) 지수와 로그 ② 로그”에 해당하는 제시문이다. 로그의 기본적인 성질들을 서술하였다.

제시문 [라]는 2009 개정교육과정 “[미적분 I] (다) 다항함수의 미분법 ② 도함수”에 해당하는 제시문이다. 도함수를 구하는 기본공식을 서술하였다.

제시문 [마]는 2009 개정교육과정 “[미적분 I] (나) 함수의 극한과 연속 ① 함수의 극한”에 해당하는 제시문이다. 함수의 극한의 대소 관계에 대한 기본적인 성질을 서술하였다.

제시문 [바]는 2009 개정교육과정 “[미적분 I] (나) 함수의 극한과 연속 ① 함수의 극한”에 해당하는 제시문이다. 다항함수와 거듭제곱함수와 같은 기본적인 함수의 극한을 서술하였다.

문항 해설:

문제 1. 자연로그함수의 도함수의 공식을 유도할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[미적분 II] (가) 지수함수와 로그함수 ② 지수함수와 로그함수의 미분”에서 “지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 제시문 [가], [나], [다], [라]에 주어진 무리수 e의 정의, 지수함수와 로그함수의 기본적인 성질들과 도함수의 정의를 이용하여 자연로그함수의 도함수의 공식을 유도할 수 있다.

문제 2. 적절한 함수의 도함수의 부호를 조사하여 그 함수가 증가함수임을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[미적분 I] (다) 다항함수의 미분법 ③ 도함수의 활용”에서 “함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 또한, “[미적분 II]-[다] 미분법-② 도함수의 활용”에서 “방정식과 부등식에 활용할 수 있다”라고 명시하고 있다. 문제 1에서 유도한 자연로그함수의 도함수와 평균값의 정리의 결과인 증가함수의 도함수 판정법을 이용하면 적절한 증가함수를 고려하여 주어진 부등식이 성립하는 양의 실수 k의 범위를 구할 수 있다.

문제 3. 로그의 성질을 이용하여 유용한 부등식을 유도할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[수학 II]-[가] 집합과 명제-② 명제”에서 “절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다”라고 명시하고 있다. 또한, 2009 개정교육과정 “[미적분 I] (라) 지수와 로그 ② 로그”에서 “로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.”라고 명시하고 있다. 문제 2에서 우도한 부등식에 대하여 제시문 [나]와 [다]의 로그의 기본 성질을 적절히 사용하면 구하는 부등식을 증명할 수 있다.

문제 4. 유용한 부등식을 이용하여 구하는 극한을 구할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[수학 II]-[가] 집합과 명제-② 명제”에서 “절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다”라고 명시하고 있다. 또한, 2009 개정교육과정 “[미적분 I] (나) 함수의 극한과 연속 ① 함수의 극한”에서 “함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.”라고 명시하고 있다. 문제 3에서 증명한 부등식과 제시문 [마]와 [바]를 이용하면 주어진 극한식이 성립함을 보일 수 있다.

3. 채점기준

1-1

도함수의 정의와 로그의 성질을 이용하여 자연로그함수의 도함수를 구할 수 있는지를 평가한다.

1-2

적당한 함수의 일계도함수의 부호를 이용하여 그 함수의 증가 또는 감소를 판단할 수 있는지를 평가한다.

1-3

로그의 성질을 적절히 활용하여, 로그에 대한 간단한 부등식으로부터 좀 더 복잡한 부등식을 유도할 수 있는가를 평가한다.

1-4

극한의 대소 관계를 이용하여, 원하는 극한값을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 예시답안 및 예시답안에 대한 근거

문제 1의 답안: 제시문 [다]와 [라]를 이용하면,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

이다. 여기서, $t=\frac{h}{x}$라고 하면 $h\to 0$일 때 $t\to 0$이고, 로그함수 f가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로, 제시문 [가]에 의하여

$$f'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

이다.

문제 2의 답안: $g(x) = kx - 1 - \ln x$라고 하면,

$$g'(x) = k - \frac{1}{x} = \frac{kx-1}{x}$$

이므로 $0 < x < \frac{1}{k}$일 때 $g'(x) < 0$이고 $x > \frac{1}{k}$일 때 $g'(x) > 0$이다. 따라서 함수 g는 $x = \frac{1}{k}$에서 최솟값 $g\left(\frac{1}{k}\right) = \ln k$을 갖는다. 이 값이 0보다 크거나 같을 때, 즉 $k \ge 1$일 때, 모든 $x > 0$에 대하여 $g(x) \ge 0$이 된다.

문제 3의 답안: 문제 2에 의해서 부등식

$$\ln t \le t - 1$$

이 모든 $t > 0$에 대하여 성립한다. 임의의 양수 x에 대하여 $t = x^{\alpha}$이라고 놓으면 $t > 0$이므로

$$\ln x^{\alpha} \le x^{\alpha} - 1$$

이 성립한다. 제시문 [다]의 결과를 이용하면

$$\alpha \ln x \le x^{\alpha} - 1$$

이고, $\alpha > 0$이므로

$$\ln x \le \frac{x^{\alpha}-1}{\alpha}$$

이다. 마찬가지로 $t = x^{-\alpha}$라고 놓으면 왼쪽의 부등식을 얻을 수 있다.

문제 4의 답안: 문제 3에 의해서 모든 $x \ge 1$에 대하여,

$$0 \le \ln x \le 2\left(\sqrt{x}-1\right)$$

이 성립한다. 따라서 모든 $x \ge 1$에 대하여

$$0 \le \frac{\ln x}{x} \le 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)$$

이다. 또한, 제시문 [바]에 의하여

$$\lim_{x \to \infty} 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

이므로 제시문 [마]에 의하여

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

을 얻는다.

문제 3에 의해서 모든 $0 < x \le 1$에 대하여,

$$\frac{4(\sqrt[4]{x} - 1)}{\sqrt[4]{x}} \le \ln x \le 0$$

이므로

$$4\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - 1) \le \sqrt{x}\ln x \le 0$$

이다. 또한,

$$\lim_{x \to 0+} 4\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - 1) = 0$$

이므로

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{x}\ln x = 0$$

을 얻는다.