5. 문항카드 5 – 자연계열 논술고사 1

5.1 일반정보

<table>
<tr><td colspan="2">유형</td><td colspan="2">논술고사</td></tr>
<tr><td colspan="2">전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td colspan="2">해당대학의
계열(과목)/문항번호</td><td colspan="2">[전자공학전공/컴퓨터공학전공/수학전공] / 1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>교육과정
과목명</td><td colspan="2">미적분 Ⅰ, 미적분 Ⅱ, 확률과 통계</td></tr>
<tr><td>핵심개념
및 용어</td><td colspan="2">· 상대도수, 큰 수의 법칙
· 확률의 정의, 통계적 확률
· 이산확률변수의 기댓값
· 정적분과 면적
· 도함수와 최대 최소</td></tr>
<tr><td colspan="2">답안작성(예상소요)시간</td><td>40분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

5.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

[가] 17세기 프랑스의 귀족이자 도박사인 슈발리에 드 메레는 1개의 주사위를 4번 던졌을 때 적어도 한 번 6이 나온다는 것에 반복적으로 내기를 걸었고 그 결과로 꾸준히 돈을 벌었다. 그 이후 드 메레는 게임의 규칙을 바꿔 2개의 주사위를 24번 던졌을 때 적어도 한 번 $(6,6)$, 즉 두 주사위가 모두 6이 나오는 것에 반복적으로 내기를 걸었는데, 그 결과 예상과 달리 지속적으로 돈을 잃었다. 그는 첫 번째 방식의 내기와 두 번째 방식의 내기에서 자신이 이길 확률이 같다고 생각했는데, 게임을 반복할수록 첫 번째 내기에서는 돈을 벌고 두 번째 내기에서는 돈을 잃는 상황이 납득되지 않아 친구이자 수학자인 블레즈 파스칼에게 그 이유를 알려달라고 부탁했다. 파스칼은 동료 수학자인 페르마와 토론한 후 드 메레의 질문에 올바로 답할 수 있었다. 파스칼의 설명을 정리하면 다음과 같다.

1개의 주사위를 4번 던지는 첫 번째 방식의 내기에서 한 번도 6이 나오지 않을 확률은 $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.482$ 이므로 드 메레가 내기에서 이길 확률은 $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.518$ 이다.
2개의 주사위를 24번 던지는 두 번째 방식의 내기에서 한 번도 $(6,6)$이 나오지 않을 확률은 $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.509$ 이므로 드 메레가 내기에서 이길 확률은 $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491$ 이다. (각각의 확률은 반올림하여 소수점 셋째자리까지 표현함)

[나] 확률변수 X가 가지는 값이 유한개이거나 자연수와 같이 셀 수 있을 때 그 확률변수 X를 이산확률변수라고 한다. 이산확률변수 X가 가지는 값이 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 이고 X가 이들 값을 가질 확률이 각각 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 일 때 이 대응관계를 나타내는 함수 $\mathrm{P}(X=x_k)=p_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 을 X의

확률질량함수라고 한다. 이 경우 $\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ 를 확률변수 X의 기댓값이라 하고 $\mathrm{E}(X)$ 로 나타낸다.

[다] 나는 참가비용이 100만원인 어떤 게임에 참가할 선택권이 있다. 이 게임은 참가비용을 지불하고 주사위 2개를 던져서 모두 6이 나오면 상금 5천4백만원을 받고 그렇지 않으면 아무 것도 받지 못하는 규칙을 갖고 있다. $54{,}000{,}000\times\frac{1}{36}+0\times\frac{35}{36}=1{,}500{,}000$ 이므로 내가 이 게임에 참가했을 때 받게 되는 상금의 기댓값은 150만원이고, 참가비용의 1.5배에 해당되는 금액이다. 그런 이유로 이 게임의 참가는 내게 유리할 거라고 생각할 수도 있지만, 게임에 참가했을 때 참가비용 100만원을 모두 잃을 확률이 1에 아주 가까운 $\frac{35}{36}=0.972$ 이기 때문에 나는 이 게임의 참가를 주저하게 된다. 실제로 18세기의 수학자이자 물리학자인 다니엘 베르누이는 동일한 기댓값을 갖더라도 발생확률이 작은 사건이 주는 만족도는 작아진다고 주장한 바 있었다. 만일 나의 만족도를 수치로 표시할 수 있고 이 게임에서 얻는 만족도가 상금액의 절반이라면, 만족도는 주사위 2개를 던져서 모두 6이 나오는 경우 $\frac{1}{2}\times54{,}000{,}000=27{,}000{,}000$ 의 값을 갖고 그렇지 않으면 0의 값을 갖는 이산확률변수이다. 이때 만족도의 기댓값은 $27{,}000{,}000\times\frac{1}{36}+0\times\frac{35}{36}=750{,}000$, 즉 75만원이어서 나는 100만원의 참가비를 내야 하는 이 게임에 참가하지 않는 편이 낫다는 결론에 이른다.

[라] 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)|dx$ 이다.

[문제] 제시문 [가]~[라]를 참고하여 다음 물음에 답하시오. (글자 제한 없음)

【1-1】 서강이는 2만 개의 구슬을 가지고 있고, 제시문 [가]에서 언급한 1개의 주사위를 4번 던지는 게임을 2만 번 반복해서 시행하려 한다. 각 게임에서 적어도 한 번 6이 나오면 서강이가 가진 구슬은 1개 늘어나고 그렇지 않으면 구슬 1개가 줄어드는 방식이다. 게임의 총 횟수 2만 번이 ‘큰수의 법칙’을 사용할 수 있을 만큼 충분히 큰 수라고 가정할 때, 모든 게임이 종료된 후 서강이는 대략 몇 개의 구슬을 가지고 있게 될지 설명하시오.

【1-2】 제시문 [가]에서 드 메레가 두 번째 내기의 규칙을 바꿔 2개의 주사위를 25번 던졌을 때 적어도 한 번 $(6,6)$이 나오는 것에 내기를 걸었다고 하자. 그 내기가 드 메레에게 불리하지 않은 이유를 설명하시오.

【1-3】 마이클은 100달러를 가지고 주사위 던지기 게임에 참가한다. 그는 0과 1사이의 실수 x를 선택할 수 있다. 주사위를 한 번 던져서 6이 나오면 마이클은 100달러를 그대로 보유한 채 추가로 $800x$ 달러를 받고, 6이 나오지 않는다면 $100x$ 달러를 지불해야 한다. 마이클의 만족도는 게임이 끝난 후 그가 보유한 달러 금액의 자연로그 값과 같을 때, 마이클이 만족도의 기댓값을 최대로 하려면 어떤 x를 선택해야 하는지를 설명하시오.

