7. 문항카드 7 – 자연계열 논술고사 3

7.1 일반정보

<table>
<tr><td colspan="2">유형</td><td colspan="2">논술고사</td></tr>
<tr><td colspan="2">전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td colspan="2">해당대학의 계열(과목)/문항번호</td><td colspan="2">[화공생명공학/기계공학/물리학] / 3번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>교육과정 과목명</td><td colspan="2">미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="2">· 수열의 극한에 대한 기본 성질
· 급수의 성질
· 구분구적법의 이해
· 정적분의 정의
· 정적분의 치환적분법
· 정적분의 부분적분법
· 수열의 극한값의 대소 관계
· 미분 계수를 이용한 함수의 증가/감소 판단</td></tr>
<tr><td colspan="2">답안작성(예상소요)시간</td><td>40분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

7.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

[가] 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 구간 $[a,b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점의 x좌표를 차례로 $a=x_0, x_1, \cdots, x_n=b$ 라고 하면, 소구간의 길이 Δx는 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ 이고 $k=0,1,\cdots,n$ 에 대해 $x_k=a+k\Delta x$ 이다. 이때 $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ 라고 하면, 극한값 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 이 항상 존재하는데, 이 극한값을 $\int_a^b f(x)\,dx$ 로 나타낸다. 이를 하나의 식으로 정리하면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

이다.

[나] 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\ F(x)\ \Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

이다.

[다] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속인 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$를 가질 때,

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[\ f(x)g(x)\ \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이다.

[문제] 제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오. (글자 제한 없음)

【3-1】 $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(2n)!\,n^n}}$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n$ 의 값을 구하시오.

【3-2】 $x > 4$ 일 때 $\sqrt{x} > \ln x$ 가 성립함을 보이고, 이를 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = 0$ 임을 보이시오.

【3-3】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{n+1-k}{n}\ln\left(\dfrac{n+k}{n}\right)\right\} = \int_0^1 (1-x)\ln(1+x)\,dx$ 임을 보이시오.

【3-4】 $a_n = (n+1)^n(n+2)^{n-1}(n+3)^{n-2}\cdots(2n-1)^2(2n)$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}\right)$ 의 값을 구하시오.

7.3 출제의도

<미적분Ⅰ>, <미적분Ⅱ>에서 학습하는 수열의 극한에 대한 기본 성질, 급수의 성질, 구분구적법의 이해, 정적분의 정의, 정적분의 치환적분법, 정적분의 부분적분법, 수열의 극한값의 대소 관계, 미분 계수를 이용한 함수의 증가/감소 판단 등의 기본적인 개념들의 이해도를 평가한다.

주어진 수열을 급수 형태로 변환하고, 정적분의 정의에 따라 주어진 급수를 정적분 수식으로 변환하고, 정적분의 부분적분법 및 치환적분법을 이용하여, 주어진 급수의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

미분계수를 이용하여 함수의 증가와 감소를 판단하고, 수열의 극한값의 대소 관계를 이용하여, 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 평가한다.

7.4 출제근거

제시문	가

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분Ⅰ	교육과정	(4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 ① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
		성취기준	· 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분Ⅰ	신항균 외	지학사	2014	155		○
미적분Ⅰ	정상권 외	금성출판사	2014	171		○

제시문	나

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분Ⅰ	교육과정	(4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 ② 정적분의 뜻을 안다.
		성취기준	· 미적1422. 정적분의 뜻을 안다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분Ⅰ	신항균 외	지학사	2014	159		○
미적분Ⅰ	정상권 외	금성출판사	2014	174		○

제시문	다

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분Ⅱ	교육과정	(4) 적분법 (가) 여러 가지 적분법 ② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
		성취기준	· 미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분Ⅱ	신항균 외	지학사	2014	170		○
미적분Ⅱ	정상권 외	금성출판사	2014	188		○

문제	3-1

▶ 교육과정 근거

<table>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">미적분 I</td><td>교육과정</td><td>(4) 다항함수의 적분법
(나) 정적분
① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">과목명</td><td rowspan="4">미적분 II</td><td>교육과정</td><td>(4) 적분법
(가) 여러 가지 적분법
① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>(4) 적분법
(가) 여러 가지 적분법
② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분 I	신항균 외	지학사	2014	155		○
미적분 I	정상권 외	금성출판사	2014	171		○
미적분 II	신항균 외	지학사	2014	167, 170		○
미적분 II	정상권 외	금성출판사	2014	186, 188		○

문제	3-2

▶ 교육과정 근거

<table>
<tr><td rowspan="4">과목명</td><td rowspan="4">미적분 I</td><td>교육과정</td><td>(1) 수열의 극한
(가) 수열의 극한
② 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 미적1112. 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>(3) 다항함수의 미분법
(다) 도함수의 활용
③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분 I	신항균 외	지학사	2014	20, 117		○

