4. 자연계열 논술고사

4.1 자연계열 논술고사 1

4.1.1 문항 및 제시문

[제시문]

[가] 함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가진다고 한다. 또한, $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가진다고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

[나] (최대・최소 정리)

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 $[a, b]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

[다] (적분과 미분의 관계)

함수 $f(t)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \ \ (\text{단, } a < x < b)$$

가 성립한다.

[문제]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\,(e^x - 1)\cos\dfrac{1}{x} & (x \ne 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

에 대하여 제시문 [가]-[다]를 참고하여 다음 물음에 답하여라.

【1-1】 함수 $f(x)$의 $x=0$에서의 미분가능성을 조사하여라.

【1-2】 $x \le -\dfrac{1}{2\pi}$일 때, 부등식 $f(x) < 0$을 풀어라.

【1-3】 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여 열린 구간 $\left(\dfrac{2}{(2n+1)\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right)$에 속하는 적어도 n개의 점에서 극값을 가짐을 보여라.

【1-4】 두 함수 $g(x)=(x-1)e^{x-1}$ 과 $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ 의 그래프는 점 $(1,0)$ 에서 만난다. 이 점에서 $y=g(x)$ 의 그래프에 접하는 접선과 $y=F(x)$ 의 그래프에 접하는 접선이 이루는 각의 크기를 θ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하자. $f(1)=\alpha$ 라고 할 때, $\cos 2\theta$ 를 α 에 대한 식으로 나타내어라.

4.1.2 교육과정 근거 및 자료 출처

< 표 4-11 > 문항카드 1번 - 전자공학전공/컴퓨터공학전공/수학전공

<table>
<tr><td colspan="3">모집단위</td><td colspan="4">전자공학전공/컴퓨터공학전공/수학전공</td></tr>
<tr><td colspan="3">문항번호</td><td colspan="4">1번</td></tr>
<tr><td colspan="4">출제범위</td><td>교과 과목명</td><td>교과별 교육과정</td><td>교육과정 준수 여부</td></tr>
<tr><td rowspan="5">계열 및 교과</td><td rowspan="3">인문 사회</td><td>국어</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>사회</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>도덕</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">수학</td><td>○</td><td>미적분I, 미적분II</td><td>교육과학기술부 고시 제2011-361호</td><td>준수</td></tr>
<tr><td colspan="2">기타</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">교과 외</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">핵심개념 및 용어</td><td colspan="4">· 함수의 미분가능성
· 지수함수의 극한
· 삼각함수의 극한
· 삼각함수를 포함한 부등식
· 지수함수의 성질
· 극값의 정의
· 최대 · 최소 정리
· 접선의 기울기
· 곱의 미분법
· 적분과 미분의 관계
· 두 직선이 이루는 각
· 삼각함수의 덧셈 정리</td></tr>
<tr><td colspan="3">답안작성(예상소요)시간</td><td colspan="3">40분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

제시문	가

▶ 교육과정 근거

<table>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">미적분I</td><td>교육과정</td><td>교육과학기술부 고시 제2011-361호</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· ㈐ 다항함수의 미분법 - 3 도함수의 활용
③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분I	신항균 외	지학사	2016	118		X
미적분I	류희찬 외	천재교과서	2016	128		X

제시문	나

▶ 교육과정 근거

<table>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">미적분 I</td><td>교육과정</td><td>교육과학기술부 고시 제2011-361호</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· ㈏ 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
② 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분I	신항균 외	지학사	2016	74		X
미적분I	우정호 외	동아출판	2016	91		X

제시문	다

▶ 교육과정 근거

과목명			
과목명	미적분I	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· ㈑ 다항함수의 적분법 - [2] 정적분 ② 정적분의 뜻을 안다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분I	김원경 외	비상교육	2016	146		X
미적분I	신항균 외	지학사	2016	158		X

문제	1-1

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분I	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· ㈏ 함수의 극한과 연속 - [1] 함수의 극한 ② 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다. · ㈐ 다항함수의 미분법 - [1] 미분계수 ① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
과목명	미적분II	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· ㈎ 지수함수와 로그함수 - [2] 지수함수와 로그함수의 미분 ① 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있다. · ㈏ 삼각함수 - [2] 삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분I	김원경 외	비상교육	2016	53,83		X
미적분I	류희찬 외	천재교과서	2016	62,101		X
미적분II	이준열 외	천재교육	2016	36,97		X
미적분II	우정호 외	동아출판	2016	45,109		X

문제	1-2

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분II	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· ㈎ 지수함수와 로그함수 - [1] 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 ③ 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. · ㈏ 삼각함수 - [1] 삼각함수의 뜻과 그래프 ③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부

미적분II	이준열 외	천재교육	2016	21,81		X
미적분II	김원경 외	비상교육	2016	19,69		X

문제	1-3

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분I	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· ㈏ 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속 ① 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. · ㈐ 다항함수의 미분법 - 3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분I	신항균 외	지학사	2016	74,110,118		X
미적분I	김창동 외	교학사	2016	74,114,121		X

문제	1-4

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분 I	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· ㈐ 다항함수의 미분법 - 미분계수 ① 미분계수의 기하학적 의미를 안다. · ㈐ 다항함수의 미분법 - 2 도함수 ② 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. · ㈑ 다항함수의 적분법 - 2 정적분 ② 정적분의 뜻을 안다.
과목명	미적분II	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· ㈏ 삼각함수 - 2 삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. · ㈐ 미분법 - 2 도함수의 활용 ① 접선의 방정식을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분I	김원경 외	비상교육	2016	91,97,146		X
미적분I	정상권 외	금성출판사	2016	106,116,173		X
미적분II	이준열 외	천재교육	2016	92,104,142		X
미적분II	신항균 외	지학사	2016	96,104		X

4.1.3 출제의도

함수의 다양한 성질과 미적분의 기본 개념에 대한 이해도를 측정하는 문항이다. 미분가능성에 대한 이해와 극값의 정의 및 최대・최소 정리를 이해하고 활용하여 함수의 성질을 파악할 수 있는지, 미적분의 기본정리(적분과 미분의 관계)를 이해하고 있는지를 평가하고자 하였다.