【1-4】 이산확률변수 X는 자연수 $101, 102, 103, \cdots, 200$ 중에서 임의로 하나를 택한 값이고, Y는 $Y = \frac{100}{X}$ 으로 정의된 이산확률변수이다. 제시문 [나]와 [라]를 참고하여 부등식 $\ln\frac{201}{101} < \mathrm{E}(Y) < \ln 2$ 가 성립함을 보이시오.

5.3 출제의도

<미적분Ⅰ>, <미적분Ⅱ>, <확률과 통계>에서 학습하는 도함수, 최대·최소, 면적, 통계적 확률, 이산확률변수의 기댓값, 큰 수의 법칙 등의 해석 능력 등을 평가하고자 하였다.

큰 수의 법칙을 이해하여 통계적 확률과 상대도수로부터 수학적 확률을 유추함으로써 수학적 문제를 해결하는 능력을 평가하고자 하였다.

구체적인 상황으로 제시된 이산확률변수의 기댓값이 어떤 함수로 표현되는가를 이해하고, 미분을 이용하여 그 기댓값이 최대가 되는 순간을 찾아내는 능력을 평가하고자 하였다.

급수의 합으로 표현되는 이산확률변수의 기댓값과 함수의 정적분으로 표현되는 영역의 면적의 크기를 비교할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

5.4 출제 근거

제시문	가

▶ 교육과정 근거

과목명	확률과 통계	구분	내용
과목명	확률과 통계	교육과정	(1) 확률 (가) 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. ② 확률의 기본 성질을 이해한다. ④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
		성취기준	· 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다. · 확통1214. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
확률과 통계	우정호 외	동아출판	2017	113		○
확률과 통계	김창동 외	교학사	2017	78		○
확률과 통계	정상권 외	금성출판	2017	77~81		○

제시문	나

▶ 교육과정 근거

과목명	확률과 통계	구분	내용
과목명	확률과 통계	교육과정	(3) 통계 (가) 확률분포 ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
		성취기준	· 확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
확률과 통계	우정호 외	동아출판	2017	152, 153		○
확률과 통계	김창동 외	교학사	2017	118, 119		○
확률과 통계	정상권 외	금성출판	2017	127, 128		○

제시문	다

▶ 교육과정 근거

과목명	확률과 통계	구분	내용
과목명	확률과 통계	교육과정	(3) 통계 (가) 확률분포 ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
		성취기준	· 확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
확률과 통계	우정호 외	동아출판	2017	152, 153		○
확률과 통계	김창동 외	교학사	2017	118, 119		○
확률과 통계	정상권 외	금성출판	2017	127, 128		○

제시문	라

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	(4) 다항함수의 적분법 (다) 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
		성취기준	· 미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분 I	우정호 외	동아출판	2017	219		○
미적분 I	김창동 외	교학사	2017	178		○
미적분 I	정상권 외	금성출판	2017	185		○

문제	1-1

▶ 교육과정 근거

과목명	확률과 통계	교육과정	(1) 확률 (가) 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. ② 확률의 기본 성질을 이해한다.
		성취기준	· 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
확률과 통계	우정호 외	동아출판	2017	117, 164~166		○
확률과 통계	김창동 외	교학사	2017	80, 128, 129		○
확률과 통계	정상권 외	금성출판	2017	80, 140, 141		○

문제	1-2

▶ 교육과정 근거

과목명	확률과 통계	교육과정	(1) 확률 (가) 확률의 뜻과 활용 ④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

		성취기준	· 확통1214. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
확률과 통계	우정호 외	동아출판	2017	97		○
확률과 통계	김창동 외	교학사	2017	78		○
확률과 통계	정상권 외	금성출판	2017	77		○

문제	1-3

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	(3) 다항함수의 미분법 (다) 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
		성취기준	· 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
과목명	미적분 II	교육과정	(1) 지수함수와 로그함수 (나) 지수함수와 로그함수의 미분 ② 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
		성취기준	· 미적2122. 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
과목명	확률과 통계	교육과정	(3) 통계 (가) 확률분포 ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
		성취기준	· 확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
확률과 통계	우정호 외	동아출판	2017	152, 153		○
확률과 통계	김창동 외	교학사	2017	118, 119		○
확률과 통계	정상권 외	금성출판	2017	127, 128		○
미적분 I	우정호 외	동아출판	2017	153		○
미적분 I	정상권 외	금성출판	2017	128~134		○
미적분 II	우정호 외	동아출판	2017	133~134		○
미적분 II	정상권 외	금성출판	2017	116		○

문제	1-4

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	(4) 다항함수의 적분법 (나) 정적분 ① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td></td><td>를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">미적분Ⅱ</td><td>교육과정</td><td>(4) 적분법
(가) 여러 가지 적분법
③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 미적2413-1. 함수 $y=x^n$(n은 실수)의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">확률과 통계</td><td>교육과정</td><td>(3) 통계
(가) 확률분포
② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분Ⅰ	우정호 외	동아출판	2017	192, 193		○
미적분Ⅰ	정상권 외	금성출판	2017	166~169		○
미적분Ⅱ	우정호 외	동아출판	2017	220		○
미적분Ⅱ	정상권 외	금성출판	2017	185, 186		○
확률과 통계	김창동 외	교학사	2017	118, 119		○
확률과 통계	정상권 외	금성출판	2017	127, 128		○