미적분 I	정상권 외	금성출판사	2014	19, 126		○

문제	3-3

▶ 교육과정 근거

과목명			
과목명	미적분 I	교육과정	(1) 수열의 극한 (가) 수열의 극한 ② 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
		성취기준	· 미적1112. 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
		교육과정	(1) 수열의 극한 (나) 급수 ① 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
		성취기준	· 미적1121. 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
		교육과정	(4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 ① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
		성취기준	· 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
		교육과정	(4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 ② 정적분의 뜻을 안다.
		성취기준	· 미적1422. 정적분의 뜻을 안다.
과목명	미적분 II	교육과정	(4) 적분법 (가) 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
		성취기준	· 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
		교육과정	(4) 적분법 (가) 여러 가지 적분법 ② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
		성취기준	· 미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분 I	신항균 외	지학사	2014	18, 35, 155		○
미적분 I	정상권 외	금성출판사	2014	17, 35, 171		○
미적분 II	신항균 외	지학사	2014	167, 170		○
미적분 II	정상권 외	금성출판사	2014	186, 188		○

문제	3-4

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	(4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 ① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
		성취기준	· 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
		교육과정	(4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 ② 정적분의 뜻을 안다.
		성취기준	· 미적1422. 정적분의 뜻을 안다.
과목명	미적분 II	교육과정	(4) 적분법 (가) 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
		성취기준	· 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
		교육과정	(4) 적분법 (가) 여러 가지 적분법 ② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
		성취기준	· 미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분 I	신항균 외	지학사	2014	155		○
미적분 I	정상권 외	금성출판사	2014	171		○
미적분 II	신항균 외	지학사	2014	167, 170		○
미적분 II	정상권 외	금성출판사	2014	186, 188		○

7.5 문항 해설

7.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 [가]는 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(라)다항함수의 적분법-②정적분'에 해당하는 제시문이다. 급수를 통해 정적분을 정의하는 방법에 대하여 서술하였다.
- 제시문 [나]는 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(라)다항함수의 적분법-②정적분'에 해당하는 제시문이다. 교과서에서도 언급하고 있는 부정적분과 정적분의 관계를 나타내고 있다.
- 제시문 [다]는 2009 개정 교육과정 미적분Ⅱ-(라)적분법-①여러 가지 적분법'에 해당하는 제시문이다. 곱으로 표현된 함수의 미분법을 바탕으로 유도할 수 있는 부분적분에 대하여 서술하였다.
- 문제 [3-1] 정적분의 정의를 이용하여 주어진 수열의 극한을 계산할 수 있는지 평가한다. 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(가)수열의 극한-①수열의 극한'에서 '수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.'라고 명시하고 있으며, 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(라)다항함수의 적분법-②정적분'에서 '정적분의 뜻을 안다.'라고 명시하고 있다. 또한 2009 개정 교육과정 '수학Ⅱ-(라)지수와 로그-②로그'에서 '로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.'라고 명시하고 있으므로, $\ln a_n$을 로그의 성질을 이용하여 변형한 후 그 형태를 급수의 형태로 충분히 변형할 수 있었을 것이다. 또한 로그의 경우 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅱ-(가)지수함수와 로그함수'에서 '지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.'라고 명시하고 있으므로 내용 이해에 어려움이 없었을 것이다. 이후 제시문 [가]의 내용을 활용하여 정적분으로 급수를 계산하면 무난히 해결 가능하다. 정적분으로 급수를 계산하고자 할 때 사용하는 부분적분 또한 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅱ-(라)적분법-①여러 가지 적분법'에서 '부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.'라고 명시하고 있으며 '미적분Ⅰ-(라)다항함수의 적분법-②정적분'에서 '부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.'라고 명시하고 있으므로, 주어진 함수의 부정적분을 계산한 후 정적분과 부정적분의 관계를 이용하여 문제없이 해결할 수 있었을 것이다.
- 문제 [3-2] 주어진 부등식을 증명하고 그 부등식을 이용하여 수열의 극한을 계산할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(다)다항함수의 미분법-③도함수의 활용'과 '미적분Ⅱ-(다)미분법-③도함수의 활용'에서 '방정식과 부등식에 활용할 수 있다.'라고 명시하고 있으며, 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅱ-(가)지수함수와 로그함수-②지수함수와 로그함수의 미분"에서 '지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.'라고 명시하고 있다. 따라서 주어진 부등식을 미분을 이용하여 충분히 증명할 수 있었을 것이다. 또한 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(가)수열의 극한-①수열의 극한'에서 '수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.'라고 명시하고 있다. 따라서 증명한 부등식을 바탕으로 $\frac{\ln n}{n}$과 관련된 부등식을 생각해낸 후 수열의 극한값의 대소 관계에 대한 정리를 활용하여 충분히 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$을 증명할 수 있었다.
- 문제 [3-3] 주어진 급수를 정적분으로 표현할 수 있는가를 평가한다. 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(라)다항함수의 적분법-②정적분'에서 '정적분의 뜻을 안다.'라고 명시하고 있으며, 이 내용은 제시문 [가]에도 표현되어 있다. 또한 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(가)수열의 극한-①수열의 극한'에서 '수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.'라고 명시하고 있다. 따라서 주어진 급수를 제시문 [가]의 형태로 변형하여 정적분으로 만들고, 그 과정에서 나타나는 수열의 극한을 수렴하는 수열들로 표현하여 계산하면 충분히 해결 가능한 문항이었다. 변형하는 과정에서도 무한급수를 정적분으로 변형하는 과정을 충분히 이해하였다면 크게 어려움을 느낄 수 없었을 것이다. 또한 문제 [3-2]의 내용

을 활용하면 세부 계산 시 발생되는 수열의 극한 문제도 쉽게 해결할 수 있었다.