가. 문제

- 함수의 미분가능성 및 지수함수와 삼각함수의 극한의 이해
- 지수함수와 삼각함수의 성질 이해 및 주어진 범위 안에서 이 함수들을 포함하는 부등식의 풀이
- 극값의 정의, 최대・최소 정리의 이해
- 접선의 기울기와 미분계수의 관계, 두 함수의 곱의 미분법, 적분과 미분의 관계 및 삼각함수의 덧셈 정리의 이해

나. 제시문

- 함수의 극댓값, 극솟값, 극값의 정의 제시
- 최대・최소 정리 제시
- 적분과 미분의 관계 제시

4.1.4 문항 해설

4.1.4.1 교육과정 범위 및 수준에 대한 자체 평가 의견

- 제시문 [가]는 2009 개정교육과정 “[미적분Ⅰ] -[다] 다항함수의 미분법-③ 도함수의 활용”과 “[미적분Ⅱ]-[다] 미분법-② 도함수의 활용”에 해당하는 제시문이다. 극값의 정의를 이전 교육과정에서 다루었던, 미분 가능한 함수에 국한된 정의가 아닌 현 교육과정에서 다루는, 모든 함수에 대하여 적용될 수 있는 내용으로 서술하였다.
- 제시문 [나]는 2009 개정교육과정 “[미적분Ⅰ]-[나] 함수의 극한과 연속-② 함수의 연속”에 해당하는 제시문이다. 연속함수에 대한 정리 중 하나인 최대・최소 정리에 대해 서술하였다.
- 제시문 [다]는 2009 개정교육과정 “[미적분Ⅰ]-[라] 다항함수의 적분법-② 정적분”에 해당하는 제시문이다. 교과서에서 언급하고 있는 ‘미적분의 기본정리’가 발췌되었다.
- 문제 [1-1] 함수의 미분가능성을 이해하고 이를 판별할 수 있는지 평가한다. 2009 개정교육과정의 “[미적분Ⅰ]-[나] 함수의 극한과 연속-① 함수의 극한”에서 ‘함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.’라고 명시하고 있으며, “[미적분Ⅰ]-[다] 다항함수의 미분법-① 미분계수”에서 ‘미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.’라고 명시하고 있다. 또한 “[미적분Ⅱ]-[가] 지수함수와 로그함수-② 지수함수와 로그함수의 미분”과

"[미적분Ⅱ]-[나] 삼각함수-2 삼각함수의 미분"에서 초월함수 극한을 이해할 수 있으므로 이 내용들을 연결하여 주어진 점에서 식을 변형하여 $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$의 존재성을 조사하면 무난히 해결할 수 있는 문항이었다. 이때 좌미분계수와 우미분계수를 각각 계산하여 이 둘이 같음을 보임으로써 함수의 미분가능성을 보일 수도 있는 문항이었다.

- 문제 [1-2] 주어진 구간에서 부등식의 해를 구할 수 있는지 평가한다. 2009 개정교육과정의 "[미적분Ⅱ]-[가] 지수함수와 로그함수-1 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프"에서 '지수함수와 로그함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.'와 "[미적분Ⅱ]-[나] 삼각함수-1 삼각함수의 뜻과 그래프"에서 '삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.'라고 명시하고 있으며, <교수·학습상의 유의점>에서 '지수함수와 로그함수의 활용에서는 구체적인 자연현상이나 사회 현상에서 나타나는 간단한 방정식과 부등식을 다룬다.'와 '삼각함수의 활용에서는 주어진 구간 안에서 해를 구하는 간단한 방정식과 부등식을 다룬다.'라고 명시하고 있으므로 주어진 구간의 함수를 수식으로 나타낸 후 미지수의 변화에 따른 함숫값의 부호변화를 계산하여 부등식의 해를 구할 수 있다. 또한 삼각함수의 그래프를 통하여 역수로 이루어진 식을 변형하여 해결할 수 있는 문항이었다.
- 문제 [1-3] 주어진 구간 내의 극값의 존재성을 판별할 수 있는지 판별한다. 2009 개정교육과정의 "[미적분Ⅰ]-[나] 함수의 극한과 연속-2 함수의 연속"에서 '연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.'라고 명시하고 있으며 "[미적분Ⅰ]-[다] 다항함수의 미분법-3 도함수의 활용"에서 '함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다'라고 명시하고 있고, <용어와 기호>에서 '최대·최소 정리'를 언급하고 있다. 따라서 주어진 열린구간을 n개의 열린 구간 $\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{(2n-1)\pi}\right)$ (n은 자연수)에 대하여, 구간 끝에서의 함숫값이 같다는 사실을 바탕으로 최대・최소 정리를 활용하여 각 구간별로 적어도 1개의 극값이 존재한다는 것을 통해 해결할 수 있다. 또한 "[수학Ⅱ]-[다] 수열-3 수학적 귀납법"에서 '수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.'라고 명시하고 있으므로 수학적 귀납법을 통해 단계적으로 자연수인 극값의 개수를 적어도 n개로 증명할 수 있는 문항이었다.
- 문제 [1-4] 미적분학의 기본정리를 이해하고 미분계수를 바탕으로 그래프에 접하는 접선을 구할 수 있는지와 두 직선이 이루는 각에 대한 정보를 구할 수 있는지 평가한다. 2009 개정교육과정의 "[미적분Ⅰ]-[라] 다항함수의 적분법-2 정적분"에서 '정적분의 뜻을 안다.'라고 명시하고 있으며 <용어와 기호>에서 '미적분의 기본 정리'라고 명시하고 있다. 또한 "[미적분Ⅱ]-[다] 미분법-2 도함수의 활용"에서 '접선의 방정식을 구할 수 있다.'라고 명시하고 있으며, "[미적분Ⅱ]-[나] 삼각함수-2 삼각함수의 미분"에서 '삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.'라고 명시하고 있다. 대부분의 교과서에서 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 각에 대한 정보를 구하는 문제를 다루고 있다. 따라서 주어진 함수의 도함수를 통하여 주어진 점에서의 접선을 구할 수 있으며, 접선의 기울기와 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\cos 2\theta$를 α에 대한 식으로 나타낼 수 있는 문항이었다.

4.1.4.2 출제 검토 교사 의견

- 고등학교 교과서 [미적분Ⅰ], [미적분Ⅱ]에서 언급된 내용만을 발췌하여 제시문을 구성하였다. 자연계열 수학교육과정을 이수한 학생들이라면 제시문의 내용을 이해하고 문제에 어려움 없이 적용할 수 있다.
- 문제에서는 함수에 대한 정리와 미분계수의 정의, 미적분의 기본정리에 대하여 묻고 있다. 미분가능성의 조사, 주어진 구간 내에서의 부등식 해결, 최대·최소 정리를 이용한 극값의 존재성 조사, 미분계수를 이용한 접선의 기울기 계산, 미적분의 기본정리, 지수함수의 미분, 삼각함수의 덧셈정리 등을 통해 미적분에 대한 전반적인 이해도를 평가하고 있다.
- 교육과정에서 미적분에 대해 다루고 있는 내용을 충분히 숙지하였다면 주어진 시간 내에 무리 없이 해결할 수 있다.