5.5 문항 해설

5.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 [가]는 2009 개정 교육과정 '확률과 통계-(나)확률-②조건부확률'에 관련된 제시문이다. 조건부확률의 뜻과 사건의 독립과 종속을 이해하고 이를 바탕으로 독립시행의 확률에 대한 설명을 하고 있으므로 고교 교육과정 수준에서 제시문을 서술하였다.
- 제시문 [나], [다]는 2009 개정 교육과정 '확률과 통계-(다)통계-① 확률분포'에 해당하는 내용이다. 이산확률변수, 확률질량함수, 기댓값 등 고교 교육과정에서 다루는 용어를 사용하여 학생들이 충분히 쉽게 이해할 수 있는 내용을 서술하였다. 만족도라는 용어에 대한 자세한 설명과 만족도의 기댓값을 구하는 과정을 자세하게 서술하여 새로운 용어 도입에 따른 유불리를 없앴다. 만족도의 기댓값이라는 새로운 용어를 사용하였지만 이를 구해나가는 과정은 고등학교 교육과정상에 제시된 이산확률분포를 활용한 기댓값을 구하는 것과 같은 내용으로 교육과정을 준수하고 있다.
- 제시문 [라]는 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(라)다항함수의 적분법-③정적분의 활용'에 관련된 제시문으로 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분의 표현을 사용하여 서술하였다.
- 문제 [1-1]은 제시문 [가]에서 제시된 수학적 확률과 '큰수의 법칙'을 사용하여 해결하는 문제이다. 이는 큰수의 법칙을 정확하게 이해하고 이를 이용하여 주어진 조건에 맞는 결과를 찾아내는 문제이며 2009 개정 교육과정 '확률과 통계-(다)통계-①확률분포'에서 '어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 상대도수 $\frac{X}{n}$는 n의 값이 커질수록 수학적 확률 p에 가까워진다.(신항균 외, 확률과 통계, 지학사(2014), p.118)'라는 큰 수의 법칙을 적용하여 간단히 해결되는 문항이다. 좀 더 구체적으로 설명하면 한 번의 게임에서 이길 수학적 확률이 0.518이므로 충분히 큰 수인 20,000번의 게임 시행을 통해 게임에서 이긴 횟수와 진 횟수를 큰 수의 법칙을 이용하여 구할 수 있고 모든 게임이 종료된 후 몇 개의 구슬을 가지게 될지를 구하는 문제이다. 따라서 충분히 고교 교육과정을 이수한 학생이라면 해결이 가능한 문제이다.
- 문제 [1-2]는 제시문 [가]에서 언급한 24번 던지는 것을 25번으로 바꾸어 간단히 해결이 가능한 문제이다. 먼저 2개의 주사위를 24번 던지는 두 번째 방식의 내기에서 한 번도 (6, 6)이 나오지 않을 확률은 $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0.509$로 제시되어 있으므로 25번을 던져서 한 번도 (6, 6)이 나오지 않을 확률은 "확률과 통계 - (나)확률 - ②조건부확률"에서 '확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.'에서 언급한 확률의 곱셈정리를 활용하여 $0.509\times0.972=0.495$로 구할 수 있다.($\frac{35}{36}=0.972$, 반올림하여 소수점 셋째 자리까지 표현) 따라서 위의 결과를 이용하여 간단히 설명이 가능한 문항이다.
- 문제 [1-3]는 제시문 [다]의 이산확률분포에서의 기댓값을 구하는 내용을 사용하여 보유한 달러 금액의 기댓값을 구해야 한다. 이는 교육과정상에서 자주 다루고 있는 소재로 쉽게 이해하고 해결이 가능한 내용이다. 또한 제시문 [다]의 만족도라는 개념을 제시문 내용을 통해서 충분히 이해하고 활용할 수 있는 학생이라면 문제 [1-3]에서 정의한 만족도가 자연로그 식으로 표현됨을 알 수 있으며 '미적분Ⅱ-(가)지수함수와 로그함수-②지수함수와 로그함수의 미분'에서 '②지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.'를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있다고 판단된다.
- 문제 [1-4]는 이산확률변수의 기댓값과 정적분의 넓이에 대한 이해를 바탕으로 해결하는 문제이다. 하지만 확률과 통계와 미적분을 조합하여 해결하는 부분이 어렵게 느껴졌을 것으로 생각되며 부등식을 증명해야 하는 부담감에 많은 학생이 쉽게 해결하지 못했을 것으로 생각된다. 하지만 제시문 [나]와 [라]를

참고하라는 내용을 문제에 포함하여 해결할 수 있는 실마리를 제공하여 난이도를 낮췄다고 생각되며 문제를 해결하기 위한 내용은 ‘확률과 통계-(다)통계-1확률분포’에서 ‘②이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.’와 ‘미적분Ⅰ-(라)다항함수의 적분법-2정적분, 3정적분의 활용’에서 ‘①구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.’, ‘①곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.’를 이용하는 문제이므로 고등학교 교육과정 내에서 충분히 해결이 가능한 것으로 판단된다.

5.5.2 출제 검토 교사 의견

제시문은 여사건의 확률, 이산확률변수의 기댓값, 정적분의 활용 등 교과서의 내용을 그대로 인용하여 학생들이 쉽게 받아들일 수 있는 내용으로 구성되어 있다.

문제는 기댓값의 정의, 여사건의 확률을 이용한 간단한 문제와 로그함수의 미분법, 정적분의 활용을 이용하여 해결하는 복합적인 문항으로 구성되어 있다. 실생활과 밀접한 확률과 통계의 성격을 잘 살린 문항으로 생각되며 특히, 17세기에 실제로 있었던 사례와 게임 속에 숨어 있는 확률을 소개함으로써 학생들이 확률과 통계에 조금 가까워질 수 있는 계기를 마련했다고 평가할 수 있다.

문제에서 사용되는 개념도 각 단원의 가장 기초가 되는 내용이므로 고교 교육과정 내에서 적절하게 출제되었다고 판단된다. 또한 제시문의 내용이 문항을 해결하기 위한 역할을 할 수 있도록 충분히 고려되어 구성되어 있으며 문항의 단계적 구성이 돋보이고 단순한 계산만을 필요로 하는 문항이 아닌 의미를 전달해주는 부분이 탁월하다고 판단되며 적절한 난이도로 구성되어 충분히 변별력이 있을 것으로 생각된다.

5.5.3 자문위원 평가 의견

- 제시문 [가]에 대하여 자문교사 모두 고등학교 교육과정 범위 내에 있고 적정한 수준의 제시문이라고 판단하였다. 『확률과 통계(비상교육)』 문제 5(67쪽)에서 배운 여사건의 확률 내용과 매우 유사한 지문이 있다는 근거로 고등학교 교육과정 범위에 있다고 의견이 있었다. 또한 2009 개정 교육과정의 <확률과 통계> 과목의 핵심성취기준인 ‘확통1223-2.독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.’와 ‘확통 1214. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.’에 잘 부합하는 제시문으로 판단된다.
- 제시문 [나]에 대하여 자문교사 모두가 교육과정 범위와 수준이 적정한지에 대한 질문에 대부분 ‘매우 그렇다’라고 판단하였다. 또한 성취기준 ‘확통 1312-1’에서 다루는 이산확률변수의 기댓값(평균)은 일상생활에서 가장 자주 다루는 대푯값으로 표준편차를 이해하는 기초 개념으로 <확률과 통계>의 내용과 성취기준에 아주 부합하며 성취기준 ‘확통 1312-1, 1312-2’에서 다루는 이산확률변수의 기댓값(평균)은 통계 결과를 이해하는 데에 필요한 기본 개념으로 이항분포(확통 1313)에 관한 내용을 학습하기 위해서는 반드시 알아야 하는 기본 내용이라는 의견이 있었다.
- 제시문 [다]에 대하여 위 제시문과 같은 질문에 대하여 ‘보통이다’라는 소수의견을 제시한 경우가 있었고 대부분 ‘그렇다’, ‘매우 그렇다’라고 답변하였다. ‘보통이다’라는 소수의견의 경우 ‘제시문 안에 확률분포표를 이용하여 이산확률변수의 기댓값을 구하는 것이 포함되어 있다고 생각되나 활용할 개념들이 잘 드러나지 않아 보인다.’라는 의견이 있었다. 하지만 ‘만족도란 생소한 용어사용이 다소 생소한 느낌을 줄 수 있으나 제시문을 이해하면 충분히 해결가능한 문제이다.’라는 의견도 있었다.
- 제시문 [라]는 2009 개정 교육과정의 <미적분Ⅰ> ‘정적분의 활용’ 단원에서 ‘곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다’의 교육과정에 해당하는 제시문이다. 교육과정의 내용과 성취기준의 내용이 같을 정도로 명확한 단원이며 제시문 [라]는 교육과정에서 요구하는 내용을 변형 없이 정의를 옮겨놓은 것이라고 답변하였다.