- 문제 [3-4] 정적분의 정의를 이용하여 주어진 수열의 극한을 계산할 수 있는지 판별한다. 2009 개정 교육과정 '수학Ⅱ-(라)지수와 로그-②로그, 미적분Ⅱ-(가)지수함수와 로그함수'에서 '로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.'라고 명시하고 있으므로, $\ln a_n$을 로그의 성질을 이용하여 변형한 후 그 형태를 급수의 형태로 충분히 변형할 수 있었을 것이다. 또한 '미적분Ⅰ-(라)다항함수의 적분법-②정적분'에서 '정적분의 뜻을 안다.'라고 명시하고 있으므로, 주어진 급수를 정적분의 형태로 변형할 수 있었을 것이다. 또한 문제 [3-3]을 해결하면서 문제 [3-4]의 특성도 미리 이해할 수 있었을 것이다. 정적분을 계산하는 과정은 '미적분Ⅰ-(라)다항함수의 적분법- ②정적분'에서 '부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.'라고 명시되었듯이 부정적분과 정적분의 관계를 이용하여 충분히 해결 가능했을 것이다.

7.5.2 출제 검토 교사 의견

고등학교 교과서 <미적분Ⅰ>, <미적분Ⅱ>에서 언급된 내용만을 발췌하여 제시문을 구성하였다. 자연계열 수학 교육과정을 이수한 학생들이라면 제시문의 내용을 이해하고 문제에 적용하는 데 어려움이 없었을 것이다.

문제에서는 로그의 성질, 정적분의 정의, 부정적분과 정적분의 관계, 수열의 극한, 미분을 이용한 부등식의 증명, 부분적분 등을 통해 고등학교 미적분학과 그에 관련된 다양한 내용의 전반적인 이해도, 특히 정의 및 성질에 대한 정확한 이해와 문제 해결에 필요한 계산력 모두 평가하고 있다. 제시문이 문제 해결의 가이드 역할을 할 수 있도록 구성되었으며 문항이 단계식으로 구성되어, 교육과정에서 다루고 있는 미적분학의 내용을 충분히 숙지하였다면 주어진 시간 내에 충분히 해결할 수 있다.

문제 [3-1]과 [3-2]는 교과서의 기본 개념의 이해도를 평가하는 문제이므로 교육과정을 정상적으로 이수했다면 충분히 해결할 수 있는 문제이다. 문제 [3-3]의 경우 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\lim_{n\to\infty}c=0$을 당연하게 생각하고 공식에만 집중한 학생들에게 개념(미적분Ⅰ-수열의 극한에 대한 성질)의 중요성을 인지하는 계기가 될 것이라 판단된다.

7.5.3 자문위원 평가 의견

제시문 [가]~[다]에 대하여 자문교사 모두가 교육과정 범위에 해당한다고 응답하였다. 문제 [3-1]~[3-4]에 대하여서도 자문교사 전체가 교육과정 범위에 해당하며 그 수준이 적정하다고 답하였다. 제시문 [가]~[다]의 난이도는 교과서에 나와 있는 내용으로 학생들이 이해하기에 충분하다고 생각된다고 응답하였다.

- 제시문 [가]에서 설명하고 있는 정적분의 정의는 구분구적법과도 관련되는 내용이며, 교육과정에서 다루고 있는, 구분구적법에서 정적분이 정의되는 부분을 명확히 설명하고 있다.
- 제시문 [나]에서 설명하고 있는 부정적분과 정적분의 관계는 수학사적 뿐만 아니라 고교 교육과정에서도 충분히 중요하게 다루고 있는 내용이며, 정적분의 계산을 위해서는 빠져서는 안될 만큼 필수적인 내용이다.
- 제시문 [다]에서 다루고 있는 부분적분법은 곱으로 표현된 함수의 부정적분을 구하는 데 유용하게 사용되는 적분법으로, 고등학교 교육과정뿐만 아니라 대학교 이공계 과정에서도 빈번히 활용되는 만큼 그 중요성이 큰 내용이다.
- 문제 [3-1]은 급수를 정적분으로 바꾸는 과정을 평가하는 문제로, 수열의 형태가 복잡해보이지만 로그의

성질을 활용한다면 충분히 숨겨진 개념을 유추하여 해결할 수 있는 문항이다. 문제 [3-2]는 미분을 활용하여 부등식을 증명하고 그 결과를 바탕으로 수열의 극한을 계산하는 문항으로, 부등식의 증명과 극한의 대소 관계를 이용한 극한값의 계산 모두 교과서에 많이 제시되는 형태인 만큼 어렵지 않게 해결 가능한 문제였다. 문제 [3-3]은 주어진 급수를 정적분으로 바꾸는 문항으로, 문제 [3-1]과 유사하지만 수열의 극한을 계산하는 과정이 추가되었다. 주어진 수열의 일반항은 익숙하지 않은 형태였지만 문제 [3-2]의 결과를 활용하면 쉽게 해결 가능했다. 문제 [3-4]는 문제 [3-1]과 유사하게 급수를 정적분으로 바꾸는 문항으로, 문제 [3-3]을 확장한 것으로 생각 가능하며 과정 모두 교육과정에서 다루고 있어 학생들은 큰 무리 없이 해결 가능했을 것이다.