4.1.4.3 선행학습 영향평가 자문교사 의견

- 제시문 [가]~[다]에 대하여 자문교사 모두가 교육과정 범위에 해당한다고 응답하였다. 문제 [1-1]~[1-4]에 대하여서도 자문교사 전체가 교육과정 범위에 해당하며 그 수준에 적정하다고 답하였다.
- 제시문 [가]~[다]의 난이도는 교과서나 수학개념서에 나오는 내용으로 학생들이 이해하기에 충분하다고 생각된다고 답하였다.
- 제시문 [가]에서 설명하고 있는 극값의 정의는 함수의 개형을 추론하는 데 필수적인 개념이다. 특히 함수 위의 미분불가능한 점도 극값을 가질 수 있다는 내용은 현 교육과정의 핵심적인 변화사항 중 하나이다.
- 제시문 [나]에서 설명하고 있는 최대·최소 정리는 롤의 정리 등 다른 연속함수에 대한 정리로 확장되는 바탕이 되는 만큼 미적분을 배우는 데 있어서 바탕이 되고 핵심적인 정리이다.
- 제시문 [다]에서 제시된 미적분의 기본정리는 미적분학의 정수라고 할 수 있는 정리로, 구분구적법의 일반화와 함께 부정적분과 정적분의 관계를 지도하는 데 활용될 수 있다. 그리고 “[미적분Ⅰ]-[라] 다항함수의 적분법-② 정적분” 단원에서 “구분구적법으로 정의된 정적분과 미분이 서로 역연산 관계에 있다.”를 ‘적분과 미분의 관계’로 설명하고 있으므로 적절하다고 하였다.
- 문제 [1-1]은 주어진 함수의 연속성과 미분가능성을 판단하는 문제로, 교과서에서도 관련 내용을 학습 목표로 설정하고 있는 만큼 고교과정을 정상적으로 이수했다면 해결할 수 있는 문제이다. 문제 [1-2]는 주어진 구간 내에서 부등식의 해를 구하는 문제로 고교과정을 정상적으로 이수했다면 해결할 수 있는 문제이다. 문제 [1-3]은 연속함수에 대한 정리를 활용하여 극값의 존재를 판단하는 문제로, 주어진 정리가 교과서에도 설명되어있고 문제의 풀이법이 교과서에 나오는 롤의 정리의 증명과 같은 만큼 고교과정을 정상적으로 이수했다면 해결할 수 있는 문제이다. 문제 [1-4]는 미적분학의 기본정리를 통해 주어진 함수를 미분한 후 접선을 구하고, 두 접선이 이루는 각에 대한 정보를 주어진 문자로 표현하는 문제로 고교과정을 정상적

으로 이수했다면 해결할 수 있는 문제이다.

- 전체적으로 문제 [1-1], [1-2], [1-4]는 주어진 개념들의 의미를 파악하고 문제 상황만 제대로 파악했다면 충분히 해결할 수 있다는 의견을 밝혔다. 반면 문제 [1-3]은 구간을 작은 구간들로 나누어 생각하는 것이 학생들의 체감 난이도를 높였을 것이라는 의견이 있었다. 전체적으로 문항 [1] 내에서 난이도 조절이 적절하게 이루어졌다는 분석을 하였다.
- 문제 [1-1]의 경우는 학생들에게 익숙하지 않은 초월함수의 곱으로 이루어진 수식전개에서 복잡한 부분이 있어 첫 문제부터 시간이 걸릴 수는 있으나, 집중력을 발휘한다면 빠른 시간 내에 유의미한 결과를 도출할 수 있는 문항이었으며 후속 문제인 [1-2]는 그래프의 특징을 알고 있기만 하면 바로 해결가능하기 때문에 문제 [1-1]과 문항 간 난이도가 적절히 조정되었다고 볼 수 있으며 문제 [1-3]은 보통의 학생들이 어려워하는 증명문제이나, 교과서등의 서술형 문제에서 자주 등장하는 유형이기 때문에 난이도는 높지 않을 것으로 보인다고 답하였고 문제 [1-4]는 '접선의 방정식', '삼각함수의 덧셈공식'만 알고 있어도 충분히 해결할 수 있는 문항이라고 답하였다.
- 문제 [1-1]은 미분가능성 조사에 대한 문제로 미분계수의 정의와 함수의 극한의 내용 또는 지수함수와 삼각함수, 무리함수의 미분법과 곱의 미분법을 알고 있으면 충분히 해결할 수 있는 문제이다. 문제 [1-2]는 주어진 함수를 미분하여 극대와 극소를 판정하고 증감표를 이용하여 그래프를 그릴 수 있다면 충분히 해결할 수 있는 문제이다. 문제 [1-3]은 주어진 구간에서 극값의 개수를 판정하는 문제로 미분을 이용하여 증감표를 그리고 주기함수의 원리를 이용하여 극점의 개수를 판단한다면 충분히 해결할 수 있는 문제이나 학생들이 극값을 판정할 때 다소 어려움이 있을 것이라 판단된다. 문제 [1-4]는 두 함수의 접선의 방정식을 구하고 두 접선이 이루는 사잇각을 이용하는 문제로 접선의 기울기와 탄젠트 덧셈정리를 이용하면 충분히 구할 수 있는 문제라고 답하였다.

4.1.5 채점기준

< 표 4-12 > 채점기준 1번 - 전자공학전공/컴퓨터공학전공/수학전공

하위문항	채점기준	배점
1-1	함수의 미분가능성 및 지수함수와 삼각함수의 극한을 이해하는지 평가한다.	240
1-2	지수함수의 성질을 이해하고 삼각함수를 포함하는 부등식을 주어진 구간 안에서 풀 수 있는지 평가한다.	
1-3	함수의 극값 및 최대・최소 정리를 이해하는지 평가한다.	
1-4	접선의 기울기와 미분계수, 삼각함수와의 관계, 미적분의 기본정리(적분과 미분의 관계) 및 삼각함수의 덧셈정리를 이해하는지 평가한다.	

<유의사항>

- 문제에서 요구하는 답안 및 성취기준을 도출하는 과정을 평가함.
- 답안 작성분량이 현저히 미달되는 경우 과락처리 함.
- 답안이나 답안지 여백에 문제와 관계없는 불필요한 낙서나 이와 유사한 표식이 있는 경우 과락처리 함.
- 답안내용 중 확연히 수험생 본인을 식별할 수 있는 내용이 있는 경우 과락처리 함.

4.1.6 답안사례

【1-1】

$x \neq 0$ 에 대하여 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{|x|}\,(e^x-1)\cos\frac{1}{x}}{x} = \dfrac{e^x-1}{x} \cdot \sqrt{|x|}\cos\dfrac{1}{x}$ 이다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ 이고 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}\cos\dfrac{1}{x}=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$ 이 존재한다.

따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

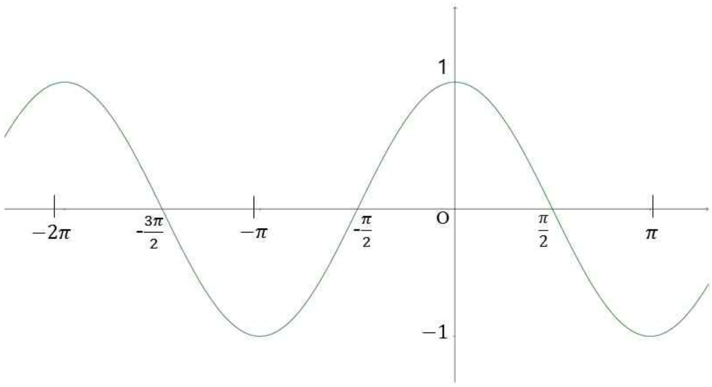
이때 $-\sqrt{|x|} \le \sqrt{|x|}\cos\dfrac{1}{x} \le \sqrt{|x|}$ 이고 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}\cos\dfrac{1}{x}=0$ 임을 사용하였다.