- 문제 [1-1]은 고등학교 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.7, 4.5로 대부분 ‘그렇다’라는 의견이다. 또한 2009 개정 교육과정의 <확률과 통계> ‘확률분포’ 단원의 이산확률변수 및 이항분포에 해당하는 질문이다. 성취기준으로는 ‘이항분포의 뜻을 알고 평균과 표준편차를 구할 수 있다.’ 에 해당한다. 문제를 풀어가기 위해서는 구슬을 얻을 확률에 해당하는 $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$의 값을 구해야 하는데, 이미 제시문 [가]에 해당 값이 나타나 있기 때문에 일반적인 교육과정을 이수하였을 때, 어렵지 않게 풀 수 있는 문항이라는 구체적인 의견도 있었다.
- 문제 [1-2]은 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.8, 4.9로 대부분 ‘그렇다’라는 의견이다. 구체적인 의견으로 ‘제시문 [가]의 내용에서 두 번째 내기의 규칙을 2개의 주사위를 24번 던졌을 때에서 25번 던지는 것으로 게임 규칙을 바꾸었는데 제시문의 값을 이용하여 확률 값을 쉽게 계산할 수 있으므로 고등학교 교육과정 범위에 해당된다고 판단된다.’라는 의견이 있었다.
- 문제 [1-3]은 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 3.9, 4.1로 대부분 ‘그렇다’라는 의견을 주었다.
- 문제 [1-4]은 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.1, 4.7로 대부분 ‘그렇다’라는 의견을 주었다. 구체적으로 ‘제시문 [나]의 이산확률변수의 기댓값을 구하는 식을 이용하면 문제에서 주어진 $E(Y)$를 구할 수 있고, 부등식을 통하여 정적분과 넓이와의 관계를 이용하면 추론할 수 있다. 그래프를 이용하면 교육과정 범위에서 충분히 해결 가능한 문제이다.’, ‘2009 개정 교육과정의 ‘확률과 통계’ 교과서에서 ‘확률분포’ 단원의 이산확률변수의 기댓값을 구하는 개념이 바탕이 된다. 그런데 기댓값이 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 $[0, 1]$구간에서 정의역을 100등분하여 구분구적법으로 넓이를 구하는 중간 과정의 형태가 등장한다. 따라서 이 식의 형태에서 자연스럽게 <미적분Ⅰ>에서의 ‘구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이를 구할 수 있다.’는 교육과정의 내용과 <미적분Ⅱ>에서의 ‘지수함수와 로그함수의 미분’ 단원의 교육과정의 내용으로 충분히 증명할 수 있는 문항이다.’라는 의견을 제시하였다.

제시문의 난이도와 문제의 난이도에 대한 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 2.2, 2.9로 ‘보통이다’와 ‘쉽다’라는 의견이 많았다. 물론 소수의견으로 문제의 난이도에서 ‘어렵다’라는 의견을 주기도 하였는데 이는 확률변수 간의 관계에 대한 경우 일차식이거나 이차 이하의 다항식들인 경우로만 제한되어 학습을 진행했기에 분수식으로 이루어진 경우 해석의 어려움이 있을 가능성도 있으며 이와 구분구적법 아이디어를 연계하여 부등식을 증명하는 과정을 사고해내기 어려웠을 가능성이 높을 것이라 생각되어 해결하는데 어려웠을 수도 있다는 의견이었다. 하지만 두 개 이상의 개념이 복합적으로 포함되었기에 적당한 난이도를 가진다고 볼 수 있고 복합된 개념들이 모두 기본적인 개념들이었기에 어렵다는 평가보다는 ‘보통’ 정도의 난이도로 평가하는 것이 바람직하다는 의견을 제시한 경우도 있었다.

5.6 채점 기준

<table>
<tr><th>하위문항</th><th>채점기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>1-1</td><td>●통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해하는지를 평가한다.</td><td rowspan="4">320점</td></tr>
<tr><td>1-2</td><td>●여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.</td></tr>
<tr><td>1-3</td><td>●함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는지, 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있는지, 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있는지를 평가한다.</td></tr>
<tr><td>1-4</td><td>●구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있는지, 함수 $y=x^{-1}$ 의 부정적분과 정적분을 구할 수 있는지, 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있는지를 평가한다.</td></tr>
</table>

<유의사항>

- 하나의 문제라도 답안지를 백지로 제출한 경우 과락 처리함.
- 문제 번호와 답안을 바꿔 작성한 경우 과락 처리함.
- 검은색 이외의 색깔 펜을 사용한 경우 과락 처리함.
- 답안이나 답안지 여백에 문제와 관계없는 불필요한 낙서나 이와 유사한 표식이 있는 경우 또는 답안 내용 중 확연히 수험생 본인을 식별할 수 있는 내용이 있는 경우 과락 처리함.

5.7 답안 사례

【1-1】

확률변수 X가 2만 번 게임에서 서강이의 구슬이 늘어난 횟수라고 하면 모든 게임이 종료된 후 서강이는 $2X$ 개의 구슬을 갖게 된다. 큰 수의 법칙에 의해 $\frac{X}{20000}$은 각 게임에서 적어도 한 번 6이 나올 확률 0.518의 어림값이므로 $X \cong 0.518 \times 20{,}000 = 10{,}360$ 이다.

따라서 모든 게임이 종료된 후 서강이는 대략 $10{,}360 \times 2 = 20{,}720$ 개의 구슬을 가지고 있게 된다.

【1-2】

2개의 주사위를 25번 던지는 두 번째 방식의 내기에서

한 번도 $(6,6)$이 나오지 않을 확률은 $\left(\frac{35}{36}\right)^{25} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \times \frac{35}{36}$ 이고,

제시문 으로부터 $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.509 < 0.510$ 이므로, $\left(\frac{35}{36}\right)^{25} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \times \frac{35}{36} < 0.510 \times \frac{35}{36} < 0.496$ 이다.

따라서 드 메레가 내기에서 이길 확률은 $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25} > 1-0.496 = 0.504$ 이다.

그러므로 그 내기는 드 메레에게 불리하지 않다.

