2018학년도 서강대학교

온라인 모의논술 자료집(2차)

- 자연계열 -

서강대학교 입학처

■ 유의사항

1. 시험시간은 50분입니다.

문제

제시문들을 참고하여 다음 문제들의 답을 구하여라.

문제 1. 중심의 좌표가 $(0,c)$이고 반지름의 길이가 r인 원이 (단, $c>r>0$) 포물선 $y=x^2$과 두 점에서만 만난다고 가정하자. 가능한 실수 r의 범위를 구하고, c 를 r로 나타내어라.

문제 2. 위 문제 1의 가정을 만족하는 원들 $C_1, C_2, \cdots$을 다음과 같이 고려할 때, 영역 $\{(x,y) \mid y \le 100\}$에 포함될 수 있는 원들의 최댓수를 구하여라.

한 원을 C_1이라 하고, C_1과 한 점에서만 만나는 원을 C_2, 이를 계속하여 자연수 n에 대해 C_n과 한 점에서만 만나는 원을 C_{n+1}이라 한다. 단, C_n의 중심의 좌표를 $(0,c_n)$라 하면 $c_n < c_{n+1}$이 성립한다.

문제 3. 위 문제 1의 가정을 만족하는 원이 점 (t,t^2)에서 포물선 $y=x^2$과 만날 때, 그 원의 반지름을 $r(t)$라 하자. 부등식 $\frac{4}{3} \le 2\int_0^1 r(t)dt \le 2$ 가 성립함을 보여라.

문제 4. 포물선 $y=x^2$의 서로 다른 두 접선의 교점이 이루는 점들의 집합은 $\{(x,y) \mid y<x^2\}$ 임을 보여라.

제시문

[가] 두 실수 a,b에 대하여 부등식 $(a+b)^2 \geq 4ab$ 가 성립한다. 여기서 등호는 $a=b$일 때만 성립한다.

[나] 집합 A의 모든 원소가 집합B에 속한다면 $A \subset B$로 나타낸다. 만일 $A \subset B$이고 또한 $B \subset A$이면 집합 A와 집합 B는 서로 같다고 하고, 이것을 기호로 $A = B$로 나타낸다.

[다] 미분가능한 두 함수의 합성함수는 미분가능하다. 미분가능한 함수는 연속이다.

[라] 일반적으로 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})\,\frac{b-a}{n}$ 이 반드시 존재하며 이 극한값을 $y=f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고 $\int_a^b f(x)\,dx$로 나타낸다. 이 정의로부터, 함수 $f(x), g(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(x) \leq g(x)$이면, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$가 성립함을 알 수 있다.

[마] 평면에서 원과 포물선 $y=x^2$이 만난다면, 최대 4개의 교점을 가질 수 있다. 어떤 위치관계에서는 단 두 점에서 만나는 경우도 있다.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 함수의 그래프 곡선에 대한 접선의 방정식 및 그 접선에 수직인 직선의 방정식을 원활히 다루는 지를 평가
· 포물선과 원, 그리고 원과 원이 만나는 기하적인 내용을 수식으로 어떻게 전환하고 분석해 내는가를 평가
· 이차방정식의 판별식을 논리에 맞추어 활용하는지를 평가
· 절대부등식을 원활히 사용할 수 있는지를 평가
· 집합 사이의 포함관계를 명확히 이해하고 추론하는지를 평가
· 급수를 다루는 것을 평가
· 이차방정식의 근과 계수의 관계를 숙지하는지를 평가

2. 문항해설

제시문 [가]는 2009 개정교육과정 “[수학 II]-[가] 집합과명제 – 2. 명제 – 03. 명제의 증명”에 해당하며, 어떤 절대부등식을 서술하였다.
제시문 [나]는 2009 개정교육과정 [수학 II]- [가] 집합과명제 – 1. 집합– 02. 집합 사이의 포함관계에 나오는 기본적인 정의를 서술하였다.
제시문 [다]는 2009 개정교육과정 “[미적분 II]-[다] 미분법-1. 여러가지 미분법 -02 합성함수의 미분법”와 “[미적분 I]-[다] 다항함수의 미분법-③ 미분계수와 도함수-02 미분계수”에 해당한다.
미분가능한 두 함수의 합성함수는 미분가능하며, 또 미분가능한 함수는 연속임을 서술하였다.
제시문 [라]는 2009 개정교육과정 “[미적분 I]-[라] 다항함수의 적분법-2. 정적분- 03 정적분”에 해당한다. 폐구간에서 정의된 연속함수는 적분가능함과, 이로부터 적분에 대한 기본부등식을 서술하였다.
제시문 [마]는 2009 개정교육과정 “[수학 I]-[나] 방정식과 부등식 – ② 이차방정식과 이차함수 – 02 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계”에 나오는 포물선과, “[수학 I] - [다] 도형의 방정식 - 3. 원의 방정식 - 01 원의 방정식”에 나오는 원에 대하여 일반적인 위치관계의 상태를 설명하였다.