문제 [3-1], [3-2]는 주어진 개념을 얼마나 정확하게 이해했느냐를 판단하는 문항이었다. 문제 [3-3]과 [3-4]는 난이도가 어느 정도 있으나, 전반적으로 이전 문항의 결과가 다음 문항의 해결에 도움을 주는 구성을 띠고 있어 학생들에게 체감상의 난이도는 그리 높지 않았을 것이다. 전반적으로 문항 [3] 내에서 난이도 조절이 적절하게 이루어졌다는 분석을 하였다. 전체적으로 제시문의 경우에는 범위/수준(난이도) 대부분 5점(일부 4점)을 부여하였으며 문제의 경우에도 1명을 제외한 전원이 범위/수준(난이도)에 대해 4~5점을 부여하여 전반적으로 문제[3-3]내에서 난이도 조절이 적절하게 이루어졌다는 분석을 하였다. 일부 문제의 난이도에 3점을 부여한 선생님의 경우 ‘로그의 성질과 지수의 형태의 변형 등을 이용하여 급수로 만들어 제시문 [가]와 [다]를 이용할 수 있도록 만드는 아이디어가 필요한 문제로 풀이에 상당한 노력을 필요로 하는 문항’이라고 언급하였지만 변별력을 위해 충분히 제시할 수 있는 문제라고 생각하였다.

7.6 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
3-1	•구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있는지, 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지, 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.	320점
3-2	•수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지, 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는지를 평가한다.	
3-3	•수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지, 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있는지, 정적분의 뜻을 아는지, 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지, 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.	
3-4	•정적분의 뜻을 아는지, 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지, 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.	

<유의사항>

- 하나의 문제라도 답안지를 백지로 제출한 경우 과락 처리함.
- 문제 번호와 답안을 바꿔 작성한 경우 과락 처리함.
- 검은색 이외의 색깔 펜을 사용한 경우 과락 처리함.
- 답안이나 답안지 여백에 문제와 관계없는 불필요한 낙서나 이와 유사한 표식이 있는 경우 또는 답안 내용 중 확연히 수험생 본인을 식별할 수 있는 내용이 있는 경우 과락 처리함.

7.7 답안 사례

【3-1】

$a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(2n)!n^n}}$ 이므로

$\ln a_n = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{(2n+1)(2n+2)\cdots(3n)}{n^n} = \dfrac{1}{n}\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(2+\dfrac{n}{n}\right)$

$= \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\dfrac{k}{n}\right)$ 이다.

(제시문 가)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \int_0^1 \ln(2+x)\,dx = \int_2^3 \ln t\,dt$ 이다.

부분적분법(제시문 다)에 의해

$$\int_2^3 \ln t\,dt = [t\ln t]_2^3 - \int_2^3 t\frac{1}{t}dt = (3\ln 3 - 2\ln 2) - 1 = \ln\frac{27}{4e}$$

【3-2】

$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ 라 하면, $x > 4$ 일 때, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x} > 0$ 이다.

따라서, $f(x)$ 는 $[4,\infty)$ 에서 증가한다.

$f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2(1-\ln 2) > 0$ 이므로, 모든 $x > 4$에 대해 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x > 0$ 가 성립한다.

$n > 4$에 대해 $0 < \dfrac{\ln n}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = 0$ 이다

【3-3】

$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n+1-k}{n}\ln\dfrac{n+k}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n-k}{n}\ln\dfrac{n+k}{n}\right) + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{n+k}{n}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n-k}{n}\ln\dfrac{n+k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\right\} = \int_0^1 (1-x)\ln(1+x)\,dx$ 이고,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\times\int_0^1\ln(1+x)\,dx=0\times\ln\frac{4}{e}=0$$

따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)\,dx$ 이 성립한다.

【3-4】

$$\ln a_n = n\ln(n+1)+(n-1)\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln(n+k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln\left(\frac{n+k}{n}\times n\right)=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln\frac{n+k}{n}+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{(n+1-k)\ln\frac{n+k}{n}\right\}+\frac{n(n+1)}{2}\ln n$$

이므로

$$\ln\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^2}\ln a_n-\frac{1}{2}\ln n=\frac{1}{n^2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\ln n+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln\frac{n+k}{n}\right\}-\frac{\ln n}{2}$$

$=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)+\frac{1}{2n}\ln n$ 이다.