【1-2】

$x \le -\dfrac{1}{2\pi}$ 에 대하여 $\sqrt{|x|}>0$, $e^x-1<0$ 이므로 $\sqrt{|x|}(e^x-1)\cos\dfrac{1}{x}<0$ 이기 위해서는

$\cos\dfrac{1}{x}>0$ 이어야 한다. $\dfrac{1}{x}=t$ 라 놓으면 $-2\pi \le t<0$ 이며 $\cos t>0$ 이어야 한다. 따라서

$-2\pi \le t < -\dfrac{3\pi}{2}$ 또는 $-\dfrac{\pi}{2}<t<0$, 즉, $-\dfrac{2}{3\pi}<x\le -\dfrac{1}{2\pi}$ 또는 $x<-\dfrac{2}{\pi}$ 이다.



【1-3】

(i) $n=1$ 인 경우:

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $\left[\dfrac{2}{3\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 $\left[\dfrac{2}{3\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right]$ 에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 그런데, 구간의 양 끝점에서 함숫값이 $f\left(\dfrac{2}{3\pi}\right)=0=f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$ 로 같으므로 열린 구간 $\left(\dfrac{2}{3\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right)$ 에 속하는 $x=c$ 에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 극값을 가진다. 그러므로 함수 $f(x)$ 는 열린 구간 $\left(\dfrac{2}{3\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right)$ 의 적어도 한 점에서 극값을 가진다.

(ii) $n=2$인 경우:
(i)에 의하여 함수 $f(x)$는 열린 구간 $\left(\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$의 적어도 한 점에서 극값을 가진다.
또한 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $\left[\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 $\left[\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 그런데, 구간의 양 끝점에서 함숫값이 $f\left(\frac{2}{5\pi}\right)=0=f\left(\frac{2}{3\pi}\right)$로 같으므로 열린 구간 $\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right)$에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(x)$는 $x=c$에서 극값을 가지므로 $f(x)$는 열린 구간 $\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right)$의 적어도 한 점에서 극값을 가진다.
그러므로 함수 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$의 적어도 두 점에서 극값을 가진다.

(iii) $n=3$인 경우:
(ii)에 의하여 함수 $f(x)$는 열린 구간 $\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$의 적어도 두 점에서 극값을 가진다.
또한 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $\left[\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}\right]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 $\left[\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 그런데, 구간의 양 끝점에서 함숫값이 $f\left(\frac{2}{7\pi}\right)=0=f\left(\frac{2}{5\pi}\right)$로 같으므로 열린 구간 $\left(\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}\right)$에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(x)$는 $x=c$에서 극값을 가지므로 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}\right)$의 적어도 한 점에서 극값을 가진다.
그러므로 함수 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$의 적어도 세 점에서 극값을 가진다.

위의 과정을 반복하면, 함수 $f(x)$는 모든 자연수 n에 대하여 열린 구간 $\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$의 적어도 n개의 점에서 극값을 가진다.

【1-4】
$y=g(x)$와 $y=F(x)$의 그래프 위에 있는 점 $(1,0)$에서의 접선과 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라고 하자. $g'(x)=xe^{x-1}$이므로 $\tan\theta_1=g'(1)=1$이고 적분과 미분의 관계에 의하여 $\tan\theta_2=F'(1)=f(1)=\alpha$이다. 따라서
$|\tan\theta|=|\tan(\theta_1-\theta_2)|=\left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|=\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right|$ 이다.

그러므로

$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2}{\sec^2\theta} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\theta} - 1 = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \frac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2} = \frac{(1+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2+(1-\alpha)^2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

이다.

4.2 자연계열 논술고사 2

4.2.1 문항 및 제시문

[제시문]

[가] 좌표공간에서 중심이 (a, b, c)이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

이다.

[나] 좌표공간에서 점 (x_1, y_1, z_1)을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

이다.

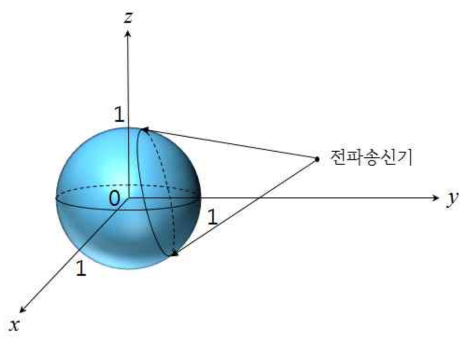
[다] xy평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 x좌표와 y좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 속도의 x성분과 y성분은 $\frac{dx}{dt}=f'(t)$, $\frac{dy}{dt}=g'(t)$이다.

[라] (입체도형의 부피) 닫힌 구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)\,dx \text{ (단, } S(x)\text{는 구간 } [a, b]\text{에서 연속)}$$

이다.

[마] 아래 그림과 같이 원점을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 구가 있다. 구의 외부에 있는 전파송신기가 송출하는 전파는 3차원 공간에서 모든 방향을 향해 직선으로 전송되며, 전파의 전송 소요시간은 무시할 수 있을 정도로 매우 빠르다고 가정한다. (단, 전파송신기는 반지름이 충분히 작아 크기를 무시할 수 있는 구라고 가정하며, 아래 문항 【2-1】과 【2-2】의 전파방해물도 전파송신기와 크기 및 모양이 동일하다고 가정한다. 따라서 전파송신기에서 송출된 전파가 전파방해물에 가로막히면 더 이상 전송되지 않는다.)



[문제]

제시문 [가]-[마]를 참고하여 다음 물음에 답하여라.

【2-1】 전파송신기의 위치가 $(0, 3, 0)$이고, $\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$에 전파방해물이 있다고 하자. 이 전파방해물에 의해 전파가 도달하지 못하는 구 위의 점을 A라 할 때, 점 A에서 구에 접하는 평면의 방정식을 구하여라.

【2-2】 yz평면에서 전파송신기의 위치가 시각 $t=0$일 때 $(0, 3, 0)$에서 출발하여 z축의 양의 방향으로 매초 1의 속력으로 등속운동을 한다. 이에 따라 $(0, 2, 0)$에 고정된 전파방해물에 의해 전파가 도달하지 못하는 구 위의 점이 이동한다. 시각 t초에서 이 구 위의 점의 이동 속도의 y성분을 $v_y(t)$라고 할 때, $v_y\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라.

【2-3】 전파송신기의 위치가 시각 $t=0$일 때 $(0, 3, 0)$에서 출발하여 y축의 양의 방향으로 매초 1의 속력으로 등속운동을 한다. 시각 $t(t \geq 0)$초에서 전파가 도달하는 구의 표면을 α, 전파송신기로부터 전파가 가장 멀리 도달하는 구 위의 점들을 포함하는 평면을 β라 할 때, α와 β로 둘러싸인 입체의 부피를 t에 대한 식으로 나타내어라.

