2016 수시모집 논술전형 자연계열 논술고사

전자공학전공/컴퓨터공학전공/기계공학전공

문제 1

Ⅰ. 문제

문제1 (40%, 글자 수 제한 없음)

[가] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 미분가능하고 그 도함수가 연속이면 구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이는 $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$ 이다.

[나] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때 자연수 $k=1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 $x_k = a+\frac{k}{n}(b-a)$ 라고 하자. 이때 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n}$ 라고 하면, $n \to \infty$일 때 S_n은 항상 일정한 값으로 수렴함이 알려져 있다. 이 극한값을 a에서 b까지의 함수 $f(x)$ 의 정적분이라 하고, 이것을 기호로 $\int_a^b f(t)dt$ 와 같이 나타낸다. 또한, $a \le x \le b$ 에 대하여 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 로 정의하면 $F(x)$ 는 미분가능하고 $F'(x) = f(x)$ 이다.

[다] 극한값 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 이 존재한다는 것이 알려져 있고, 이 극한값을 e로 나타낸다. e는 무리수이고 그 값은 $e=2.71828182\cdots$이다. 로그의 밑이 e일 때, $\log_e x$ 를 자연로그라고 하고 이것을 간단히 $\ln x$ 로 나타낸다. 또한 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (단, $x>0$) 이고, 함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $f(x) \neq 0$ 일 때 로그함수 $y=\ln|f(x)|$ 의 도함수는 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 이다.

제시문 [가], [나], [다]를 참고하여 다음에 답하시오.

[1-1] 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 미분가능하고 $f'(x)$가 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다. (단, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \neq -1$ 이고, $f(1)=1$, $f'(1) = \alpha$ 이다.) 임의의 실수 s에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(s, f(s))$ 에서의 접선에 수직이면서 점 P를 지나는 직선이 $y=x$ 와 만나는 점을 (t,t)라고 하자. 이때 극한값 $\lim_{s\to 1}\frac{t-1}{s-1}$ 을 α에 관한 식으로 나타내시오.

[1-2] 문항 [1-1]에서 임의의 실수 s에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$ 에서 점 $(1,1)$ 까지의 곡선 $y=f(x)$ 의 길이를 $L(s)$ 라고 하자. 이때 함수 $L(s)$의 $s=1$에서의 미분가능성을 조사하시오.

[1-3] 함수 $g(x)=\dfrac{c\ln x}{x}$ (단, $x>1$이고 c는 양의 상수)에 대하여 함수 $h(x)=\dfrac{g(g(x))}{x^2}$ 는 다음 조건을 만족한다.

$$\int_e^{e^e} h(x)dx=0 \text{ (여기서 } e\text{는 자연로그의 밑)}$$

상수 c의 값을 구하고 함수 $h(x)$를 구하시오.

[1-4] 문항 [1-3]에서 구한 함수 $h(x)$ 에 대하여 방정식 $h(x)+\dfrac{1}{4}e^{-e-1}=0$ 은 구간 $(1,\infty)$ 에서 적어도 서로 다른 세 개의 실근을 가짐을 보이시오.

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

미적분의 기본 개념 및 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 접선의 기울기와 미분계수와의 관계, 미분계수 및 미분가능성의 정의를 이해하고 미적분학의 기본정리, 치환적분 및 중간값 정리를 활용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

