2016 수시모집 논술전형 자연계열 논술고사

화공생명공학전공/수학전공/물리학전공/화학전공/생명과학전공

문제 1

Ⅰ. 문제

문제1 (40%, 글자 수 제한 없음)

[가] 고대 그리스 시대의 수학자 아르키메데스는 도형의 면적이나 부피를 구하는데 오늘날의 적분과 유사한 방법을 사용하였다. 아르키메데스는 구분구적법을 이용하여 원, 구, 포물선의 면적과 부피를 구하는 증명을 제시하였다. 구분구적법 문제는 이후 오랫동안 별다른 진전을 보이지 못하였다가 르네상스 시기에 이르러 카발리에리가 무한의 개념을 도입하면서 진전이 있었다. 1622년 카발리에리는 곡선으로 둘러싸인 도형의 면적을 매우 폭이 좁은 직사각형들의 면적을 합한 것으로 이해할 수 있다는 착상을 내놓았다. 케플러는 포도주 통의 내측 부피를 구하기 위해 포도주 통을 이루는 입체도형을 얇은 막들의 집합으로 파악하여 합산하였다. 이와 같은 아이디어의 축적은 미적분학으로 발전하는데, 데카르트가 제시한 좌표 평면과 해석기하학의 출현은 이에 중요한 밑거름이 되었다. 뉴턴과 라이프니츠는 각자 독자적으로 미적분학을 수립하였으며 적분은 결국 미분의 역산으로 부정적분을 구하는 것과 같다는 사실을 발견하였다. 이를 미적분학의 기본정리라고 한다. 또한 미적분학의 기본정리로부터 정적분의 기본정리를 쉽게 이끌어 낼 수 있다. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때 이의 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$는 다음의 극한으로 정의된다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}$$

[나] 코사인, 사인 함수의 덧셈정리는 다음의 행렬에 관한 식으로 요약될 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

이로부터 탄젠트 함수의 덧셈정리, 그리고 코사인, 사인, 탄젠트 함수의 배각의 공식, 반각의 공식 등을 쉽게 이끌어 낼 수 있다.

[다] (중간값의 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$를 만족하는 실수 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

[3-1] 제시문 [나]를 참고하여 $\sum_{k=0}^{n-1} \cos k\theta = \frac{1}{2}(1-\cos n\theta) + \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta$ 임을 보이시오. 여기서 n은 자연수이고 θ는 $0 < \theta < 2\pi$ 인 실수이다.

[3-2] 문항 [3-1]을 참고하여 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$(1-\cos\theta)(\cos(n+1)\theta + \cos n\theta) = \sin\theta(\sin(n+1)\theta - \sin n\theta)$$ (단, θ는 임의의 실수)

[3-3] 제시문 [가]를 참고하여 $f(x) = \cos ax$의 정적분 $A(a) = \int_0^1 \cos ax\, dx$ 의 값을 정적분의 정의를 사용하여 구하시오. 여기서 a는 양의 실수이다.

[3-4] 제시문 [나], [다]를 참고하여 문항 [1-3]에서 구한 $A(a)$ (단, $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$)는 열린 구간 $\left(\frac{12\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}\right)$에서 단 하나의 극소점을 가짐을 보이시오.

(단, $\tan\frac{\pi}{9} \fallingdotseq 0.364$, $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.732$, $\pi \fallingdotseq 3.142$이다.)

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

미적분의 기본 개념과 일차 회전변환 행렬의 성질 및 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 행렬의 연산, 수열의 부분 합과 일반항의 관계 및 삼각함수의 주기성과 덧셈정리, 반각정리, 배각정리를 이해하고 정적분의 정의 및 중간값의 정리를 활용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