【2-4】 전파송신기의 위치가 $(2, 0, 0)$에 고정되어 있다. $x=0$, $y=z$를 방정식으로 갖는 직선을 l이라 하고, 구가 직선 l을 중심으로 등속 회전한다. 점 B는 시각 $t=0$일 때 구 위의 점 $(0, 0, 1)$에 위치하고, 이 구의 움직임에 따라 점 B도 움직인다. 구가 한 바퀴 회전할 때, 좌표공간에서 B가 지나는 점들로 이루어진 곡선에서 전파송신기로부터 전파를 받을 수 있는 부분의 길이를 구하여라.

4.2.2 교육과정 근거 및 자료 출처

< 표 4-13 > 문항카드 2번 - 전자공학전공/컴퓨터공학전공/수학전공

<table>
<tr><td colspan="4">모집단위</td><td colspan="3">전자공학전공/컴퓨터공학전공/수학전공</td></tr>
<tr><td colspan="4">문항번호</td><td colspan="3">2번</td></tr>
<tr><td colspan="4">출제범위</td><td>교과 과목명</td><td>교과별 교육과정</td><td>교육과정 준수여부</td></tr>
<tr><td rowspan="5">계열 및 교과</td><td rowspan="3">인문 사회</td><td>국어</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>사회</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>도덕</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">수학</td><td>○</td><td>기하와 벡터, 수학I, 미적분II</td><td>교육과학기술부 고시 제2011-361호</td><td>준수</td></tr>
<tr><td colspan="2">기타</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">교과 외</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">핵심개념 및 용어</td><td colspan="4">· 구의 방정식
· 직선의 방정식
· 평면의 방정식
· 속력과 속도의 개념
· 직선의 방정식
· 입체도형의 부피
· 호도법</td></tr>
<tr><td colspan="3">답안작성(예상소요)시간</td><td colspan="3">60분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">제시문</td><td>가</td></tr>
<tr><td colspan="4">▶ 교육과정 근거</td></tr>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">기하와 벡터</td><td>교육과정</td><td>교육과학기술부 고시 제2011-361호</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· (다) 공간도형과 공간벡터 - 2 공간좌표
④ 구의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	154,183		X
기하와 벡터	황선욱 외	좋은책신사고	2016	132		X

<table>
<tr><td colspan="3">제시문</td><td>나</td></tr>
<tr><td colspan="4">▶ 교육과정 근거</td></tr>
<tr><td rowspan="2">과목명</td><td rowspan="2">기하와 벡터</td><td>교육과정</td><td>교육과학기술부 고시 제2011-361호</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· (다) 공간도형과 공간벡터 - 3 공간벡터
⑤ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	154,183		X
기하와 벡터	신항균 외	지학사	2016	109		X

제시문	다

▶ 교육과정 근거

과목명	기하와 벡터	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· (나) 평면벡터 - $\boxed{3}$ 평면운동 ① 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	신항균 외	지학사	2016	110		X
기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	106		X

제시문	라

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분II	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· (라) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 ② 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분II	김원경 외	비상교육	2016	159		X
미적분II	이준열 외	천재교육	2016	197		X

제시문	마

▶ 교육과정 근거

과목명	기하와 벡터	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· (다) 공간도형과 공간벡터 - $\boxed{3}$ 공간벡터 ⑤ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	154,183		X
기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2016	139,157		X

문제	2-1

▶ 교육과정 근거

과목명	기하와 벡터	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· (다) 공간도형과 공간벡터 - $\boxed{3}$ 공간벡터 ④ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다. ⑤ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	154,177,189		X
기하와 벡터	황선욱 외	좋은책신사고	2016	132,161,179		X
기하와 벡터	정상권 외	금성출판사	2016	184		X
기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2016	224		X

문제	2-2

▶ 교육과정 근거

과목명	기하와 벡터	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· (가) 평면곡선 - 2 평면곡선의 접선에서 ② 매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다 · (나) 평면벡터 - 3 평면운동 ① 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
과목명	수학I	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· (다) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식 ① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다. · (다) 도형의 방정식 - 3 원의 방정식 ① 원의 방정식을 구할 수 있다. ② 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	신항균 외	지학사	2016	45,110		X
기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2016	35,95		X
수학I	신항균 외	지학사	2016	149,164,171		X
수학I	우정호 외	동아출판	2016	167,187,195		X

문제	2-3

▶ 교육과정 근거

과목명	미적분II	교육과정	교육과학기술부 고시 제2011-361호
		성취기준	· (라) 적분법 - 2 정적분의 활용 ② 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
미적분II	김원경 외	비상교육	2016	159,192		X
미적분II	우정호 외	동아출판	2016	226,229		X

<table>
<tr><th colspan="3">문제</th><th>2-4</th></tr>
</table>

▶ 교육과정 근거

<table>
<tr><td rowspan="2">과
목
명</td><td rowspan="2">기하와
벡터</td><td>교육과정</td><td>교육과학기술부 고시 제2011-361호</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· (다) 공간도형과 공간벡터 - 3 공간벡터
⑤ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">과
목
명</td><td rowspan="2">미적분II</td><td>교육과정</td><td>교육과학기술부 고시 제2011-361호</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td>· (나) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프
① 일반각과 호도법의 뜻을 안다.</td></tr>
</table>

▶ 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성여부
기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	154,183		X
기하와 벡터	정상권 외	금성출판사	2016	154,177		X
미적분II	김원경 외	비상교육	2016	49		X
미적분II	김창동 외	교학사	2016	58		X

4.2.3 출제의도

좌표공간에서 정의된 도형과 평면 위를 운동하는 물체의 해석 능력을 평가하고자 하는 문제이다. 공간에 위치한 구, 평면, 직선의 방정식 설정 능력과 매개변수로 표현된 함수의 미분 이해도, 벡터를 이용한 평면 운동의 해석 능력 등을 평가하고자 하였다.