2. 문항 해설

- [1-1] 미분계수와 접선의 기울기 사이의 관계 및 수직인 벡터와 내적의 관계를 이해할 뿐 아니라 함수의 극한의 성질, 연속 함수의 극한 및 미분계수의 정의를 묻고 있다. 문제에 주어진 조건을 통하여 곡선 $f(x)$ 위의 점 $(s,f(s))$에서의 접선의 방정식을 구하고 두 직선의 수직 조건을 이용하여 점 $(s,f(s))$에서의 접선에 수직이면서 그 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다. 이 직선의 방정식이 $y=x$와 만나는 점 (t,t)는 두 개의 방정식을 연립하여 s로 표현 할 수 있고, 극한에 관한 성질 및 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식의 극한을 구할 수 있다.
- [1-2] 곡선의 길이와 함수의 미분가능성을 이해하며 미적분학의 기본 정리를 활용할 수 있는지를 묻고 있다. 곡선의 길이와 미적분학의 기본정리를 이용하여 s의 범위에 따라 나누어 $L(s)$의 미분을 정적분으로 나타내고 이를 통하여 $s=1$에서의 우미분계수와 좌미분계수를 구할 수 있다. 그리고 이를 비교함으로써 주어진 점에서의 미분가능성을 알아볼 수 있다.
- [1-3] 치환적분 및 로그함수의 미적분을 이해하는지를 묻고 있다. 주어진 함수 $g(x)$의 합성을 통하여 함수 $h(x)$를 상수 c가 포함된 식으로 나타내고 치환적분법과 로그함수의 적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하여 상수 c의 값 및 함수 $h(x)$를 구할 수 있다.
- [1-4] 중간값의 정리를 사용하여 서로 다른 세 실근이 존재함을 보이는 문제이다. 중간값의 정리는 연속함수가 어느 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 설명하는 정리이다. 이 경우 서로 다른 세 실근을 가짐을 증명하기 위해서는 적어도 세 구간을 조사하여야 하는데, $[1,e]$, $[e,e^e]$, $[e^e,\infty)$의 세 구간에 대하여 중간값의 정리를 사용하면 $h(x)$가 세 실근을 가짐을 보일 수 있다.

3. 채점기준

- [1-1] 미분계수와 접선의 기울기 사이의 관계 및 수직인 벡터와 내적의 관계를 이해할 뿐 아니라 함수의 극한의 성질, 연속 함수의 극한 및 미분계수의 정의를 이해하는지 평가한다.
- [1-2] 곡선의 길이와 함수의 미분가능성을 이해하며 미적분학의 기본 정리를 활용할 수 있는지 평가한다.
- [1-3] 치환적분 및 로그함수의 미적분을 이해하는지 평가한다.
- [1-4] 중간값 정리를 사용하여 서로 다른 세 실근이 존재함을 보일 수 있는지 평가한다.

4. 답안 사례

[1-1]
곡선 위의 점 $(s,f(s))$에서의 접선의 기울기는 $f'(s)$이므로 벡터 $(1,f'(s))$ 는 점 $(s,f(s))$ 에서 점 (t,t)로의 벡터 $(s-t,f(s)-t)$ 와 수직이다. 그러므로 $(1,f'(s))\cdot(s-t,f(s)-t)=0$
즉 $s-t+f'(s)\{f(s)-t\}=0$ 을 만족한다.

다시 말해, $(s-1)-(t-1)+f'(s)\{(f(s)-1)-(t-1)\}=0$ 이고 $s \neq 1$인 s에 대하여 이 등식을 $s-1$ 로 나눠준 뒤 정리하면,

$$\frac{t-1}{s-1} = \frac{1+f'(s) \cdot \dfrac{f(s)-1}{s-1}}{1+f'(s)}$$ 을 얻게 된다.

이 때 가정에서 주어진 $f'(s) \neq -1$ 을 사용하였다.
이제 $s \to 1$로 보내면, $f'(1)=\alpha$ 이고 f'이 연속이므로

$$\lim_{s\to1}\frac{t-1}{s-1} = \lim_{s\to1}\frac{1+f'(s) \cdot \dfrac{f(s)-1}{s-1}}{1+f'(s)} = \frac{1+\alpha^2}{1+\alpha}$$ 을 얻는다.

[1-2]

곡선의 길이는 제시문 [가]와 같이 주어졌다. 만일 $s<1$이면 $L(s) = \int_s^1 \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$ 가 되고, $L(1)=0$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{s\to1-0}\frac{L(s)-L(1)}{s-1} &= \lim_{s\to1-0}\frac{1}{s-1}\int_s^1 \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt \\ &=-\lim_{s\to1-0}\frac{1}{s-1}\int_1^s \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt \\ &=-\sqrt{1+\alpha^2}\end{aligned}$$

이다. 여기서 마지막 등식은 미적분학의 기본정리를 이용한 것이다.
마찬가지로, $s>1$인 경우,

$$\lim_{s\to1+0}\frac{L(s)-L(1)}{s-1} = \lim_{s\to1+0}\frac{1}{s-1}\int_1^s \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt = \sqrt{1+\alpha^2}$$ 이다.