2. 문항 해설

- [3-1] 이 문제는 고등학교 교과과정의 행렬의 덧셈과 곱셈을 활용하여 주어진 급수의 합을 구하는 문제이다. 이 문제를 해결하는데 가장 중요한 것은 주어진 급수의 합 $\sum_{k=0}^{n-1} \cos k\theta$이 행렬 $S = I + A + A^2 + \cdots A^{n-1}$의 (1,1) (또는 (2,2)) 성분이라는 사실이다. 여기서 A는 다음의 행렬이다.
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
그리고 이 합을 구하는 데는 A의 거듭제곱 A^n가 다음과 같이 주어진다는 것인데, 이는 수학적 귀납법으로 간단히 해결할 수 있으며『황석근 외, 고등학교 기하와 벡터 익힘책, 교학사, p.204』에 증명되어 있다.
$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$
- [3-2] 수열의 부분 합으로부터 그 일반항을 구하는 문제이다. $S_n - S_{n-1} = a_n$을 이용하여 일반항을 구한 후 이 식을 정리하면 된다. 그리고 구한 식이 0과 2π에서도 성립하고 사인, 코사인 함수의 주기가 2π라는 사실도 이용해야 한다. 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 것도 가능하고, 두 항을 빼서 0이 되는 것을 통하여 상대적으로 쉽게 항등식이 성립함을 증명할 수 있다. 하지만 이들은 문항 [3-1]의 내용을 사용하는 증명이 아니다.
- [3-3] 제시문 [가]에서 언급한 정적분의 정의를 활용하여 정적분 $A(a) = \int_0^1 \cos ax\,dx$을 구하는 문항으로 [3-1]의 결과를 θ에 $\frac{a}{n}$을 대입시켜 활용하여야 한다. 이후 극한을 이용한 정적분의 정의를 통해 $A(a)$를 구할 수 있고, 그 과정에서 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이라는 사실을 이용한다.
- [3-4] 이 문항은 중간값의 정리를 활용하여 문항 [3-3]에서 구한 함수 $A(a) = \frac{\sin a}{a}$가 열린구간 $(\frac{12\pi}{9}, \frac{13\pi}{9})$에서 단 하나의 극솟값을 가짐을 보이는 문제이다. $h(a) = \tan a - a$ 에 대하여, $h(\frac{13\pi}{9}) > 0$ 이고 $h(\frac{12\pi}{9}) < 0$ 임을 보이는 데 있어 탄젠트 함수의 덧셈정리와 주어진 근사 값 $\tan\frac{\pi}{9} = 0.364$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\pi = 3.142$ 을 사용하는 것이 요구된다.

3. 채점기준

- [3-1] 행렬의 덧셈과 곱셈, 역행렬을 활용하여 주어진 수열의 부분 합을 계산할 수 있는지 평가한다.

- [3-2] 수열의 부분 합으로부터 그 일반항을 구하여 정리하고 주기 함수인 삼각함수의 특징을 이해하는지 평가한다.
- [3-3] 정적분의 정의를 이해하며 극한을 계산할 수 있는지 평가한다.
- [3-4] 삼각함수의 덧셈정리, 중간값 정리 및 도함수와 함수의 관계를 활용하여 주어진 구간에 단 하나의 극솟값이 존재함을 보일 수 있는지 평가한다.

4. 답안 사례

[3-1]

A을 2×2 행렬 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$라 하자. 제시문 [나]에 따르면, 모든 자연수 n에 대하여

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

이다.

그러므로 $\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta$ 는 행렬 $S=I+A+A^2+\cdots A^{n-1}$의 (1,1) 성분과 같다. 한편,

$$\begin{aligned}(I-A)S &= S-AS\\ &=(I+A+\cdots+A^{n-1})-(A+A^2+\cdots+A^n)\\ &=I-A^n\end{aligned}$$

이고, $0<\theta<2\pi$이므로 $I-A=\begin{pmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$는 역행렬

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{2-2\cos\theta}\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}$$

를 갖는다.

따라서

$$\begin{aligned}S&=(I-A)^{-1}(I-A^n)\\ &=\frac{1}{2-2\cos\theta}\begin{pmatrix}1-\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & 1-\cos n\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이므로 (1,1) 성분으로부터

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta&=\frac{1}{2-2\cos\theta}((1-\cos\theta)(1-\cos n\theta)+\sin\theta\sin n\theta)\\ &=\frac{1}{2}(1-\cos n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta\end{aligned}$$

를 얻는다.

[3-2]

자연수 n에 대하여 $S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\cos k\theta$라 하면, $0<\theta<2\pi$ 인 θ에 대하여 문항 [3-1]로부터

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= S_n-S_{n-1}\\ &=\left[\frac{1}{2}\{1-\cos(n+1)\theta\}+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin(n+1)\theta\right]-\left[\frac{1}{2}(1-\cos n\theta)+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\sin n\theta\right]\\ &=\frac{1}{2}\{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta\}+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\{\sin(n+1)\theta-\sin n\theta\}\end{aligned}$$

이다. 이를 정리하면

$$\frac{1}{2}\{\cos(n+1)\theta+\cos n\theta\} = \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\{\sin(n+1)\theta-\sin n\theta\}$$

이므로

(*) $$(1-\cos\theta)(\cos(n+1)\theta+\cos n\theta)=\sin\theta(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta)$$

가 성립한다.