【1-3】

게임 종료 후 마이클의 보유 현금은 주사위가 6이 나오면 $100(1+8x)$ 달러이고 6이 나오지 않는 경우 $100(1-x)$ 달러가 된다. 따라서 그의 만족도는 주사위가 6이 나오면 $\ln(100(1+8x))$ 이고, 6이 나오지 않으면 $\ln(100(1-x))$ 의 값을 갖는 이산확률변수이다. 만족도의 기댓값을 x의 함수로 나타내면 $f(x) = \frac{1}{6}\ln(100(1+8x)) + \frac{5}{6}\ln(100(1-x))$ 이고, 이 함수를 미분하면

$$f'(x) = \frac{800}{600(1+8x)} - \frac{500}{600(1-x)} = \frac{8}{6(1+8x)} - \frac{5}{6(1-x)} = \frac{1-16x}{2(1+8x)(1-x)}$$ 이다.

따라서 방정식 $f'(x)=0$ 는 열린구간 $(0,1)$에서 $x = \frac{1}{16}$ 이라는 유일한 해를 갖는다.

$0 < x < \frac{1}{16}$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$는 증가함수이고,

$\frac{1}{16} < x < 1$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$는 감소함수이다.

따라서 마이클이 0과 1사이의 실수 $x=\frac{1}{16}$ 을 선택할 때 만족도의 기댓값은 최대가 된다.

【1-4】

X가 각각의 수 n $(n=101, 102, \cdots, 200)$ 을 가질 확률은 모두 $\frac{1}{100}$ 로 동일하므로

Y가 각각의 수 $\frac{100}{n}$ 을 가질 확률도 모두 $\frac{1}{100}$ 로 동일하고,

따라서 Y의 확률질량함수는 $P\left(Y=\frac{100}{n}\right)=\frac{1}{100}$ $(n=101, 102, \cdots, 200)$ 이다.

그러므로 $\mathrm{E}(Y)=\sum_{n=101}^{200}\frac{100}{n}\frac{1}{100}=\sum_{n=101}^{200}\frac{1}{n}$ 이다.

제시문 [라]에서 언급한 대로 $\int_{100}^{200}\frac{1}{x}dx$ 는 $y=\frac{1}{x}$ 와 x축 및 두 직선 $x=100, x=200$ 으로 둘러 싸인 도형의 넓이다. $\sum_{n=101}^{200}\frac{1}{n}$ 은 구간 $[100, 200]$ 을 100등분하여 밑변의 길이를 1로 하고 $y=\frac{1}{x}$ 의 아래에 완전히 포함되는 가장 큰 직사각형들의 넓이의 합이므로 $\sum_{n=101}^{200}\frac{1}{n}<\int_{100}^{200}\frac{1}{x}dx$ 이 성립한다.

마찬가지로 $\sum_{n=101}^{200}\frac{1}{n}$ 은 구간 $[101, 201]$ 을 100등분하여 밑변의 길이를 1로 하고 $y=\frac{1}{x}$ 을 완전히 포함하는 가장 작은 직사각형들의 넓이의 합이므로 $\int_{101}^{201}\frac{1}{x}dx<\sum_{n=101}^{200}\frac{1}{n}$ 이 성립한다.

$\int_{101}^{201}\frac{1}{x}dx=\ln\frac{201}{101}$ 이고 $\int_{100}^{200}\frac{1}{x}dx=\ln 2$ 이므로, $\ln\frac{201}{101}<E(Y)<\ln 2$ 이다.

6. 문항카드 6 – 자연계열 논술고사 2

6.1 일반정보

유형		논술고사	
전형명		논술전형	
해당대학의 계열(과목)/문항번호		[전자공학전공/컴퓨터공학전공/수학전공] / 2번	
출제범위	교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분Ⅰ	
	핵심개념 및 용어	· 함수의 증가와 감소 · 함수의 미분계수 · 절대부등식 · 두 직선 또는 벡터의 수직 조건	
답안작성(예상소요)시간		60분	/ 100 분

6.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

[가] 함수 $f(x)$ 에서 좌극한 $\lim_{x\to a-} f(x)$ 와 우극한 $\lim_{x\to a+} f(x)$ 가 모두 존재하고 그 값이 같으면, 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$ 가 존재하고

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

이다.

[나] 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 정의되어 있고 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$ 가 존재하며 그 값이 함숫값 $f(a)$ 와 같으면, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이라고 한다.

[다] 함수 $f(x)$ 가 열린 구간 (a,b) 에서 정의되어 있다고 하자. 구간 (a,b) 의 모든 c 에 대하여 함수 $f(x)$ 의 $x=c$ 에서의 미분계수

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

가 존재하면 함수 $f(x)$ 는 열린 구간 (a,b) 에서 미분가능하다고 한다.

[라] 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a,b) 에서 미분가능하다고 하자.
열린 구간 (a,b) 의 모든 x 에 대하여
(1) $f'(x)>0$ 이면 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 증가한다.
(2) $f'(x)<0$ 이면 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 감소한다.

[마] 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고, $x=a$ 에서 극댓값 또는 극솟값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.

[문제] (글자 제한 없음)

구간 $(0,\infty)$ 에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (0<x<1) \\ 2x-1 & (x\geq 1)\end{cases}$$

에 대하여, 제시문 [가]~[마]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【2-1】 함수 $f(x)$ 가 구간 $(0,\infty)$ 에서 미분가능하고, 구간 $(0,\infty)$ 에 속하는 모든 x,a 에 대하여

$$f(x)\geq f(a)+f'(a)(x-a)$$

임을 보이시오.

【2-2】 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(x,f(x))$ 에서의 접선에 수직이며 이 점을 지나는 직선이 x 축과 만나는 점의 좌표를 $(g(x),0)$ 이라고 하자. 함수 $g(x)$ 가 구간 $(0,\infty)$ 에서 연속이고 증가하는 것을 보이시오.

【2-3】 $\alpha\geq 3$ 일 때, 점 $\mathrm{A}(\alpha,0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B 까지의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$ 가 최소가 되도록 하는 점 B 의 좌표를 구하시오.

【2-4】 $0<\alpha<3$ 일 때, 점 $\mathrm{A}(\alpha,0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B 까지의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$ 가 최소가 되도록 하는 점 B 의 x 좌표를 β 라고 하자. 이때, 부등식

$$|\beta-1|\leq\frac{2}{5}|\alpha-3|$$

이 성립함을 보이시오.

6.3 출제 의도

<수학Ⅰ>, <수학Ⅱ>, <미적분Ⅰ>에서 학습하는 미분가능성, 함수의 증가와 감소등의 기본적인 개념들의 이해도를 평가한다.

미분의 정의를 이용하여 함수의 미분가능성을 보일 수 있는지와 기본적인 절대부등식을 유도할 수 있는지를 평가한다.

미분을 이용하여 함수의 접선의 방정식과 그 접선에 수직인 방정식을 구할 수 있는지, 함수의 연속성의 개념을 정확히 이해하고 있는지, 그리고 도함수의 부호를 이용하여 함수의 증가와 감소를 결정할 수 있는지를 평가한다.

