2018학년도 서강대학교

온라인 모의논술 자료집

- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

■ 유의사항

1. 시험시간은 50분입니다.

문제

<u>문제 1.</u> a, b가 서로 다른 양의 실수이다. 부등식

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n+b^n}{2}$$

이 2이상의 임의의 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보여라.

<u>문제 2.</u> a, b가 $a<b$인 실수이고 n이 2의 배수인 자연수이다. $0<t<1$인 임의의 실수 t에 대하여, 부등식

$$\{(1-t)a+tb\}^n < (1-t)a^n+tb^n$$

이 성립함을 제시문 [가]를 이용하여 보여라.

<u>문제 3.</u> 제시문 [다]로부터 <u>어떤 구간에서 이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$가 이 구간의 모든 x에 대하여 $f''(x)>0$이면, 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다</u>는 것을 알았다. 이 명제의 역이 성립하는지를 조사하여라.

<u>문제 4.</u> 서로 다른 양의 실수 x, y에 대하여 부등식

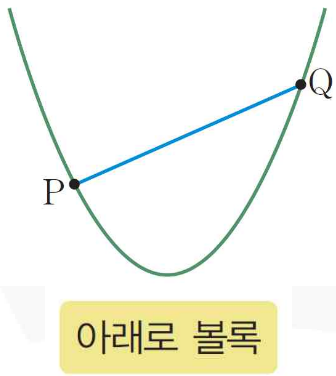
$$(x+y)\ln(x+y) < x\ln x + y\ln y + (x+y)\ln 2$$

이 성립함을 보여라.

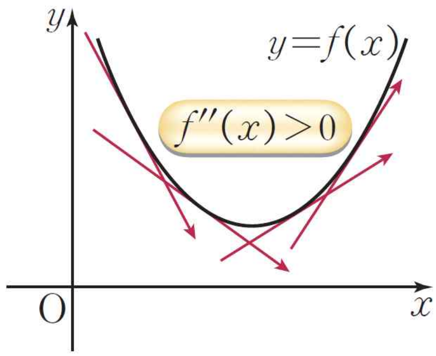
제시문

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다. 이 명제의 역은 성립하지 않는다. 예를 들어, 삼차함수 $f(x)=x^3$은 실수 전체의 집합에서 증가하지만 도함수가 $f'(x)=3x^2$이므로 $x=0$에서의 미분계수가 $f'(0)=0$이다. 또한, 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[나] 어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.



[다] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 이계도함수를 가지고 이 구간의 모든 x에 대하여 $f''(x)>0$이면, 그 구간에서 $f'(x)$가 증가하므로 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기도 증가한다. 따라서 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.



▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 함수의 일계도함수의 부호를 이용하여 함수의 증감을 판별할 수 있는지를 평가
· 함수의 이계도함수의 부호를 이용하여 함수의 볼록성을 판별할 수 있는지를 평가
· 증가함수 또는 볼록함수의 개념과 부등식의 관련성을 이해하는지를 평가
· 적절한 함수의 일계도함수 또는 이계도함수를 이용하여 여러 가지 부등식을 유도할 수 있는지를 평가
· 수학적 귀납법을 이용하여 모든 자연수에 대하여 성립하는 부등식을 증명할 수 있는지를 평가

2. 문항해설

제시문 [가]는 2009 개정교육과정 “[미적분 I]-[다] 다항함수의 미분법-③ 도함수의 활용”와 “[미적분 II]-[다] 미분법-② 도함수의 활용”에 해당하는 제시문이다. 함수의 증가와 감소를 그 함수의 도함수의 부호를 조사하여 판정하는 방법을 서술하였다.

제시문 [나]는 2009 개정교육과정 “[미적분 II]-[다] 미분법-② 도함수의 활용”에 해당하는 제시문이다. 함수가 아래로 볼록(또는 아래로 오목)하다는 것이 무엇을 의미하는지를 서술하였다.

제시문 [다]는 2009 개정교육과정 “[미적분 II]-[다] 미분법-② 도함수의 활용”에 해당하는 제시문이다. 함수의 볼록을 그 함수의 이계도함수의 부호를 조사하여 판정하는 방법을 서술하였다.