문제 [1]은 원과 포물선이라는 두 도형이 만나는 경우를 어떻게 이해하고 분석할 지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[수학 I] - [다] 도형의 방정식 - 3. 원의 방정식 - 01 원의 방정식”에서 `이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다‘고 명시하고 있으며, “[수학 I] - [다] 도형의 방정식 - 3. 원의 방정식 - 01 원의 방정식”에서 `원의 방정식을 구할 수 있다’ 그리고 `좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.‘고 명시하고 있다.
원과 포물선이 만난다는 것을 수식으로 표현하면 x^2에 대한 이차방정식이 되어, 이를 분석하는 데 있어서 판별식을 이용하여 필요한 결론을 얻는지를 평가한다. “[수학 I] - [나] 방정식과 부등식 - 1. 복소수와 이차방정식 - 04. 이차방정식의 판별식”에서는 `이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.‘라고 명시하고 있다.

문제 [2]는 문제 [1]을 연장해서, 여러 개의 원이 만나는 기하적인 내용을 수식으로 어떻게 전환하고 분석해내는가를 평가한다. 또한 급수를 다루는 것도 포함된다.
 2009 개정교육과정 “[수학II] - [다] 수열- [2] 수열의 합 - 여러 가지 수열의 합”에서 ‘여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.‘고 명시하고 있다. 기하적인 내용 조건을 부등식으로 바꾸어 자연수 해를 구해 내는 능력을 평가한다.

문제 [3]은 문제 [1]과 마찬가지로 원과 포물선 $y=x^2$이 접할 때, 접선의 식을 구하고, 또 접선에 수직인 직선의 식을 구하여 원의 반지름을 구해낼 수 있는지를 평가하고, 또 그 반지름 함수에 대한 절대부등식을 도출하여 적분에 응용할 수 있는가를 평가한다.
 2009 개정교육과정 “[미적분 I]-[다] 다항함수의 미분법-③ 도함수의 활용”에서 `접선의 방정식을 구할 수 있다‘라고 명시하고 있고. “[수학I] - [다] 도형의 방정식 - [2] 직선의 방정식 - 2. 두 직선의 평행과 수직”에서 `두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다‘ 라고 명시하고 있다. 반지름함수 $\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}$는 제시문 [다]에 의해 연속이므로 정적분을 고려할 수 있되, 실제 적분을 하는 것이 아니라 $\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}$에 대한 절대 부등식을 생각하는 능력을 평가한다. 실제로, “[미적분 II]-[다] 미분법-1. 여러가지 미분법 -03 역함수의 미분법”에서 `무리함수의 미분은 역함수의 미분에서 다룬다‘고 명시하고 있고, “[수학 II] - [가] 집합과 명제 - 2. 명제 - 03. 명제의 증명”에서 `절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다‘라고 명시하고 있다.

문제 [4]는 접선의 식과 절대부등식을 원할히 사용할 수 있는지와, 또 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 집합 사이의 포함관계를 명확히 이해하고 추론하는지를 평가한다.
 2009 개정교육과정 “[미적분 I]-[다] 다항함수의 미분법-③ 도함수의 활용”에서 `접선의 방정식을 구할 수 있다‘라고 명시하고 있고, “[수학 II] - [가] 집합과 명제 - 2. 명제 - 03. 명제의 증명”에서 `절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다‘라고 명시하고 있으며, “[수학 I] - [나] 방정식과 부등식 - 1. 복소수와 이차방정식 - 04. 이차방정식의 근과 계수의 관계”에서 ‘이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이해 한다’고 명시하고 있고, “[수학 II]-[가] 집합과 명제 - 1. 집합- 02. 집합 사이의 포함관계“에서 `두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.‘라고 명시하고 있다.

3. 채점기준

1. 원과 포물선이라는 두 도형이 만나는 경우를 어떻게 이해하고 분석할 지를 평가한다. 이차방정식의 판별식을 논리에 맞추어 활용하는지를 평가한다.
2. 여러 개의 원이 만나는 기하적인 내용을 수식으로 어떻게 전환하고 분석해내는가를 평가한다. 또한 급수를 다루는 것도 평가한다.
3. 접선의 식과, 그 접선에 수직인 직선의 식을 구하여 원의 반지름을 구하는 지를 평가하고, 또 그 반지름에 대한 절대부등식을 도출하여 적분에 응용할 수 있는가를 평가한다.
4. 접선의 식과 절대부등식을 원할히 사용할 수 있는지와, 또 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 집합 사이의 포함관계를 명확히 이해하고 추론하는지를 평가한다.

4. 예시답안 및 예시답안에 대한 근거

<u>문제 1.</u> 원은 $x^2+(y-c)^2=r^2$이므로 원과 포물선의 교점의 x좌표는 $x^2+(x^2-c)^2=r^2$ 을 만족한다.

이 식은 $X=x^2$에 대한 이차방정식으로 볼 수 있다. 이 이차 방정식 $X+(X-c)^2=r^2$ 즉, $X^2+(1-2c)X+c^2-r^2=0$의 근은 $X=\frac{1}{2}\{2c-1\pm\sqrt{(1-2c)^2-4(c^2-r^2)}\}$. 방정식의 판별식이 음이면 아무 실수 해가 없다. 즉, 교점이 없다.