따라서

$$\lim_{s\to1-0}\frac{L(s)-L(1)}{s-1} =-\sqrt{1+\alpha^2} \neq \sqrt{1+\alpha^2} = \lim_{s\to1+0}\frac{L(s)-L(1)}{s-1}$$ 이 되어

$L(s)$는 $s=1$에서 미분 불가능하다.

[1-3]

$h(x) = \dfrac{g(g(x))}{x^2} = \dfrac{\ln c+\ln(\ln x)-\ln x}{x\ln x}$ 이다. $s=\ln x$ 라 치환하면 $\ln e=1$, $\ln e^e=e$,

$ds = \dfrac{dx}{x}$이므로 $\int_e^{e^e} h(x)\,dx = \int_1^e \dfrac{\ln c+\ln s-s}{s}ds = [\ln c \ln s + \dfrac{1}{2}(\ln s)^2 - s]_1^e = \ln c + \dfrac{3}{2} - e = 0.$

그러므로 $\ln c = e-\dfrac{3}{2}$, 즉, $h(x) = \dfrac{e-\dfrac{3}{2}+\ln\ln x-\ln x}{x\ln x}$ 이다.

[1-4]

문항 [1-3]에서 구한 함수 $h(x)$에 대하여,

(i) $\lim_{x\to1+0}\ln(\ln x) = -\infty$이므로 $\lim_{x\to1+0}(h(x)+\dfrac{1}{4}e^{-e-1}) = -\infty$이다.

(ii) $h(e)+\dfrac{1}{4}e^{-e-1} = 1-\dfrac{5}{2}e^{-1}+\dfrac{1}{4}e^{-e-1} > 0.$

(iii) $h(e^e)+\frac{1}{4}e^{-e-1}=-\frac{1}{2}e^{-e-1}+\frac{1}{4}e^{-e-1}=-\frac{1}{4}e^{-e-1}<0$.

(iv) $h(x)=\dfrac{e-\frac{3}{2}+\ln\ln x-\ln x}{x\ln x}=\dfrac{\frac{e-\frac{3}{2}}{\ln x}+\frac{\ln\ln x}{\ln x}-1}{x}$

이므로 $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$이 되어 $\lim_{x\to\infty}h(x)+\frac{1}{4}e^{-e-1}=\frac{1}{4}e^{-e-1}>0$ 이다.

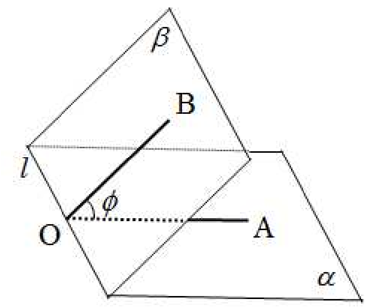
따라서 중간값 정리에 의하여 방정식 $h(x)+\frac{1}{4}e^{-e-1}=0$ 은 적어도 서로 다른 세 개의 실근을 갖는다.

문제 2

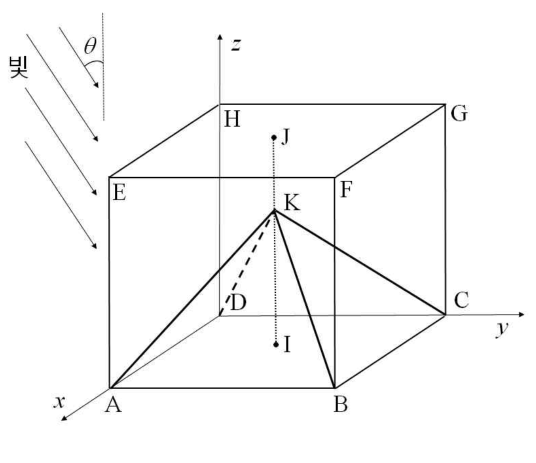
Ⅰ. 문제

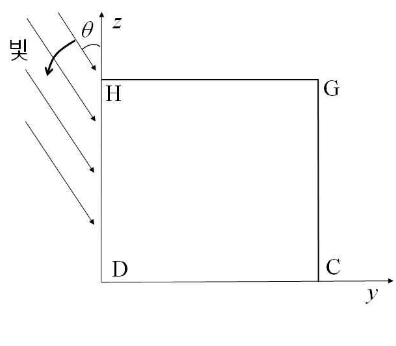
문제2 (60%, 글자 수 제한 없음)