문제 [1]은 수학적 귀납법을 이용하여 2이상의 모든 자연수에 대하여 성립하는 부등식을 증명할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[수학 II]-[가] 집합과 명제-② 명제”에서 ‘절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다’라고 명시하고 있으며, “[수학 II]-[다] 수열-③ 수학적 귀납법”에서 ‘수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다’라고 명시하고 있다. 전형적인 수학적 귀납법을 적용하여 2이상의 모든 자연수에 대하여 성립하는 부등식을 증명하는 문항이다.

문제 [2]은 미분법을 활용하여 유용한 부등식을 유도할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[수학 II]-[가] 집합과 명제-② 명제”에서 ‘절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다’라고 명시하고 있으며, “[미적분 I]-[다] 다항함수의 미분법-③ 도함수의 활용”에서 ‘함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.’, ‘함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다’와 ‘방정식과 부등식에 활용할 수 있다’라고 명시하고 있다. 또한, “[미적분 II]-[다] 미분법-② 도함수의 활용”에서 ‘방정식과 부등식에 활용할 수 있다’라고 명시하고 있다. 부등식에 나오는 여러 가지 변수들 중에서 하나를 정하여 이 변수에 대한 다항함수를 생각하여 제시문 [가]에서 주어진 도함수의 부호를 이용한 함수의 증가와 감소를 판별

하는 방법을 적용하면 원하는 부등식을 증명할 수 있다.

문제 [3]은 주어진 명제의 역을 이해하고 그 역의 참과 거짓을 판별할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 "[수학 II]-[가] 집합과 명제-② 명제"에서 '명제의 역과 대우를 이해한다'라고 명시하고 있다. 문제 [3]에서 주어진 명제의 역을 이해하고 제시문 [나]와 문제 [2]를 활용하여 그 역이 참인지 거짓인지를 판별한다.

문제 [4]는 미분법을 활용하여 유용한 부등식을 유도할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 "[수학 II]-[가] 집합과 명제-② 명제"에서 '절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다'라고 명시하고 있으며, "[미적분 II]-[다] 미분법-② 도함수의 활용"에서 '방정식과 부등식에 활용할 수 있다'라고 명시하고 있다. 또한, "[미적분 II]-[가] 지수함수와 로그함수-② 지수함수와 로그함수의 미분"에서 '지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다'라고 명시하고 있다. 부등식과 관련하여 로그를 포함한 함수를 생각하여 제시문 [다]에서 주어진 이계도함수의 부호를 이용한 함수의 볼록과 오목을 판별하는 방법을 적용한 다음, 제시문 [나]에서 주어진 볼록함수의 정의를 이용하면 원하는 부등식을 증명할 수 있다.

3. 채점기준

1-1
수학적 귀납법의 형식을 정확히 사용하여 부등식을 증명하였는지를 평가한다.

1-2
함수의 일계도함수의 부호를 이용하여 그 함수의 증가 또는 감소를 판단할 수 있는지를 평가한다.

1-3
명제의 역의 참 또는 거짓을 판단하기 위해 증명 또는 반례를 이용할 수 있는가를 평가한다.

1-4
제시문에서 주어진 사실들을 적절히 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

4. 예시답안 및 예시답안에 대한 근거

<u>문제 1.</u> $n=2$일 때,

$$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{4}>0$$

이다. 2이상의 자연수 n에 대하여

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{a^n+b^n}{2}$$

이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}&=\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&>\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}-\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&=\frac{(a^n-b^n)(a-b)}{4}\end{aligned}$$

이다. 여기서 함수 $g(x)=x^n$이 양의 실수 전체의 집합에서 증가함수이므로 $a>b$이면 $a^n>b^n$이고 반대로 $a<b$이면 $a^n<b^n$이다. 따라서

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}>\frac{(a^n-b^n)(a-b)}{4}>0$$

이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 주어진 부등식이 2이상의 임의의 자연수 n에 대하여 성립한다.