평면 위의 한 점에서 한 직선에 내린 수선의 발을 구하는 문제임을 인식하고, 두 직선의 수직 조건을 적용할 수 있는지를 평가한다. 또한, 평면 위의 한 점에서 한 포물선까지의 거리를 구하는 문제와 관련 있음을 인식하고, 다항함수가 최솟값을 가질 조건 또는 두 직선의 수직 조건을 적용할 수 있는지를 평가한다.

6.4 출제 근거

제시문	가

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	(2) 함수의 극한과 연속 (가) 함수의 극한 ①함수의 극한의 뜻을 안다
		성취기준	· 미적1211. 함수의 극한의 뜻을 안다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분 I	신항균 외	지학사	2017	55, 56		○
미적분 I	정상권 외	금성출판사	2017	56		○
미적분 I	김원경 외	비상교육	2016	51, 52		○

제시문	나

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	(2) 함수의 극한과 연속 (가) 함수의 극한 ①함수의 극한의 뜻을 안다
		성취기준	· 미적1211. 함수의 극한의 뜻을 안다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분 I	신항균 외	지학사	2017	67, 68		○
미적분 I	정상권 외	금성출판사	2017	67		○
미적분 I	김원경 외	비상교육	2016	63, 64		○

제시문	다

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	(3) 다항함수의 미분법 (가) 미분계수 ① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. ② 미분계수의 기하학적 의미를 안다.
		성취기준	· 미적1311/1312. 미분계수의 뜻과 기하학적 의미를 알고, 그 값을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부

미적분 I	신항균 외	지학사	2017	91		○
미적분 I	정상권 외	금성출판사	2017	94, 95		○
미적분 I	김원경 외	비상교육	2016	83		○

제시문	라

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	(3) 다항함수의 미분법 (가) 미분계수 ① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. ② 미분계수의 기하학적 의미를 안다.
		성취기준	· 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분 I	신항균 외	지학사	2017	115~117		○
미적분 I	정상권 외	금성출판사	2017	125, 126		○
미적분 I	김원경 외	비상교육	2016	104~106		○

제시문	마

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	(3) 다항함수의 미분법 (가) 미분계수 ① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. ② 미분계수의 기하학적 의미를 안다.
		성취기준	· 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분 I	신항균 외	지학사	2017	118, 119		○
미적분 I	정상권 외	금성출판사	2017	128, 129		○
미적분 I	김원경 외	비상교육	2016	108		○

문제	2-1

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	(3) 다항함수의 미분법 (가) 미분계수 ① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. ② 미분계수의 기하학적 의미를 안다.

		성취기준	· 미적1311/1312. 미분계수의 뜻과 기하학적 의미를 알고, 그 값을 구할 수 있다.
과목명	수학Ⅱ	교육과정	(1) 집합과 명제 (나) 명제 ④ 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
		성취기준	· 수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분Ⅰ	신항균 외	지학사	2017	91		○
미적분Ⅰ	정상권 외	금성출판사	2017	94		○
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2017	46, 47		○
수학Ⅱ	신항균 외	지학사	2017	56		○

문제	2-2

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분Ⅰ	교육과정	(3) 다항함수의 미분법 (가) 미분계수 ① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. ② 미분계수의 기하학적 의미를 안다.
		성취기준	· 미적1331. 접선의 방정식을 구할 수 있다. · 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
		교육과정	(3) 도형의 방정식 (나) 직선의 방정식 ② 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.
		성취기준	· 수학1322-2. 두 직선의 수직 조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분Ⅰ	신항균 외	지학사	2017	107, 115		○
미적분Ⅰ	정상권 외	금성출판사	2017	116, 125		○
수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2017	155, 156		○
수학Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2017	159, 160		○

문제	2-3

▶ 교육과정 근거

<table>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">수학 I</td><td>교육과정</td><td>(3) 도형의 방정식
(나) 직선의 방정식
② 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 수학1322-2. 두 직선의 수직조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.
· 수학1323. 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
수학 I	이준열 외	천재교육	2017	155, 156, 158, 159		○
수학 I	류희찬 외	천재교과서	2017	159, 160, 162, 163		○
수학 I	정상권 외	금성출판사	2017	151, 152, 156, 157		○

문제	2-4

▶ 교육과정 근거

<table>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">미적분 I</td><td>교육과정</td><td>(3) 다항함수의 미분법
(다) 도함수의 활용
③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">수학 I</td><td>교육과정</td><td>(3) 도형의 방정식
(나) 직선의 방정식
② 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 수학1322-2. 두 직선의 수직조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.
· 수학1323. 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">수학 II</td><td>교육과정</td><td>(1) 집합과 명제
(나) 명제
④ 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· 수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행연도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분 I	신항균 외	지학사	2017	118, 119		○
미적분 I	정상권 외	금성출판사	2017	128, 129		○
수학 I	이준열 외	천재교육	2017	155, 156, 158, 159		○
수학 I	류희찬 외	천재교과서	2017	159, 160,		○

				162, 163		
수학Ⅰ	정상권 외	금성출판사	2017	151, 152, 156, 157		○
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2017	46, 47		○
수학Ⅱ	신향균 외	지학사	2017	56		○
수학Ⅱ	정상권 외	금성출판사	2017	54, 55		○

6.5 문항 해설

6.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 [가], [나], [다], [라], [마]는 각각 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(나)함수의 극한과 연속-①함수의 극한', '미적분Ⅰ-(나)함수의 극한과 연속-②함수의 연속', '미적분Ⅰ-(다)다항함수의 미분법-①미분계수', '미적분Ⅰ-(다)다항함수의 미분법-③도함수의 활용'에 관련된 제시문이다. 대다수의 교과서에서 다루고 있는 내용이며 교과서의 내용을 변형 없이 그대로 옮겨온 것으로 고등학교 교육과정에 적합한 내용으로 판단된다.
- 문제 [2-1]은 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(다)다항함수의 미분법-③도함수의 활용'에 관련된 내용이다. 이 중에서 '①접선의 방정식을 구할 수 있다.' 와 '②함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.'를 이용하여 해결이 가능한 문제이다. 따라서 고등학교 교육과정을 충분히 이해하고 있다면 쉽게 해석이 가능하며 풀이가 가능한 문제로 생각된다.
- 문제 [2-2]는 2009 개정 교육과정 '미적분Ⅰ-(다)다항함수의 미분법-①미분계수, ②도함수, ③도함수의 활용'을 이용하여 해결하는 문제이다. 접선의 방정식에 대한 내용은 모든 교과서에서 다루고 있으며 이를 활용하여 접선의 방정식의 절편을 구하고 이 것이 연속이고 증가하는 것을 보이는 문제로 고등학교 교육과정에 적합한 내용으로 구성된 문제이다.
- 문제 [2-3]은 2009 개정 교육과정 '수학Ⅰ-(다)도형의 방정식-①평면좌표'에서 제시하고 있는 '①두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.'와 '미적분Ⅰ-(다)다항함수의 미분법-③도함수의 활용'에서 제시된 '①접선의 방정식을 구할 수 있다.', '③함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.'를 이용하여 해결이 가능하므로 교육과정에 적합한 문제로 판단된다.
- 문제 [2-4]는 문제 [2-3]과 마찬가지 교육과정 내용을 활용하여 해결이 가능하다. 다만 문제에서 제시된 부등식을 증명하는 과정이 학생들에게 어렵게 느껴질 수 있는 부분으로 보인다.