[가] 평면 위에 있는 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데, 그 각각의 부분을 반평면이라고 한다. 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 이면각이라 하고, 교선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 이면각의 면이라고 한다. 오른쪽 그림에서 이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 반직선 OA, OB를 반평면 α, β 위에 각각 그으면 $\angle$AOB의 크기는 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다. 즉, 이면각의 크기 ϕ는 공간에서 두 평면이 이루는 각이 된다.



[나] 아래 그림과 같은 직교좌표축에 한 변의 길이가 2인 정육면체 ABCD-EFGH와 이 정육면체의 내부에 있는 사각뿔 K-ABCD를 생각하자. 이 사각뿔의 면 □ABCD는 정육면체 ABCD-EFGH의 밑면과 같고 꼭지점 K는 정육면체 밑면의 중심 I$(1, 1, 0)$와 윗면의 중심 J$(1, 1, 2)$를 잇는 선분 위에 있다. 사각뿔의 옆면인 △ADK를 포함하는 평면과 밑면인 □ABCD를 포함하는 평면이 이루는 이면각의 크기를 ϕ라 하자. 빛은 yz평면에 평행하게 xz평면으로 입사한다. 입사각 θ는 z축의 양의 방향에서 반시계 방향으로 측정한다. 그리고 빛은 서로 평행하게 도달한다고 가정한다.





x축의 양의 방향에서 바라본 yz평면과 θ의 방향

제시문 [가], [나]를 참고하여 다음에 답하시오.

[2-1] 빛이 $\theta=\frac{\pi}{6}$로 입사할 때, 사각뿔 K-ABCD의 꼭지점 K는 밑면 □ABCD의 중심 I에서 y축의 양의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 떨어진 점 $(1, \frac{3}{2}, 0)$에 그림자를 만든다. 이때 $\cos\phi$를 구하시오.

[2-2] 빛이 입사되는 각도 θ는 반시계 방향으로 증가하고 있으며, 그 각속도는 $2\pi/24h$ (h는 시간)로 일정하다. 입사각이 θ(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)일 때 □ADHE가 xy평면에 만드는 그림자의 면적에서 3시간 후에 만드는 그림자의 면적을 뺀 값을 $f(\theta)$라고 하자. 이때 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)d\theta$를 구하시오.

(단, $0<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{4}$)

좌표공간에 있는 점 Z는 $\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{ZB}+\overrightarrow{ZC}+\overrightarrow{ZD}+\overrightarrow{ZK}=0$ 을 만족한다. 사각뿔 K-ABCD의 옆면들이 정삼각형일 때, 문항 [2-3]과 문항[2-4]에 답하시오.

[2-3] $\overrightarrow{AZ}$와 $\overrightarrow{AB}$의 사잇각을 ρ_1, $\overrightarrow{AZ}$와 $\overrightarrow{AD}$의 사잇각을 ρ_2, $\overrightarrow{AZ}$와 $\overrightarrow{AK}$의 사잇각을 ρ_3라 하자. 이때 $2\cos^2\frac{\rho_1}{2}-2\sin^2\frac{\rho_2}{2}+\cos^2\frac{\rho_3}{2}$를 구하시오.

[2-4] 사각뿔 K-ABCD를 △ADZ를 포함하는 평면으로 자르면 윗부분에 K를 꼭지점으로 하는 사각뿔을 얻는다. 이 사각뿔 안에 들어가는 구 중에서 부피가 최대인 구의 표면적을 구하시오. (여기서 구는 사각뿔의 면들과 접할 수 있다.)