[문항 1-2]에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ 이고, [문항 1-3]에 의해

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-k}{n}\ln\frac{n+k}{n}\right)=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)\,dx$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)\,dx=\int_1^2(2-t)\ln t\,dt$$

이다.

$$\int_1^2(2-t)\ln t\,dt=\left[\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\ln t\right]_1^2-\int_1^2\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{t}\,dt=\left[\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\ln t\right]_1^2-\int_1^2\left(2-\frac{t}{2}\right)dt$$

$$=\left[\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\ln t\right]_1^2-\left[2t-\frac{t^2}{4}\right]_1^2=\left(2\ln 2-\frac{3}{2}\ln 1\right)-\left\{\left(4-\frac{4}{4}\right)-\left(2-\frac{1}{4}\right)\right\}=2\ln 2-\frac{5}{4}$$

따라서,

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)\,dx=2\ln 2-\frac{5}{4}$ 이다.

8. 문항카드 8 – 자연계열 논술고사 4

8.1 일반정보

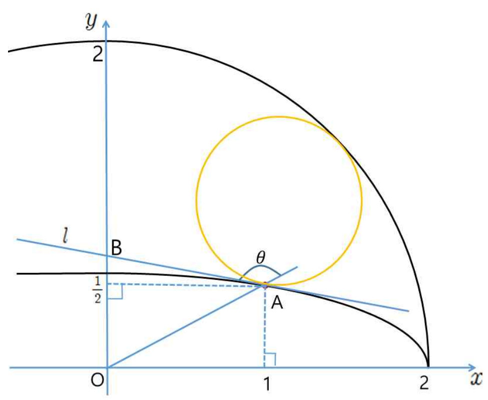
<table>
<tr><td colspan="2">유형</td><td colspan="2">논술고사</td></tr>
<tr><td colspan="2">전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td colspan="2">해당대학의
계열(과목)/문항번호</td><td colspan="2">[화공생명공학/기계공학/물리학] / 4번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>교육과정
과목명</td><td colspan="2">기하와 벡터</td></tr>
<tr><td>핵심개념
및 용어</td><td colspan="2">· 이차곡선
· 평면 곡선의 접선
· 벡터의 연산
· 평면벡터의 성분과 내적
· 평면운동</td></tr>
<tr><td colspan="2">답안작성(예상소요)시간</td><td>60분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

8.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

기하학적인 도형을 다루기 위해서 함수와 벡터를 모두 사용할 수 있다. 곡선과 직선을 함수로 표시하는 경우에는 미분과 적분을 사용할 수 있는 장점이 있고, 벡터를 사용하는 경우에는 벡터의 연산을 활용할 수 있는 장점이 있다.

아래의 그림은 돔 구장 내부 단면의 일부를 표시한 것이다. 돔 구장의 단면은 좌우 대칭이고, 지면은 x축, 수직으로 세워진 기둥은 y축, 그리고 원점은 O로 표시되어 있다. 돔 구장은 이중의 지붕을 가지고 있다. 아래 지붕은 타원으로서 지면까지 이어져 있고, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+3y^2=1$이다. 타원 위에는 (크기가 없는) 구멍 A가 있고, 좌표는 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$이다. 또 하나의 지붕은 원점을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 2인 원이다.



[문제] 위의 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오. (글자 제한 없음)

【4-1】 점 A에서 타원에 접하는 접선 l의 방정식을 구하시오.

【4-2】 접선 l이 y축과 만나는 점을 B라고 하자. 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각 θ는 $\frac{3\pi}{4}<\theta<\pi$의 범위에 있음을 보이시오.

【4-3】 원점 O에서 출발하는 공이 포물선을 따라 움직인다. t초 후 공의 위치는

$$\begin{cases} x=t \\ y=-\alpha t^2+\beta t \quad (\alpha, \beta \text{는 } \alpha>0,\ 0<\beta\leq 1 \text{인 상수}) \end{cases}$$

로 주어진다. 공이 구멍 A를 통과한다면, $t=0$에서 속도의 y성분의 범위를 구하시오. (단, 공은 크기가 없는 점으로 가정하자.)

【4-4】 돔 구장의 이중 지붕 사이에는 원형 구조물이 놓여있다. 이 원은 점 A에서 접선 l에 접하고, 동시에 원형 지붕에도 접한다. 원의 반지름의 길이 r을 구하시오.

8.3 출제 의도

<기하와 벡터>에서 학습하는 이차곡선, 평면 곡선의 접선, 벡터의 연산, 평면벡터의 성분과 내적, 평면운동 등의 기본적인 개념들의 이해도를 평가한다.

포물선, 타원을 이해하고, 음함수와 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 평면곡선의 접선의 방정식을 구하는지를 평가한다.