6.5.2 출제 검토 교사 의견

제시문은 교과서의 함수의 극한, 함수의 연속, 미분계수, 함수의 증가 감소, 함수의 극대 극소에 대한 정의를 그대로 인용하였다.

문제에서 사용된 내용은 평균값 정리, 접선의 방정식, 함수의 증가와 연속, 절대부등식 등 교육과정 내에서 평가할 수 있는 적절한 난이도로 구성되었다.

문제 [2-1]과 [2-2]의 경우, 고등학교 학생들이 흔히 접할 수 있는 문제이고, 문제 [2-3]과 [2-4]의 경우 한 문제로 출제할 수도 있지만 학생들을 배려하는 마음에서 $\alpha \geq 3$과 $0 < \alpha < 3$의 두 범위로 나누어 출제하였다. 문제 [2-3]과 [2-4]는 미적분을 이용하여 해결할 수도 있지만, 벡터의 내적 등 다양한 방법을 이용하여 해결할 수 있는 장점이 있다.

6.5.3 자문위원 평가 의견

- 제시문 전체에 대하여 자문교사 모두 고등학교 교육과정 범위 내에 있고 적정한 수준의 제시문이라고 판단하였다. 제시문에 대한 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 대부분 4.8 이상으로 '그렇다' 와 '매우 그렇다'라고 평가하였다. 또한 대부분의 자문교사의 의견은 교과서에 충실한 내용을 활용하여 제시문을 구성하여 고등학교 교육과정을 이수한 학생이라면 충분히 이해가 가능한 수준이라고 응답하였다.

- 문제 [2-1]은 고등학교 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.6, 4.5로 대부분 '그렇다'라는 의견이다. 제시문 [다]의 내용과 <미적분 I >에서 배운 평균변화율과 순간변화율의 개념을 이해하고 있으면 문제에서 정의된 함수의 그래프를 통해 쉽게 해결할 수 있는 문항으로 고등학교 교육과정 범위에 해당된다는 구체적인 의견이 있었다. 또한 2009 개정 교육과정의 <미적분Ⅱ>에서 '여러 가지 미분법' 단원의 '이계도함수를 구할 수 있다.'는 교육과정의 내용을 학습한 학생들은 쉽게 접근할 수 있는 문제이며 문제를 풀어가기 위해서 구간에 따라 도함수와 이계도함수를 구한 후, $f(x)$함수가 항상 아래로 볼록한 함수임을 보이면, 주어진 식이 항상 성립함을 즉시 알 수 있는 평이한 문항이라는 의견이 있었다.
- 문제 [2-2]은 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.7, 4.8로 대부분 '그렇다'라는 의견이다. 구체적인 의견은 다음과 같다. 2009 개정 교육과정의 <미적분 I >에서 '도함수의 활용' 단원의 다양한 교육과정 내용이 종합적으로 평가되는 문항이다. 먼저 '접선의 방정식을 구할 수 있다.'는 성취기준을 활용하여 접선의 x절편을 구하여, 이후 구해진 $g(x)$를 미분하여 $g'(x)>0$을 통해 함수가 항상 증가함을 보일 수 있다. 여러 가지 개념을 묻고 있지만 주어진 함수가 다항함수이고 기본적인 개념들을 평가하고 있기에 교과서를 충실하게 학습한 학생들이라면 차근차근 문제에 접근하여 쉽게 풀 수 있는 내용으로 판단된다.
- 문제 [2-3]은 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.7, 4.6로 대부분 '그렇다'라는 의견을 주었다. 구체적인 의견은 다음과 같다. 2009 개정 교육과정의 <수학 I >에서 '직선의 방정식' 단원의 '점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.'는 교육과정이 핵심 개념이 되는 문항이다. 곡선 외부의 한 점과 곡선위의 한 점 사이의 거리의 최솟값은 두 점을 이은 직선이 접선과 수직일 때이므로 문제 [2-2]에서 구한 함수를 이용하여 구할 수 있다. 이때 최솟값을 구하는 과정은 미분을 이용하여 극값을 구하면 되고 이는 제시문 [마]를 이용하여 해결할 수 있으므로 교육과정을 준수하였다.
- 문제 [2-4]은 교육과정 범위와 수준에 부합하는가라는 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 4.4, 4.3로 대부분 '그렇다'라는 의견을 주었다. 구체적으로 2009 개정 교육과정의 <미적분 I >에서 '도함수의 활용' 단원의 '접선의 방정식을 구할 수 있다.'는 교육과정이 핵심 개념이 되는 문항이다. 이를 활용하여 α와 β의 관계식을 구한 후에는 주어진 식에 관계식을 대입한 후, 주어진 범위에서 다항함수의 개형을 그려 절대부등식을 만족함을 보이면 된다. 다항함수의 개형을 그릴 때에는 역시 <미적분 I >의 '도함수의 활용' 단원의 '함수의 그래프의 개형을 구할 수 있다.'는 교육과정을 사용하면 충분하다. 제시문 [라]를 활용하고, 교육과정에서 최댓값과 최솟값구하기 문제를 이용하면 어렵지 않게 접근이 가능한 문제이며 접선의 방정식에 대한 교육과정내의 내용과 문제 [2-3]의 해결과정을 잘 이용한다면 충분히 해결할 수 있는 문항이라 판단된다는 의견을 주었다.

제시문의 난이도와 문제의 난이도에 대한 질문에 5점 척도 가중평균이 각각 1.8, 2.9로 '보통이다'와 '쉽다'라는 의견이 많았다. 물론 소수의견으로 문제의 난이도에서 '어렵다'라는 의견을 주었으며 구체적으로 다음과 같다. '교과서에서 접하는 단순한 평균값 정리를 변형한 부등식 표현의 경우 고등학교 과정에서는 자주 다루지 않는 내용이기 때문에 생소할 수 있을 것이라 생각된다. 또한 제시된 문항들이 유기적으로 출제되어 앞 문항의 풀이과정을 잘 이용해야 하는 경우이므로 다소 어렵게 느낄 가능성이 있다.' 하지만 '문제 [2-1]~[2-3]까지는 문제해결과정과 난이도가 다소 쉬워 고교 교육과정의 기본 개념에 충실한 학생이라면 누구나 쉽게 접근할 수 있는 문제이다. 문제 [2-4]는 주어진 두 문자의 관계식을 함수로 해석하여 평균변화율과 아래로 볼록한 함수의 성질을 해석하는 증명 문제로 다소 난이도가 높다. 하지만 고교 교육과정 내에서는 학교에서도 위와 같은 부등식의 증명 문제를 많이 다루고 있고, 관계식을 함수로 재해석하는 과정이 많기에 고등학교 교육과정에 충실한 학생이라면 접근할 수 있는 문제로 보인다.'라는 의견을 제시하는 등 충분히 고교 교육과정으로 해결이 가능하다는 의견이 대부분이었다.