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

기하와 벡터의 기본 개념 및 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 이면각, 정사영 및 공간좌표와 벡터의 관계를 이해하며 공간에서의 도형의 성질을 파악하고 벡터의 내적을 할 수 있는지 그리고 삼각함수의 정의와 정리를 활용하여 각도, 길이, 면적, 부피 등을 구할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 문항 해설

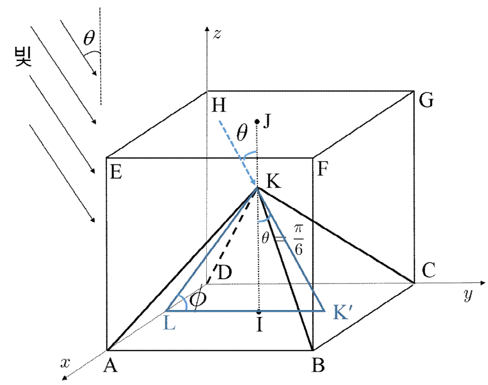
- [2-1] 공간에서 두 평면이 이루는 각, 즉 이면각에 대한 개념에 대한 정확한 이해를 묻는 문항이다. 직교좌표계에 정확한 이면각을 그려 넣으면 피타고라스의 정리 및 간단한 삼각함수 공식을 이용해서 답을 쉽게 구할 수 있다. 문제의 조건을 통하여 다시 설명하면, 주어진 조건을 이용하여 점 K의 위치를 찾고 점 K를 포함하고 yz평면에 평행인 단면에서 삼각비를 활용하면 해결할 수 있다.
- [2-2] 공간에 있는 물체를 평면에 나타낼 때, 방향에 따른 투상 되는 물체의 정사영에 대한 이해를 묻는 문항이다. 빛이 비추는 각도에 따라 xy평면에 만들어지는 □ADHE의 정사영의 면적이 원래의 면적에 비해 어떻게 변화할지를 직관적으로 생각하면, 매우 쉽게 답을 구할 수 있다. 구한 면적 변화는 결국 빛의 각도 θ의 함수로 얻을 수 있고, 삼각함수 덧셈정리를 이용하여 함수를 정리한 후, 이를 삼각함수의 적분공식을 통해서 적분 값을 구하는 것이다.
- [2-3] 공간도형에 관한 문제를 좌표 또는 벡터를 써서 해결하는 방법에 대한 이해를 묻는 문항이다. 벡터의 연산을 통해 특정 벡터 Z(무게중심의 위치벡터에 해당됨)의 좌표를 얻을 수 있고, 각각의 공간좌표에 벡터의 내적을 이용하면 벡터간의 사이 각을 구할 수 있다. 또는 무게중심의 정의로부터 벡터 연산을 이끌어 내어 직관적으로 풀 수도 있다. 그리고 주어진 식의 값을 구하는 과정은 삼각함수 반각공식을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.
- [2-4] 공간에서의 도형의 성질을 통해 도형들(여기서는 평면과 구) 사이에서의 관계에 대한 이해를 묻는 문항이다. 공간도형의 성질을 잘 이해하면, 최대 부피를 가지는 조건을 알아낼 수 있고, 이를 문항에 적용하면 평면들과 내접하는 구의 중심좌표 사이의 거리가 일정함을 의미한다. 이를 통하여 구의 중심점과 평면들 사이의 거리가 모두 같다는 관계식을 얻을 수 있고 결국, 구의 대원을 포함하는 평면으로 자른 단면에서 삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 구하여 최대 부피를 가지는 구의 표면적을 구할 수 있다.