또한 (*)는 $\theta = 0$인 경우에도 명백히 성립하고, 또한 사인 코사인 함수의 주기가 2π이므로 (*)는 모든 실수에 대하여 성립한다.

[3-3]

양의 실수 a에 대하여, 정적분의 정의로부터 $A(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{ak}{n})$이므로 $n>\frac{a}{2\pi}$인 자연수 n에 대하여 문항 [3-1]의 식에 $\theta=\frac{a}{n}$를 대입하면

(**) $$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{ak}{n})=\frac{1-\cos a}{2}+\frac{\sin a}{2}\frac{\sin\frac{a}{n}}{1-\cos\frac{a}{n}}$$

를 얻는다.

따라서

$$\begin{aligned}
A(a) &= \frac{1-\cos a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\frac{\sin a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{a}{n}}{1-\cos\frac{a}{n}} \\
&= \frac{\sin a}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{x}{a}\sin x}{1-\cos x} \\
&= \frac{\sin a}{2a}\lim_{x\to 0+}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \frac{\sin a}{2a}\lim_{x\to 0+}\frac{1+\cos x}{\frac{\sin x}{x}} \\
&= \frac{\sin a}{2a}\cdot\frac{1+1}{1} \\
&= \frac{\sin a}{a}
\end{aligned}$$

이다.

[3-4]

$A(a)=\frac{\sin a}{a}$ (a는 양의 실수)이므로

$$A'(a)=\frac{a\cos a-\sin a}{a^2}=\frac{\cos a(a-\tan a)}{a^2}=0$$

는 $a=\tan a$ ($\pi<a<\frac{3\pi}{2}$)일 때만 가능하다. 이제 $h(a)=\tan a-a$ ($\pi<a<\frac{3\pi}{2}$)라 하면 $A'(a)$와 $h(a)$의 부호는 항상 같다.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

을 이용하면,

$$\tan\frac{4\pi}{9}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{9}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{9}}=\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{9}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{9}}\fallingdotseq\frac{1.732+0.364}{1-1.732\times0.364}>5$$

이다. 이제 h는 닫힌구간 $[\frac{12\pi}{9},\frac{13\pi}{9}]$에서 연속이고,

$$h\left(\frac{13\pi}{9}\right)=\tan\frac{4\pi}{9}-\frac{13\pi}{9}>5-\frac{13\times3.2}{9}>0,$$

$$h\left(\frac{12\pi}{9}\right)=\tan\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}<0$$

이므로 중간값 정리에 의하여 열린구간 $(\frac{12\pi}{9},\frac{13\pi}{9})$에서 $h(a)=0$인 $a=\alpha$를 갖는다.

따라서 이 구간에 $A'(a)=0$인 $a=\alpha$가 존재한다.

그런데, 열린 구간 $(\pi,\frac{3\pi}{2})$에서 $h'(a)=\sec^2a-1=\tan^2a>0$ 이므로 $h(a)$는 증가함수이고,

$h(\alpha)=0$이므로 $\pi<a<\alpha$에서 음의 값, $\alpha<a<\frac{3\pi}{2}$에서 양의 값을 가진다.

그러므로 $\frac{12\pi}{9}<a<\alpha$에서 $A'(a)<0$이고, $\alpha<a<\frac{13\pi}{9}$에서 $A'(a)>0$이다.

따라서 $a=\alpha$는 열린구간 $(\frac{12\pi}{9},\frac{13\pi}{9})$에서 $A(a)$는 단 하나의 극소점을 갖는다.

문제 2

Ⅰ. 문제

문제2 (60%, 글자 수 제한 없음)

[가] 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+y)^n$을 전개하면 다음과 같다.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k y^{n-k}$$

이것을 다항식 $(x+y)^n$에 대한 이항정리라고 한다. 여기서 ${}_n\mathrm{C}_k$는 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 서로 다른 k개 (단, $n \geq k$)를 선택하는 경우의 수를 나타낸다. 이항정리를 이용하면 이항계수 사이에 성립하는 흥미로운 등식들을 이끌어 낼 수 있다. 예를 들어 위의 등식에서 $x=1, y=1$을 대입하면 $2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k$가 성립함을 알 수 있다. 또한 $y=1$을 대입하면 $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k$을 얻을 수 있으며 이 등식의 양변을 x에 관해 미분하거나 적분한 뒤 $x=1$을 대입하면 다른 등식들도 이끌어 낼 수 있다. y 대신에 상수가 아닌 변수를 대입할 수도 있는데 $y=1-x$를 대입하면 $1 = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k (1-x)^{n-k}$을 얻고 이로부터 여러 등식을 유도할 수 있다.