가. 문제

- 직선의 방정식, 직선과 구의 교점 및 구 위의 점에 접하는 평면의 방정식의 이해
- 미분의 이해와 그 활용
- 정적분의 이해와 그 활용
- 구, 직선, 원의 관계 및 호도법을 이해

나. 제시문

- 구의 방정식 제시
- 평면의 방정식 제시
- 속도의 성분과 미분의 관계 제시
- 입체도형의 부피와 정적분의 관계 제시

4.2.4 문항 해설

4.2.4.1 교육과정 범위 및 수준에 대한 자체 평가 의견

- 제시문 [가]는 2009 개정교육과정 "[기하와 벡터]-[다] 공간도형과 공간벡터-② 공간좌표/③ 공간벡터"에 해당하는 제시문이다. 특히, 좌표공간에서 구의 방정식은 구의 정의로부터 유도할 수도 있으며 벡터를 이용해서 유도할 수 있다.
- 제시문 [나]는 2009 개정교육과정 "[기하와 벡터]-[다] 공간도형과 공간벡터-③ 공간벡터"에 해당하는 제시문이다. 평면에 수직인 직선의 성질과 공간벡터의 내적을 활용하여 공간상의 평면의 방정식을 평면 위의 한 점과 법선벡터로부터 유도할 수 있다.
- 제시문 [다]는 2009 개정교육과정 "[기하와 벡터]-[나] 평면벡터-③ 평면운동"에 해당하는 제시문이다. 이전에 배웠던 직선상의 운동을 확장하여 매개변수로 제시되는 점의 운동을 매개변수의 미분법과 벡터를 이용하여 해석할 수 있다.
- 제시문 [라]는 2009 개정교육과정 "[미적분Ⅱ]-[라] 적분법-② 정적분의 활용"에 해당하는 제시문이다. 한 축에 대하여 수직으로 자른 단면의 넓이가 함수로 주어진 경우 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구하는 방법에 대해 서술하고 있다.
- 제시문 [마]는 2009 개정교육과정 "[기하와 벡터]-[다] 공간도형과 공간벡터-③ 공간벡터"에 해당하는 제시문이다. 제시된 바와 같이 송신기와 전파를 3차원 공간에서 구와 직선으로 대체

한다면 제시문을 쉽게 이해할 수 있다.

- 문제 [2-1] 제시문 [마]에서 전파송신기와 전파방해물이 정지해있는 경우를 해석할 수 있는지 평가한다. “[기하와 벡터]-[다] 공간도형과 공간벡터-③ 공간벡터”에서 ‘좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.’라 명시하고 있으며, <교수·학습상의 유의점>에서 ‘공간에서 직선의 방향벡터를 이용하여 구한 직선의 방정식이 직선의 매개변수 표현임을 이해하게 한다.’라 명시하고 있다. 또한 “[기하와 벡터]-[다] 공간도형과 공간벡터-③ 공간벡터”에서 ‘좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다’라 명시하고 있다. 따라서 전파송신기와 전파방해물을 지나는 직선의 방정식을 매개변수로 표현한 후 이를 구의 방정식에 대입하여 점 A를 구할 수 있으며 점 A의 위치벡터가 평면의 법선벡터라는 것을 이용하여 평면의 방정식을 구할 수 있다.
- 문제 [2-2] 평면 위의 점의 운동을 해석할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정의 “[기하와 벡터]-[가] 평면곡선-② 평면곡선의 접선”에서 ‘매개변수로 나타낸 함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다’라 명시하고 있으며, <교수·학습상의 유의점>에서 ‘간단한 곡선을 음함수나 매개변수를 이용하여 나타내 봄으로써 음함수와 매개변수로 나타낸 함수는 곡선을 표현하는 방법 중 하나임을 이해하게 한다.’라 명시하고 있다. 또한 “[기하와 벡터]-[나] 평면벡터-③ 평면운동”에서 ‘미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.’라고 명시하고 있으므로 yz평면 위에서 전파송신기의 위치를 시간에 따른 매개변수의 형태로 설정한 후 전파송신기와 고정된 전파방해물을 지나는 직선의 방정식과 구의 방정식의 교점을 매개변수를 이용한 형태로 구한 후 이를 미분하여 점의 이동 속도의 y 성분을 계산할 수 있다. 이 때, “[수학I]-[다] 도형의 방정식-② 직선의 방정식”과 “[수학I]-[다] 도형의 방정식-③ 원의 방정식”의 내용을 이용하여 평면 위의 원과 직선의 관계를 쉽게 풀이할 수 있다.
- 문제 [2-3]에서 주어진 입체도형의 부피를 정적분을 통해 계산할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정의 “[미적분Ⅱ]-[라] 적분법-② 정적분의 활용”에서 ‘입체도형의 부피를 구할 수 있다.’라고 명시하고 있으며 “[기하와 벡터]-[가] 평면곡선-② 평면곡선의 접선”의 <교수·학습상의 유의점>에서 ‘간단한 곡선을 음함수나 매개변수를 이용하여 나타내 봄으로써 음함수와 매개변수로 나타낸 함수는 곡선을 표현하는 방법 중 하나임을 이해하게 한다.’라고 명시하고 있다. 따라서 운동하는 전파송신기의 좌표를 시간에 따른 매개변수의 형태로 설정한 후, 문제 상황을 바탕으로 입체도형이 y축에 수직으로 자른 단면이 원인 입체도형인 것을 판단하여 정적분을 통해 t에 대한 식으로 표현할 수 있다.
- 문제 [2-4]는 문제에서 제시된 점들의 자취와 위치관계를 복합적으로 파악할 수 있는지 평가한다. “[기하와 벡터]-[다] 공간도형과 공간벡터-③ 공간벡터”에서 ‘좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다’라 명시하고 있다. 따라서 주어진 직선의 방향벡터가 B가 지나는 점들이 놓이는 평면의 법선벡터임을 알 수 있고 B가 지나는 점들이 원을 이루는 것도 알 수 있다. 또한 전파송신기에서 발사된 전파가 구에 닿는 영역을 문제 [2-3]에서와 같이 구한 후 이 영역에 포함되는 원의 일부인 호의 길이를 구하면 된다는 것을 알 수 있다. 또한 “[미적분II]-[나] 삼각함수-① 삼각함수의 뜻과 그래프”에서 ‘일반각과 호도법의 뜻을

안다.’라고 명시되어 있으며, 이와 관련된 단원에 주어진, 호도법을 이용하여 호의 길이를 구하는 공식을 통하여 구하고자 하는 부분의 길이를 쉽게 구할 수 있다.

4.2.4.2 출제 검토 교사 의견

- 고등학교 교과서 [미적분Ⅱ], [기하와 벡터]에서 언급된 내용만을 발췌하여 제시문을 구성하였다. 자연계열 수학교육과정을 이수한 학생들이라면 제시문의 내용을 이해하고 문제에 어려움 없이 적용할 수 있다.
- 제시문 [가]~[라]의 내용은 교과서에 실려 있는 정의를 그대로 옮겨놓은 것이므로 학생들이 비교적 친숙하게 느낄 수 있기 때문에 난이도는 쉽다고 생각되는 의견이 대부분이었다.
- 제시문 [마]의 내용은 제시된 상황을 교과서에 실려 있는 공간상에서의 구와 직선의 정의와 연계하여 이해하면 쉽게 그 의미를 파악할 수 있을 것이다.
- 문제에서는 벡터와 매개변수를 이용한 공간도형의 해석을 종합적으로 묻고 있다. 좌표공간 위의 직선, 평면, 구의 방정식 설정, 매개변수를 이용한 평면에서의 운동의 해석, 공간에 위치하는 입체도형의 부피 계산 등을 묻고 있다.
- 교육과정에서 매개변수와 공간도형에 대해 다루고 있는 내용을 충분히 숙지하였다면 주어진 시간 내에 무리 없이 해결할 수 있다.