벡터의 연산을 할 수 있고, 평면벡터의 성분과 내적을 이해하고, 미분법을 이용하여 평면 운동 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

8.4 출제 근거

제시문	-

▶ 교육과정 근거

과목명	기하와 벡터	교육과정	(1) 평면 곡선 (나) 평면 곡선의 접선 ① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
		성취기준	· 기벡1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
		교육과정	(1) 평면 곡선 (나) 평면 곡선의 접선 ② 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
		성취기준	· 기벡1122. 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선에서의 방정식을 구할 수 있다.·
		교육과정	(2) 평면 벡터 (나) 평면벡터의 성분과 내적 ① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
		성취기준	· 기벡1221. 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
		교육과정	(2) 평면 벡터 (나) 평면벡터의 성분과 내적 ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
		성취기준	· 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
		교육과정	(2) 평면벡터 (나) 평면벡터의 성분과 내적 ③ 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있다.
		성취기준	· 기벡1223-1. 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다. · 기벡1223-2. 좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 구할 수 있다.
		교육과정	(2) 평면 벡터 (다) 평면 운동 ① 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
		성취기준	·기벡1231. 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	이강섭	미래엔	2014	18		○
기하와 벡터	황선욱	좋은책신사고	2014	16, 17		○

기하와 벡터	김창동	교학사	2014	17, 19		○

문제	4-1

▶ 교육과정 근거

<table>
<tr><td rowspan="4">과목명</td><td rowspan="4">기하와 벡터</td><td>교육과정</td><td>(1) 평면 곡선
(나) 평면 곡선의 접선
① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 기벡1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>(1) 평면 곡선
(나) 평면 곡선의 접선
② 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 기벡1122. 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선에서의 방정식을 구할 수 있다.·</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	이강섭	미래엔	2014	38~41		○
기하와 벡터	황선욱	좋은책신사고	2014	32~36		○
기하와 벡터	류희찬	천재교과서	2014	36~46		○

문제	4-2

▶ 교육과정 근거

<table>
<tr><td rowspan="4">과목명</td><td rowspan="4">기하와 벡터</td><td>교육과정</td><td>(2) 평면 벡터
(나) 평면벡터의 성분과 내적
① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 기벡1221. 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>(2) 평면 벡터
(나) 평면벡터의 성분과 내적
② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	이강섭	미래엔	2014	86		○
기하와 벡터	황선욱	좋은책신사고	2014	74		○
기하와 벡터	류희찬	천재교과서	2014	86, 87		○

문제	4-3

▶ 교육과정 근거

과목명	기하와 벡터	교육과정	(2) 평면 벡터 (다) 평면 운동 ① 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
		성취기준	·기벡1231. 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	이강섭	미래엔	2014	106~109		○
기하와 벡터	황성운	좋은책신사고	2014	91~93		○
기하와 벡터	류희찬	천재교과서	2014	110~112		○

문제	4-4

▶ 교육과정 근거

과목명	기하와 벡터	교육과정	(2) 평면벡터 (나) 평면벡터의 성분과 내적 ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
		성취기준	· 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
		교육과정	(2) 평면벡터 (나) 평면벡터의 성분과 내적 ③ 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있다.
		성취기준	· 기벡1223-1. 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다. · 기벡1223-2. 좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	이강섭	미래엔	2014	80, 81, 87, 98, 99		○
기하와 벡터	황성운	좋은책신사고	2014	70, 71, 74, 83, 84		○
기하와 벡터	류희찬	천재교과서	2014	81, 82, 87, 99, 100		○

8.5 문항 해설

8.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문은 2009 개정 교육과정 '기하와 벡터-(가)평면곡선-①이차곡선'과 '기하와 벡터-(나)평면벡터-②평면벡터의 성분과 내적'에 해당하는 제시문이다. 기하학적인 도형들을 좌표평면 위에서 방정식으로 표현하여 학생들의 이해를 돕고 있다.
- 문제 [4-1]은 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정 교육과정 '기하와 벡터-(가)평면곡선-②평면곡선의 접선'에서 '음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.'라고 명시하고 있다. 또한 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅱ-(다)미분법-②도함수의 활용'에서 '접선의 방정식을 구할 수 있다.'라고 명시하고 있다. 따라서 음함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 주어진 점에서의 접선의 방정식을 어려움 없이 구할 수 있었을 것이다.
- 문제 [4-2]는 두 벡터가 이루는 각에 대한 정보를 파악할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정 교육과정 '기하와 벡터-(나)평면벡터-②평면벡터의 성분과 내적'에서 '두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.'라고 명시하고 있다. 두 벡터의 내적은 두 벡터의 크기와 두 벡터가 이루는 각을 통해 정의되며, 좌표평면 상에서는 성분간의 곱으로 계산할 수 있다. 따라서 두 점 A, B의 위치벡터를 구한 후 주어진 벡터의 내적 값을 통해 두 벡터가 이루는 각의 코사인 값을 구할 수 있다. 또한 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅱ-(나)삼각함수-①삼각함수의 뜻과 그래프'에서 '삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다'라고 명시하고 있는 만큼, 계산한 코사인 값을 바탕으로 그 범위를 추정할 수 있다.
- 문제 [4-3]은 평면상에서의 운동을 해석할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정 교육과정 '기하와 벡터-(나)평면벡터-③평면운동'에서 '미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.'라고 명시하고 있으며, 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(다)다항함수의 미분법-②도함수'에서 '함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다', '함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다'라고 명시하고 있다. 따라서 주어진 함수를 미분하여 그 운동을 해석할 수 있으며, 구멍 A를 통과한다는 조건 등을 바탕으로 여러 조건을 어렵지 않게 찾아내 해결할 수 있다.
- 문제 [4-4]는 주어진 상황을 만족하는 도형을 찾아낼 수 있는가를 묻고 있다. 2009 개정 교육과정 '수학Ⅰ-(다)도형의 방정식-③원의 방정식'에서 '좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.'라고 명시하고 있으며, '기하와 벡터-(가)평면곡선-②평면곡선의 접선'에서 '음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.'라고 명시하고 있다. 또한 '기하와 벡터-(나)평면벡터-②평면벡터의 성분과 내적'에서 '좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있다.'라고 명시하고 있다. 따라서 주어진 조건을 음함수 미분법이나 벡터를 이용하여 문제 상황을 표현할 수 있을 것이며, 이를 바탕으로 조건을 만족하는 원의 방정식을 구할 수 있다.