3. 채점기준

- [2-1] 이면각 및 정사영을 이해하여 삼각형을 제대로 그리고 삼각함수의 정의와 정리를 적용하여 이면각의 크기를 구할 수 있는지 평가한다.
- [2-2] 정사영의 면적을 구하고 삼각함수의 정리를 이용하여 간단히 나타낸 후 이의 정적분을 치환적분을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.
- [2-3] 주어진 관계식으로부터 점의 좌표를 구하고 내적의 정의와 성질을 이해하며 삼각함수의 정리를 활용할 수 있는지 평가한다.
- [2-4] 사각뿔에 내접하는 구가 갖는 성질을 이용하여 구의 반지름의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 답안 사례

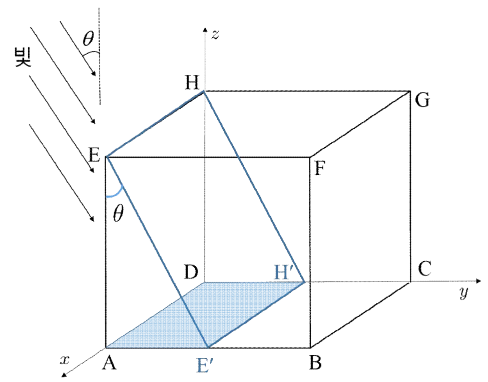
[2-1]



점 I에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{L}(1,0,0)$, 점 K의 그림자를 $\mathrm{K}'(1,\frac{3}{2},0)$이라 하자. 점 I의 좌표가 $(1,1,0)$이므로 $\overline{\mathrm{IK}'}=\frac{1}{2}$이 되고, 직각삼각형 KIK'에서, $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{KI}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{KK}'}=1$이다. 따라서 직각삼각형 KLI에서, $\overline{\mathrm{LI}}=1$이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{KL}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$이다.

그러므로 $\cos\phi=\frac{\overline{\mathrm{LI}}}{\overline{\mathrm{KL}}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$이다.

[2-2]



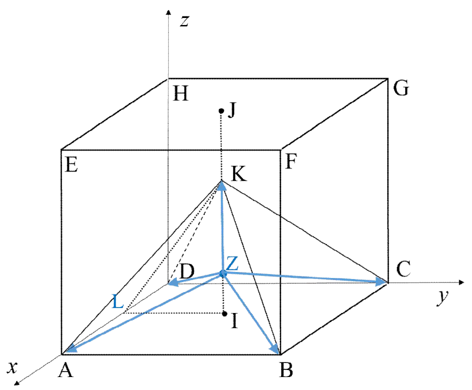
빛이 입사되는 각도는 3시간 동안 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하므로 θ일 때의 그림자의 면적에서 $\theta+\frac{\pi}{4}$일 때의 그림자의 면적을 빼면 된다. 한편, 그림자의 면적은 $\overline{\mathrm{AD}}\,\overline{\mathrm{AE}'}=2\cdot 2\tan\theta$이다. 그러므로

$$f(\theta)=4\tan\theta-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=4\left(\tan\theta-\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$=4\left(\tan\theta-\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}\right)$$
$$=4\left(\frac{-\tan^2\theta-1}{1-\tan\theta}\right)=\frac{-4\sec^2\theta}{1-\tan\theta}$$

이 되고 이를 적분하면, $0<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{4}$에 대하여

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(\theta)d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{-4\sec^2\theta}{1-\tan\theta}d\theta=4\ln\left(\frac{1-\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1}\right)\text{이다.}$$

[2-3]



$\triangle$ADK가 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\overline{KL}=\sqrt{3}$이고

$\overline{KI}=\sqrt{(\overline{KL})^2-(\overline{LI})^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$가 된다.

그러므로 $K(1,\ 1,\ \sqrt{2})$이다.

$Z=(1,1,z)$라 놓고 $\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{ZB}+\overrightarrow{ZC}+\overrightarrow{ZD}+\overrightarrow{ZK}=0$

를 이용해서 풀면 $Z(1,\ 1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{5})$이므로

$\overrightarrow{AZ}=(-1,\ 1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{5})$, $|\overrightarrow{AZ}|=\dfrac{\sqrt{52}}{5}$이다.

한편, $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$,

$\overrightarrow{AK}=(-1,1,\sqrt{2})$이고 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AK}|=2$이다.