4.2.4.3 선행학습 영향평가 자문교사 의견

- 제시문 [가]~[마]에 대하여 자문교사 모두가 교육과정 범위에 해당한다고 응답하였다. 문제 [2-1]~[2-4]에 대하여서도 자문교사 전체가 교육과정 범위에 해당하며 그 수준이 적정하다고 답하였다.
- 제시문 [가]에서 설명하고 있는 구의 방정식은 구의 정의를 통해 유도할 수 있으며, 공간벡터를 학습한 후에는 벡터를 사용하여 구의 방정식을 나타낼 수 있다는 것을 파악할 수 있다.
- 제시문 [나]에서 설명하고 있는 평면의 방정식은 공간도형에서 학습한 평면에 수직인 직선의 성질과 연관성이 있으며 벡터를 이용하는 방정식의 설정은 공간벡터의 내적을 통해 유도할 수 있다.
- 제시문 [다]에서 제시된 평면 위에서 움직이는 점의 속도는 매개변수로 정의된 함수와 연관시켜 설명할 수 있으며 특히 벡터와 미적분을 이용하는 운동의 해석은 물리학 등 다른 학문에서도 사용되는 중요한 개념이다.
- 제시문 [라]에서 설명된 정적분을 이용한 입체도형의 부피는 구분구적법과 같은 부피 계산 방법과의 연관성에 주목하여 이해할 수 있다.
- 제시문 [마]에서 제시된 예는 공간상에서 구와 직선의 연관성에 주목하면 그 의미를 수학적인 대상으로 파악 수 있다.
- 문제 [2-1]은 구와 직선의 위치관계와 그 교점을 구하고 이를 바탕으로 평면의 방정식을 세우는 문제로 교과서에서도 관련 내용을 학습 목표로 설정하고 있는 만큼 고교과정을 정상적으로

이수했다면 해결할 수 있는 문제이다. 문제 [2-2]는 주어진 점을 매개변수로 나타낸 후 미분을 이용해 속도를 구하는 문제로 고교과정을 정상적으로 이수했다면 해결할 수 있는 문제이다. 문제 [2-3]은 주어진 입체도형의 특징을 파악하고 정적분을 활용하여 부피를 구하는 문제로 고교과정을 정상적으로 이수했다면 해결할 수 있는 문제이다. 문제 [2-4]는 동점의 자취를 파악한 후 이 중 주어진 조건을 만족하는 부분의 길이를 구하는 문제로 고교과정을 정상적으로 이수했다면 해결할 수 있는 문제이다.

- 전체적으로 문제 [2-1]은 기본 개념을 이해했다면 충분히 해결 가능한 문제이며, [2-3]은 입체도형의 형태를 파악하고 기준이 되는 축을 잘 설정했다면 손쉽게 해결 가능했다. 반면 문제 [2-2]는 점의 위치를 매개변수로 놓는 과정의 계산이 학생들 입장에서는 만만치 않았을 것이라는 의견이, 문제 [2-4]는 문제 상황 파악이 힘들어 학생 입장에서 체감 난이도가 높았을 것이라는 의견이 있었다. 전체적으로 문항 [2] 내에서 난이도 조절이 적절하게 이루어졌다는 분석을 하였다.
- 문제 [2-1]에서는 기하와 벡터 공간벡터 ‘공간도형’ 단원에서의 구의 방정식을 이용하여 주어진 구의 방정식을 쉽게 구할 수 있다. 전파송신기와 구의 중심을 이용해 구와 만나는 점을 구할 수 있으며, 기하와 벡터 공간도형과 공간벡터 ‘공간벡터’ 단원에서의 평면의 방정식 개념을 통해 평면의 방정식을 구할 수 있다. 문제 [2-2]에서는 전파송신기와 전파방해물을 잇는 직선을 이용하여 전파가 도달하지 못하는 구 위의 점의 y좌표를 구할 수 있으며 그 좌표를 구한 후 기하와 벡터 평면곡선 ‘평면곡선의 접선’ 단원에서의 평면운동에 대한 내용을 통해 구 위의 점의 이동 속도를 구할 수 있다. 문제 [2-3]에서는 구 위의 원의 접선을 통해 전파송신기에서 구에 전파가 도달하는 점을 구할 수 있으며, β로 표현되는 평면의 y값을 구할 수 있다. 미적분Ⅱ의 적분법 ‘정적분의 활용’ 단원에서의 공간도형의 부피를 구하는 방법을 통하여 부피를 구할 수 있다. [2-4]는 기하와 벡터 공간도형과 공간벡터 ‘공간도형’ 단원에서의 구의 방정식을 이용한 주어진 구의 방정식을 구할 수 있고 구 위의 원의 접선을 통해 전파송신기에서 구에 전파가 도달하는 점을 구할 수 있으며 전파가 도달하는 범위를 구할 수 있다. 점 B가 이동하는 곡선의 방정식과의 공통되는 부분을 통해 곡선의 길이를 구할 수 있다.
- 문제 [2-1]~[2-4]는 평면과 직선의 방정식을 제대로 이해하고 있다면 어렵지 않게 해결가능하다는 의견이 대부분이었다. 공간에서 직선과 구의 위치관계 등을 생각해야 하고, 시간이나 변화에 따른 움직임을 표현해야 하는 부분에서 학생들이 다소 어렵다고 느낄 수 있는 문제라 생각된다는 의견도 있었고 특히 문제 [2-4]의 경우는 문제 해결력이 필요한 문항이라는 의견도 있었다. 그러나 서강대를 지원하는 수험생의 수준을 고려할 때, 수험생을 변별하기 위한 문항으로서는 적절하다는 의견이 대부분이었다.

4.2.5 채점기준

< 표 4-14 > 채점기준 2번 - 전자공학전공/컴퓨터공학전공/수학전공

하위문항	채점기준	배점
2-1	두 점을 지나는 직선의 방정식, 직선과 구의 교점 및 구 위의 점에 접하는 평면의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.	360
2-2	두 점을 지나는 직선의 방정식 및 직선과 원의 교점을 구하고 미분을 이용하여 속도를 구할 수 있는지 평가한다.	
2-3	정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.	
2-4	구, 직선, 원의 관계 및 호도법을 이해하여 부채꼴의 호의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.	

<유의사항>

- 문제에서 요구하는 답안 및 성취기준을 도출하는 과정을 평가함.
- 답안 작성분량이 현저히 미달되는 경우 과락처리 함.
- 답안이나 답안지 여백에 문제와 관계없는 불필요한 낙서나 이와 유사한 표식이 있는 경우 과락처리 함.
- 답안내용 중 확연히 수험생 본인을 식별할 수 있는 내용이 있는 경우 과락처리 함.