8.5.2 출제 검토 교사 의견

고등학교 교과서 <수학Ⅰ>, <기하와 벡터>에서 언급된 내용들을 활용하여 제시문을 구성하였다. 자연계열 수학교육과정을 이수한 학생이라면 제시문의 내용을 이해하고 해석하는 데 큰 어려움이 없었을 것이다. 제시문의 내용은 교육과정에서 다루고 있는 도형들을 방정식으로 표현하여 설명하고 있으므로 학생들의 이해에 큰 무리가 없었을 것이라는 의견이 대부분이었다.

문제에서는 좌표평면 위의 도형과 운동에 대한 종합적인 해석을 묻고 있다. 원의 방정식과 타원의 방정식, 음함수 미분법, 접선의 방정식, 평면운동의 해석 등의 내용을 이해하고 적용할 수 있는지를 평가하고

자 한다. 교육과정에서 다루는 평면곡선과 평면벡터, 평면운동의 내용을 충분히 이해하고 숙지하였다면 주어진 시간 내에 무리 없이 문제를 해결할 수 있다.

수학에서 벡터를 배우는 이유를 생각하도록 의도하였으며 문제 [4-1]부터 [4-4]는 벡터를 이용하여 해결할 수 있지만, 미적분을 이용해서도 해결할 수 있는 장점이 있고, 문제 [4-1]을 언급하여 문제 [4-4]를 조금 더 쉽게 해결할 수 있는 힌트를 준 것도 출제자의 배려라고 여겨진다.

8.5.3 자문위원 평가 의견

- 제시문에 대하여 자문교사 전부가 교육과정 범위에 해당한다고 응답하였다. 문제 [4-1]~[4-4]에 대하여서도 자문교사 모두가 교육과정 범위에 해당하며 그 수준이 적정하다고 답하였다. 제시문에서 돔 구장을 설명하기 위해 도입한 원과 타원의 방정식은 고교 교육과정에서 모두 다루고 있는 내용이다.
- 문제 [4-1]은 타원의 접선의 방정식을 구하는 문제로 교과서에서 기본적인 유형으로 제시되는 만큼 학생들이 큰 어려움 없이 해결 가능했을 것이다. 문제 [4-2]는 두 벡터가 이루는 각에 대해 추정하는 문제로, 벡터의 내적이나 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 해결가능하다. 문제 [4-3]은 평면운동을 해석하는 문제로, 교과서에 수록된 속도·가속도를 계산하는 방법을 바탕으로 충분히 해결 가능하다. 문제 [4-4]는 원과 타원의 방정식, 접선 등 도형에 대한 종합적인 이해와 해석을 요하는 문항으로, 교육과정에서 평면도형과 그 성질에 대하여 학습한 내용을 활용하면 무리 없이 해결 가능하다.
- 문제 [4-1]은 교과서의 예제에도 수록될 만큼 많은 학생들이 무리 없이 해결했을 것이며, 이를 바탕으로 문제 [4-2] 또한 어렵지 않게 해결 가능했을 것이다. 문제 [4-3]은 운동을 해석하고 조건을 찾는 데 큰 어려움이 없어 많은 학생들이 쉽게 해결했을 것이다. 문제 [4-4]는 고교 교육과정에서 다루는 평면 도형에 대한 종합적인 이해과 사고능력이 필요한 문항으로, 학생들의 체감 난이도가 높았을 것으로 예상되며 충분한 변별력을 갖췄다고 할 수 있다.
- 일부 교사들은 제시문과 문제 [4-1]~[4-3]까지는 평범했지만 문제 [4-4]는 학생들을 충분히 변별할 만큼 난이도가 있다고 판단하였지만 교육과정 내에서 충분히 고려하였으므로 오히려 좋은 변별 문제로 판단한다는 의견이 대부분이었다. 또 다른 교사들은 개념을 고스란히 옮겨놓은 것이라면 '쉽다' 정도로 판단할 수 있겠으나, 실생활에 사용되는 예를 적어놓아 학생들이 지레 어렵다고 느낄 수 있을 것 같았고, 원에 내접하고 타원에 외접하는 상황이 어려울 것 같았으나, 점의 좌표를 주었고, 타원의 방정식을 모두 제시함으로써 난이도를 적절하게 조절하려는 것이 눈에 띄어 오히려 난이도는 무난했다는 의견이었다. 문제 [4번]을 어렵다고 판단한 교사들도 '기하와 벡터-(가)평면곡선' 중 타원의 방정식 개념을 기반으로 하고 있다. 타원과 원이 접하고 있고, 타원 위의 한 점에서의 접선의 방정식은 음함수의 미분법을 이용하여 해결할 수 있는 문제로서 현재 고등학교 교육과정을 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 쉬운 문제라고 판단하였다. 매개변수로 표현된 함수식에서 미분법을 이용하여 속도도 쉽게 구할 수 있고 문제 [4-4]에서 타원의 접선에 접하므로 타원과 한 점에서 만나는 것과 다른 원과 내접하는 원의 성질을 이용하면 계산은 복잡하지만 무난히 반지름을 구할 수 있으며 이는 고등학교 교육과정에서 <수학Ⅰ>, <기하와 벡터> 의 내용에 해당되며 이을 제대로 숙지하고 있는 학생이라면 충분히 접근할 수 있는 문제라 할 수 있다는 의견도 있었다.