$c>r>0$이므로 $(2c-1)^2>(1-2c)^2-4(c^2-r^2)$, 따라서 판별식이 양이고 $2c-1>0$이면 X는 두 개의 양의 실근을 가지고 x는 4개의 실수 값을 가지며, 교점은 4개가 된다. 판별식이 양이고 $2c-1<0$이면 X는 음의 실근만을 가지고 교점은 없다. 판별식이 0일 때, $X=\frac{1}{2}(2c-1)$. $2c-1\le 0$이면 교점은 두 개가 될 수 없다. 판별식이 0일 때 $2c-1>0$이면 X가 한 개의 양수이며 교점은 두 개다. 즉, 두 점에서만 만나는 경우는 판별식이 0이고 $2c-1>0$일 때이다. $(1-2c)^2-4(c^2-r^2)=0$. 이로부터 $c=r^2+\frac{1}{4}$. $c>\frac{1}{2}$이므로 r의 범위는 $r>\frac{1}{2}$이다.

별해. $c>r>0$이고 두 점에서만 만나므로 그 두 점에서는 접하게 된다. 양수 t에 대하여 점 (t,t^2)에서 포물선의 접선의 식은 $y=2t(x-t)+t^2$ 이고 법선은 $y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}+t^2$ 이다. 이 법선의 y절편은 $\frac{1}{2}+t^2$ 이고 이 값이 c가 된다.

$c=\frac{1}{2}+t^2>\frac{1}{2}$. 따라서 c의 범위는 $\frac{1}{2}<c<\infty$. 반지름 r은 중심 $(0,c)=(0,\frac{1}{2}+t^2)$와 점 (t,t^2)사이의 거리 $\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}$이다. 따라서 $c=r^2+\frac{1}{4}$. $c>\frac{1}{2}$이므로 r의 범위는 $r>\frac{1}{2}$이다.

<u>문제 2.</u> C_n의 반지름을 r_n이라 하고, 원점에서 C_n의 중심까지의 거리를 d_n이라 하면, $d_n=r_n^2+\frac{1}{4}$.

C_n과 C_{n+1}이 내접하는 관계를 보면, $d_n+r_n+r_{n+1}=d_{n+1}$. 따라서,

$r_n^2+\frac{1}{4}+r_n+r_{n+1}=r_{n+1}^2+\frac{1}{4}$, 즉 $r_n+r_{n+1}=(r_{n+1}-r_n)(r_{n+1}+r_n)$.

$1=r_{n+1}-r_n$를 얻는다. 따라서, $n-1=r_n-r_1$ 이고

$r_2+r_3+\cdots+r_n=(n-1)r_1+\frac{n(n-1)}{2}$.

$2r_1+2r_2+\cdots+2r_n\le 100$ 되어야 하므로 $r_1+r_2+\cdots+r_n=nr_1+\frac{n(n-1)}{2}\le 50$.

r_1은 $\frac{1}{2}$로 가까이 갈 수 있으므로 $\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2}<50$. 따라서 $n<10$. 최댓수는 9개이다.

<u>문제 3.</u> 점 (t,t^2)에서 $y=x^2$곡선에 대한 접선의 기울기는 $2t$이므로, 점 (t,t^2)를 지나고 접선에 수직인 직선의 식은 $y-t^2 = -\frac{1}{2t}(x-t)$. 이 직선의 y축과 만나는 점은 $(0,\ \frac{1}{2}+t^2)$이다. 이 점과 (t,t^2) 사이의 거리는 $r(t)=\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}$이다. 제시문 [가]로부터 $(a=1,\ b=4t^2)$ $t>0$일때
$2\sqrt{t}\le\sqrt{1+4t^2}$가 성립한다. 또한 $1+4t^2\le(1+2t)^2$이므로,
$\frac{4}{3}=\int_0^1 2\sqrt{t}\,dt \le \int_0^1\sqrt{1+4t^2}\,dt \le \int_0^1(1+2t)\,dt = 2.$

<u>문제 4.</u> (a,a^2)에서의 접선은 $y=2ax-a^2$. (b,b^2)에서의 접선 $y=2bx-b^2$과의 교점은 $x=\frac{a+b}{2}$, $y=ab$ 이므로 제시문 [가]로부터 $x^2\ge y$를 만족한다. $a\ne b$이므로 $x^2>y$를 얻는다.
역으로, $x^2>y$를 만족하는 임의의 (x,y)에 대해, 2차 방정식 $X^2-2xX+y=0$은 ($x^2>y$조건으로부터) 두 실수해 $a,\ b$를 가짐을 알 수 있다. 즉, $x=\frac{a+b}{2}$, $y=ab$를 만족하는 $a,\ b$가 존재한다. 따라서 $x^2>y$를 만족하는 임의의 (x,y)는 이렇게 얻은 (a,a^2)에서의 접선과 (b,b^2)에서의 접선의 교점이다.
따라서, 서로 다른 두 접선의 교점이 이루는 점들의 집합은 $\{(x,y)\mid y<x^2\}$과 같다.