<u>문제 2.</u> $0<t<1$인 실수 t를 고정시키고, 실수 전체의 집합에서 정의된 다음의 함수를 생각하자.

$$f(x)=(1-t)a^n+tx^n-\{(1-t)a+tx\}^n \quad (-\infty<x<\infty)$$

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 미분가능하고

$$f'(x)=ntx^{n-1}-nt\{(1-t)a+tx\}^{n-1}=nt\left[x^{n-1}-\{(1-t)a+tx\}^{n-1}\right]$$

이다. 한 편, n이 짝수이므로 $n-1$은 홀수이고 따라서 다항함수 $g(x)=x^{n-1}$은 실수 전체의 집합에서 증가함수이다. 그러므로 $x>a$이면 $x>(1-t)a+tx$이므로 $f'(x)>0$이다. 제시문 [가]에 의하여 다항함수 $f(x)$가 구간 (a,∞)에서 증가하고 $b>a$이므로 $f(b)>f(a)=0$이 성립한다.

<u>문제 2의 다른 풀이.</u> 실수 전체의 집합에서 정의된 다음의 함수를 생각하자.

$$f(t)=(1-t)a^n+tb^n-\{(1-t)a+tb\}^n \quad (-\infty<t<\infty)$$

함수 $f(t)$는 다항함수이므로 미분가능하고

$$f'(t)=b^n-a^n-n\{(1-t)a+tb\}^{n-1}(b-a)$$

이다. 평균값정리에 의해서

$$b^n-a^n=nc^{n-1}(b-a)$$

인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다. 따라서 임의의 실수 t에 대하여

$$f'(t) = n\left[c^{n-1} - \{(1-t)a + tb\}^{n-1}\right](b-a)$$

로 쓸 수 있다. 한 편, n이 짝수이므로 $n-1$은 홀수이고 따라서 다항함수 $g(x) = x^{n-1}$은 실수 전체의 집합에서 증가함수이다. 그러므로 $t < t_0 = (c-a)/(b-a)$이면 $(1-t)a + tb < c$이므로 $f'(t) > 0$이고 마찬가지로 $t > t_0$이면 $f'(t) < 0$이다. 제시문 [가]에 의하여 함수 $f(t)$는 구간 $[0, t_0)$에서 증가하고 구간 $(t_0, 1]$에서는 감소하므로, $0 < t < t_0$이면 $f(t) > f(0) = 0$이고 $t_0 < t < 1$이면 $f(t) > f(1) = 0$이다. 또한, 함수 $f(t)$가 $t = t_0$에서 연속이고 $(0, t_0)$에서 증가하므로 $f(t_0) = \lim_{t \to t_0 -} f(t) > 0$이다. 따라서 $0 < t < 1$인 임의의 실수 t에 대하여 $f(t) > 0$이 성립한다.

<u>문제 3.</u> 문제 [2]와 제시문 [나]로부터 사차함수 $f(x) = x^4$의 그래프가 아래로 볼록하다는 것을 알 수 있다. 그러나 $f''(x) = 12x^2$이므로 $f''(0) = 0$이다. 따라서 주어진 명제의 역은 성립하지 않는다.

<u>문제 4.</u> 함수 $f(x) = x\ln x$에 대하여

$$f'(x) = \ln x + 1,\ f''(x) = \frac{1}{x}$$

이므로 모든 양의 실수 x에 대하여 $f''(x) > 0$이다. 따라서 제시문 [다]에 의하여 함수 $f(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다. 그러므로 서로 다른 양의 실수 x, y에 대하여

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

즉,

$$\frac{x+y}{2}\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{x\ln x + y\ln y}{2}$$

가 성립한다. 이를 정리하면,

$$(x+y)\ln(x+y) < x\ln x + y\ln y + (x+y)\ln 2$$

을 얻는다.

<u>문제 4의 다른 풀이.</u> 양의 실수 t에 대한 함수 $f(t) = t\ln t + (t+1)\ln 2 - (t+1)\ln(t+1)$에 대하여

$$f'(t) = \ln t + \ln 2 - \ln(t+1) = \ln\left(\frac{2t}{t+1}\right)$$

이므로 $t > 1$이면 $f'(t) > 0$이고 $0 < t < 1$이면 $f'(t) < 0$이다. 제시문 [가]에 의하여 함수 $f(t)$가 구간 $(1, \infty)$에서 증가하고 구간 $(0, 1)$에서 감소하므로, 1이 아닌 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) > f(1) = 0$가 성립한다. 임의의 서로 다른 양의 실수 x, y에 대하여 $x/y \neq 1$이므로 부등식 $f(x/y) > 0$이 성립하고 이를 정리하면 원하는 부등식을 얻는다.