6.6 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
2-1	•미분계수의 뜻과 기하학적 의미를 알고, 그 값을 구할 수 있는지, 함수에 대한 평균값 정리를 이해하는지, 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있는지를 평가한다.	480점
2-2	•접선의 방정식을 구할 수 있는지, 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는지를 평가한다.	
2-3	•두 직선의 수직 조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있는지, 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는지, 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있는지를 평가한다.	
2-4	•함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는지, 두 직선의 수직 조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있는지, 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는지, 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있는지를 평가한다.	

<유의사항>

- 하나의 문제라도 답안지를 백지로 제출한 경우 과락 처리함.
- 문제 번호와 답안을 바꿔 작성한 경우 과락 처리함.
- 검은색 이외의 색깔 펜을 사용한 경우 과락 처리함.
- 답안이나 답안지 여백에 문제와 관계없는 불필요한 낙서나 이와 유사한 표식이 있는 경우 또는 답안 내용 중 확연히 수험생 본인을 식별할 수 있는 내용이 있는 경우 과락 처리함.

6.7 답안 사례

【2-1】

함수 $f(x)$ 는 구간 $(0,1)$, $(1,\infty)$ 각각에서 미분가능하고, $0<x<1$ 이면 $f'(x)=2x$ 이고 $x>1$ 이면 $f'(x)=2$ 이다. 또한,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{x-1}=2 \quad \text{이고} \quad \lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(2x-1)-1}{x-1}=2$$

이므로 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하다. 함수 $f(x)$ 의 도함수를 정리하면,

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & (0<x<1) \\ 2 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이다. 이제 부등식을 증명한다. $a\geq 1$ 라고 가정하면 $f(a)=2a-1$, $f'(a)=2$ 이다. 따라서 $0<x<1$ 이면

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)=x^2-(2a-1)-2(x-a)=(x-1)^2\geq 0$$

이고 $x\geq 1$ 이면

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)=(2x-1)-(2a-1)-2(x-a)=0$$

이다. $0<a<1$ 일 때는 $f(a)=a^2$, $f'(a)=2a$ 이다. 따라서 $0<x<1$ 이면

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)=x^2-a^2-2a(x-a)=(x-a)^2\geq 0$$

이고 $x\geq 1$ 이면

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)=(2x-1)-a^2-2a(x-a)\geq (a-1)^2\geq 0$$

이다.

【2-2】

양의 실수 a 에 대하여, 점 $A(a,f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ 이므로 이 직선에 수직이며 점 A 를 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

이다. 이 직선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)=0$$

에서 $x=a+f(a)f'(a)$ 이다. 따라서 구하는 함수 $g(x)$ 는 아래와 같다.

$$g(x) = x + f(x)f'(x) = \begin{cases} 2x^3 + x & (0 < x < 1) \\ 5x - 2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 함수 $g(x)$는 구간 $(0,1), (1,\infty)$ 각각에서 연속이고 $\lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1+} g(x) = 3 = g(1)$ 이므로 전체 구간 $(0,\infty)$에서 연속이다. 또한, 함수 $g(x)$는 구간 $[1,\infty)$에서는 기울기가 양인 일차함수이므로 당연히 증가하고, $0 < x < 1$ 일 때 $g'(x) = 6x^2 + 1 > 0$ 이므로 $(0,1]$에서 증가한다. 따라서 함수 $g(x)$가 전체 구간 $(0,\infty)$에서 증가한다.

【2-3】

$\alpha \geq 3$ 일 때, $g(x) = \alpha$ 를 만족시키는 양의 실수 x 를 β 라고 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가하고 $g(1) = 3 \leq \alpha$ 이므로 $\beta \geq 1$ 이다. 이때 $g(\beta) = 5\beta - 2 = \alpha$ 이므로 $\beta = \dfrac{\alpha+2}{5}$ 이다.

또한, $\beta \geq 1$ 이므로 $f(\beta) = 2\beta - 1 = \dfrac{2\alpha - 1}{5}$ 이다. 좌표가 $(\beta, f(\beta))$인 점을 B라고 나타내면, 점 B는 점 A에서 직선 $y = 2x - 1$ 에 내린 수선의 발이다. 한편, $0 < x < 1$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = x^2 > 2x - 1$ 이다. 따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{C}(x, f(x))$에 대하여 $x \neq \beta$ 이면 $\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{AC}}$ 가 성립한다. 그러므로 구하는 점 B의 좌표는

$$(\beta, f(\beta)) = \left(\frac{\alpha+2}{5}, \frac{2\alpha-1}{5}\right)$$

이다.

【2-4】

$0 < \alpha < 3$ 일 때, 점 $\mathrm{A}(\alpha, 0)$에서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 B까지의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$가 최소가 되는 점 B는 포물선 $y = x^2$ 의 $0 < x < 1$ 부분에 존재한다. 포물선 $y = x^2$ 위의 임의의 점 $\mathrm{B}(x, x^2)$에 대하여 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 제곱을 $F(x)$라고 하면

$$F(x) = (x-\alpha)^2 + (x^2)^2 = x^4 + x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$$

이다. 이제, $\overline{\mathrm{AB}}$가 최소가 되는 점 B의 좌표를 β라고 하면 함수 $F(x)$가 $x = \beta$에서 최솟값을 가지므로

$$F'(\beta) = 4\beta^3 + 2\beta - 2\alpha = 0 \ ,$$

즉

$$2\beta^3 + \beta = \alpha \qquad \cdots\cdots ①$$

가 성립한다. 이 등식이 $(\alpha, \beta) = (3,1)$ 일 때도 성립하므로

$$2(1-\beta^3)+(1-\beta)=3-\alpha$$

이고, 이를 인수분해하면

$$(1-\beta)(3+2\beta+2\beta^2)=3-\alpha$$

이다. 여기서,

$$0<\alpha<3 \quad \text{이고} \quad 3+2\beta+2\beta^2 = 2\left(\beta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}$$

이므로

$$0<\frac{5}{2}(1-\beta) \leq 3-\alpha \ , \quad \text{즉} \quad 0<1-\beta \leq \frac{2}{5}(3-\alpha)$$

이다. 또한, 이 부등식은

$$3-\alpha = 3-\beta-2\beta^3 = (3+2\beta+2\beta^2)(1-\beta) \geq \frac{5}{2}(1-\beta)$$

와 같이 증명할 수도 있다.