4.2.6 답안사례

【2-1】

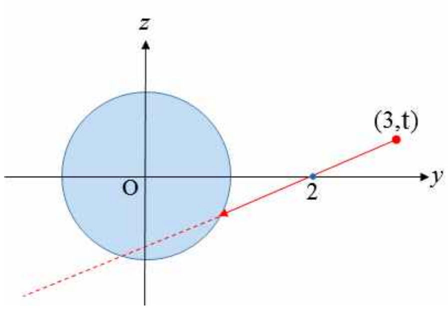
먼저 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구와 두 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right)$과 $(0,\ 3,\ 0)$을 지나는 직선의 교점을 구하자. 직선의 방정식은 $\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{-\frac{1}{2}}=k$라 놓으면 직선 위의 점은 $x=\frac{k}{2},\ y=-2k+3,\ z=-\frac{k}{2}$로 나타내어진다. 이를 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=1$에 대입하면 $\left(\frac{k}{2}\right)^2+(-2k+3)^2+\left(-\frac{k}{2}\right)^2=1$이 되어 $k=\frac{4}{3}$이다.

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$이 되고 점 A에서 구에 접하는 평면의 방정식은 $\frac{2}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(y-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(z+\frac{2}{3}\right)=0$, 즉, $2x+y-2z=3$이다.

【2-2】

시각 t초에서 전파송신기의 위치는 $(0,\ 3,\ t)$이므로 전파가 도달하지 못하는 구 위의 점은 구와 두 점 $(0,\ 2,\ 0)$과 $(0,\ 3,\ t)$를 지나는 직선의 교점 중 y좌표가 큰 것이다(그림 1 참고).



[그림 1]

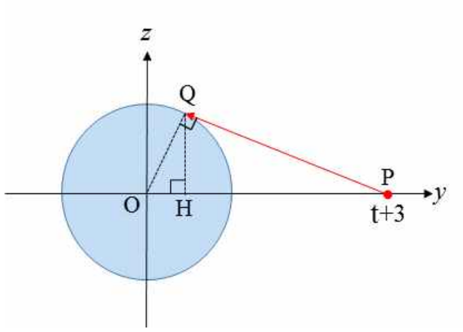
$(0,\ 2,\ 0)$과 $(0,\ 3,\ t)$를 지나는 직선의 방정식은 $x=0,\ \frac{y-2}{1}=\frac{z}{t}$이므로 $\frac{y-2}{1}=\frac{z}{t}=k$라 놓으면 직선 위의 점은 $x=0,\ y=k+2,\ z=tk$로 나타내어진다. 이를 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=1$에 대입하면 $(k+2)^2+t^2k^2=1$, 즉, $(t^2+1)k^2+4k+3=0$을 얻는다. 따라서

$k=\dfrac{-2\pm\sqrt{-3t^2+1}}{t^2+1}$ 인데 구와 직선의 두 교점 중 y좌표가 큰 것이 우리가 구하고자 하는 점이므로 $y=k+2$로부터 $k=\dfrac{-2+\sqrt{-3t^2+1}}{t^2+1}$ 임을 알 수 있다. 그러므로

$v_y(t)=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dk}{dt}=\dfrac{\left(\dfrac{-6t}{2\sqrt{-3t^2+1}}\right)(t^2+1)-(-2+\sqrt{-3t^2+1})\cdot 2t}{(t^2+1)^2}$ 가 되어 $v_y\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{36}{25}$ 이다.

【2-3】

시각 t초에서 전파송신기가 위치하는 점 P의 좌표는 $(0,\ t+3,\ 0)$이다. 원점과 평면 β의 거리 d를 구하기 위하여 그림 2와 같이 yz 평면 위에서 생각하자.



[그림 2]

점 P를 지나면서 원에 접하는 한 점을 Q라 하고 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $d=\overline{\mathrm{OH}}$이다. 이때 삼각형 OHQ와 OQP는 서로 닮은 삼각형이므로 $d:1=1:(t+3)$이 되어 $d=\dfrac{1}{t+3}$이다.

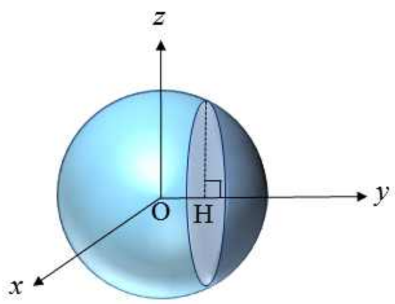
$\dfrac{1}{t+3}\le y\le 1$에 대하여 구를 y축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이는 $\pi(1-y^2)$이므로 α와 β로 둘러싸인 입체의 부피는

$$\int_{\frac{1}{t+3}}^{1}\pi(1-y^2)dy=\pi\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{1}{t+3}}^{1}=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{t+3}+\frac{1}{3(t+3)^3}\right)$$

이다(그림 3 참고).

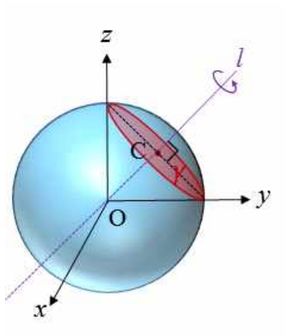
【2-4】

B가 지나는 점들은 직선 l로부터 거리가 일정한 구 위의 점이므로 원을 이룬다. $t=0$일 때 B의 위치가 $(0,0,1)$이고 직선 l의 방정식이 $x=0,\ y=z$이기 때문에 이 원은 그림 4와 같이 두 점 $(0,\ 0,\ 1)$과 $(0,\ 1,\ 0)$을 잇는 선분을 지름으로 하고 벡터 $(0,\ 1,\ 1)$에 수직인



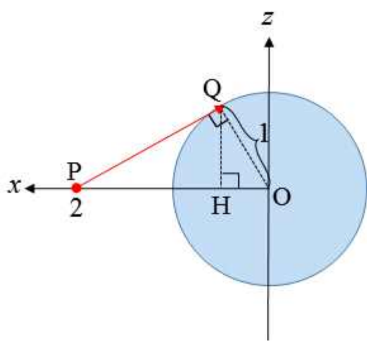
[그림 3]

평면 γ 위에 놓이고 원의 중심 C의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이며 반지름의 길이는 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.



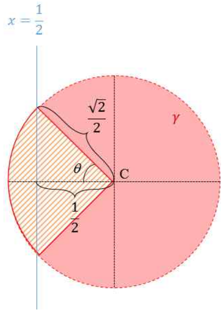
[그림 4]

한편, 전파송신기의 위치가 $(2,\ 0,\ 0)$이므로 【2-3】에서와 같은 방법으로 계산하면 H의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$이다(그림 5 참고).



[그림 5]

따라서 구하고자 하는 곡선의 부분은 원 C를 평면 $x=\frac{1}{2}$로 잘랐을 때 $x \geq \frac{1}{2}$인 부분이다. 이를 평면 γ 위에 그려보면 그림 6과 같으며 빗금 친 부채꼴의 호가 구하고자 하는 곡선의 부분이다.



[그림 6]

따라서 부채꼴의 중심각을 2θ라 놓으면 $\cos\theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$가 되어 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$이므로 호의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$이다.