그러므로

$$\cos\rho_1=\frac{\overrightarrow{AZ}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AZ}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{5}{\sqrt{52}},\quad \cos\rho_2=\frac{5}{\sqrt{52}},$$

$\cos\rho_3=\dfrac{6}{\sqrt{52}}$이 되어

$$2\left(\cos^2\frac{\rho_1}{2}-\sin^2\frac{\rho_2}{2}\right)+\cos^2\frac{\rho_3}{2}$$

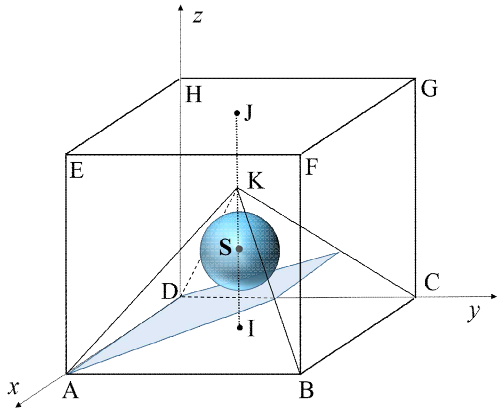
$$=2\left(\frac{1+\cos\rho_1}{2}-\frac{1-\cos\rho_2}{2}\right)+\frac{1+\cos\rho_3}{2}$$

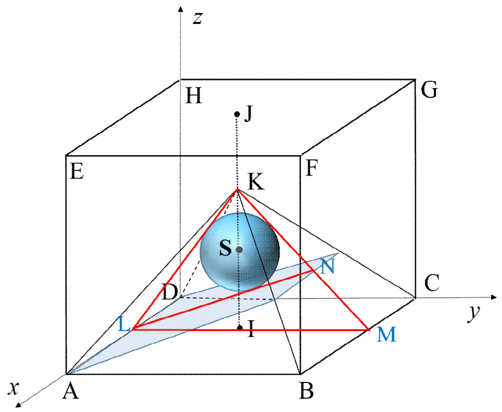
$$=\cos\rho_1+\cos\rho_2+\frac{\cos\rho_3}{2}+\frac{1}{2}$$

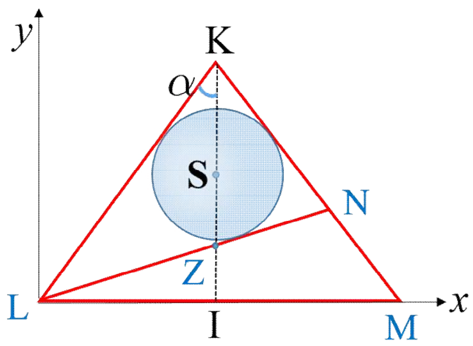
$$=\frac{\sqrt{13}+1}{2}$$

이다.

[2-4]







부피가 최대가 되게 하는 구의 중심을 S, 그 반지름의 길이를 r, $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 M, $\overline{\mathrm{LZ}}$의 연장선과 $\overline{\mathrm{KM}}$의 교점을 N이라 하자. 이 때, 평면 $x=1$로 자른 단면을 마지막 그림과 같이 좌표평면 위에 놓으면

$\mathrm{L}(0,0), \mathrm{M}(2,0), \mathrm{K}(1, \sqrt{2}), \mathrm{Z}(1, \frac{\sqrt{2}}{5})$이다. 점N은 $\overline{\mathrm{LZ}}$를 품는 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{5}x$와 $\overline{\mathrm{KM}}$를 품는 직선 $y=-\sqrt{2}(x-2)$의 교점이므로 $\mathrm{N}=(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{KL}}=\overline{\mathrm{LN}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{NK}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$이다. 한편, $\alpha=\angle\mathrm{LKI}$라 하면

$\sin\alpha=\frac{\overline{\mathrm{LI}}}{\overline{\mathrm{KL}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha=\frac{\overline{\mathrm{KI}}}{\overline{\mathrm{KL}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로

$\triangle\mathrm{KLN}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{KL}}\,\overline{\mathrm{NK}}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

또한

$\triangle\mathrm{KLN}=\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{KL}}+\overline{\mathrm{LN}}+\overline{\mathrm{NK}})r=(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}})r$이므로

$r=\frac{1}{\sqrt{6}}$이 되어 구의 표면적은 $4\pi r^2=\frac{2\pi}{3}$이다.