전반적으로 다른 문항들에 비해 난이도는 조금 있다고 판단(문제 [4-4]의 경우 3명이 수준을 3점이라고 판단)하였지만 이렇게 판단한 교사들도 범위 등을 고려하였을 때 교육과정 내에서 충분히 수행할 수 있는 문제라고 판단하였다. (문제 4번에 대한 적합성에 대한 전체 응답은 범위의 경우에는 평균이 4.7이상, 수준(난이도)의 경우에는 4.5이상)

8.6 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
4-1	•음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지, 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선에서의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다.	480점
4-2	•위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해하는지, 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있는지를 평가한다.	
4-3	•미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.	
4-4	•음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지, 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있는지, 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있는지, 좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다.	

<유의사항>
- 하나의 문제라도 답안지를 백지로 제출한 경우 과락 처리함.
- 문제 번호와 답안을 바꿔 작성한 경우 과락 처리함.
- 검은색 이외의 색깔 펜을 사용한 경우 과락 처리함.
- 답안이나 답안지 여백에 문제와 관계없는 불필요한 낙서나 이와 유사한 표식이 있는 경우 또는 답안 내용 중 확연히 수험생 본인을 식별할 수 있는 내용이 있는 경우 과락 처리함.

8.7 답안 사례

【4-1】

$\frac{x^2}{4}+3y^2=1$ 에 접하는 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{12y}$ 이므로, $\left(1,\frac{1}{2}\right)$에서 기울기는 $-\frac{1}{6}$ 이다.

기울기가 $-\frac{1}{6}$ 이고, $\left(1,\frac{1}{2}\right)$을 지나므로, 접선 l의 방정식은 $y=-\frac{1}{6}(x-1)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$ 이다.

【4-2】

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 는 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$이고, 점 B의 좌표는 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$는 $\left(-1,\frac{1}{6}\right)$이다.

벡터의 내적을 표현하는 방식 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta$ 를 이용하기 위하여

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{11}{12}$ 와 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{\sqrt{37}}{6}$ 을 사용하면, $\cos\theta=-\frac{11}{\sqrt{185}}$ 이다.

따라서 $-1<\cos\theta<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고, 각 θ는 $\frac{3\pi}{4}<\theta<\pi$ 의 범위에 있다.

【4-3】

원점에서 공이 출발하는 속도는 위치를 시간으로 미분하면 $(1,\beta)$이다. 즉 $t=0$ 에서 속도의 y성분은 β이다. 포물선은 점 A를 지나기 때문에 $\frac{1}{2}=-\alpha+\beta$ 를 만족한다.

이 식에 주어진 조건 $\alpha>0$를 적용하면 $\frac{1}{2}<\beta$이 되므로, β는 $\frac{1}{2}<\beta\le 1$ 의 범위에 있다.

한편, 공이 A를 통과하려면 점 A에서 포물선의 기울기가 $-\frac{1}{6}$보다 커야 한다.

즉 $-2\alpha+\beta>-\frac{1}{6}$ 이 되려면 $\beta<\frac{7}{6}$이다. $\frac{1}{2}<\beta\le 1$ 는 $\beta<\frac{7}{6}$의 범위를 만족하므로, 공은 A를 통과한다. 따라서 속도의 y성분 β는 $\frac{1}{2}<\beta\le 1$ 범위에 있다.

【4-4】

원의 중심을 C로 놓자. 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$는 벡터의 덧셈을 쓰면, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 이다.

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$이다. 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$는 접선 l에 수직이므로, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t(1,6)$로 놓을 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 의 크기는 r이므로 $r=t\sqrt{37}$. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{r}{\sqrt{37}}(1,6)$ 이다.

벡터의 내적을 이용하면, $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$ 이고,

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 의 크기는 $2-r$ 이므로 $(2-r)^2 = \frac{5}{4} + \frac{8r}{\sqrt{37}} + r^2$ 을 얻는다.

이 식을 정리하면 $4\left(\frac{2}{\sqrt{37}} + 1\right)r = \frac{11}{4}$ 이므로, 반지름은 $r = \frac{11}{16\left(\frac{2}{\sqrt{37}} + 1\right)} = \frac{11\sqrt{37}}{16(2+\sqrt{37})}$ 이다.