[나] 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라고 하며, 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수를 ${}_n\mathrm{H}_r$이라고 표기한다. 그러면 등식 ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이 성립한다. 예를 들어 방정식 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$(단, n과 r은 자연수)의 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다. 또한 두 집합 $X = \{1, 2, \cdots, r\}$, $Y = \{1, 2, \cdots, n\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 중에서

$$x_1, x_2 \in X\text{에 대하여 } x_1 < x_2 \text{이면 } f(x_1) \leq f(x_2)$$

를 만족시키는 함수 f의 개수도 ${}_n\mathrm{H}_r$과 같다.

[4-1] 1보다 큰 자연수 n에 대하여 a_n은 곡선 $y = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$, 직선 $x = n^2$, 직선 $y = 1$로 둘러싸인 영역(단, 경계 포함)에 있는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 나타낸다. a_n을 n에 관한 식으로 나타내시오.

[4-2] 자연수 n에 대하여

$$A(n)=\left(6(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k \cdot {}_{n}\mathrm{C}_{k}}{k(k+1)}+5n+17\right)\cdot 2^{-n}$$

라고 하자. (여기서 $a_1=1$이고 $a_n\,(n\geq 2)$은 문항 [2-1]에서 주어진다.) 제시문 [가]를 참고하여 $A(n)$을 n에 관한 식으로 나타내시오.

[4-3] l이 어떤 자연수라고 하자. l보다 큰 모든 자연수 n에 대하여

$a_n = \sum_{k=1}^{n-l}(-1)^{n-k-l}\ {}_{n}\mathrm{C}_{k}\cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_{l}$ 이라고 할 때 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{a_{2n}}{a_n}$을 구하시오.

(제시문[가] 참고)

[4-4] 기차역인 A역과 B역 사이에는 총 r개의 역(단, A역과 B역은 제외)이 있다. A역에서 출발한 기차가 B역에 도착할 동안 이 r개의 역 중에서 n개의 역에만 정차한다고 한다. (여기서 n은 1보다 크고 r은 $\frac{n(n+1)}{2}$보다 큰 자연수이며, $(n+1)$번째 정차역은 B역이다.) 자연수 $i=1,2,\cdots,n-1$에 대하여 이 기차가 i번째 정차한 역과 $(i+1)$번째 정차한 역 사이에는 적어도 i개의 역(단, i번째 정차한 역과 $(i+1)$번째 정차한 역은 제외)이 있다고 한다. 가능한 총 운행 방법의 수를 ${}_{s}\mathrm{H}_{t}$ 형태로 나타낼 때 s와 t를 구하시오. (제시문 [나] 참고)

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

수열, 극한, 순열과 조합, 이항정리에 대한 기본 개념 및 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 수열의 합, 중복조합의 뜻과 그 조합의 수, 이항정리와 이항정리의 응용을 통하여 여러 문제를 해결할 수 있는지 평가하고자 하였다.

2. 문항 해설

- [4-1] 자연수의 거듭제곱으로 주어진 수열의 합을 이용하여 주어진 영역에 포한된 정수 점들의 개수 a_n을 계산할 수 있는지 묻는 문제이다. 함수 값 $\sqrt{k}$에 대하여, $[\sqrt{k}]=i$를 만족하는 자연수 i의 개수를 구하여, 격자점의 개수를 i에 관한 식으로 나타내고, 이 식을 일반항 a_n으로 하여 직접 Σ의 성질을 이용하거나 계차수열을 공식을 이용하여 n으로 표현 할 수 있다.
- [4-2] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 있는지 묻는 문제이다. 교과서에서는 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k$의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 대입하여 이항계수의 기본 성질을 유도하는 내용 정리를 하고 있다. 그리고 문제에서는 이를 심화하여 $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k$를 미분하거나 적분한 뒤 $x=1$을 대입하여 이항계수의 여러 가지 성질을 이끌어낼 수 있고 이를 활용할 수 있는지에 대하여 묻고 있다. 비록 교과서에서 다루는 내용보다는 심화된 내용 이지만 제시문 [가]를 참고하면 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k$의 미분과 적분이 문제 해결의 실마리가 됨을 어렵지 않게 연상할 수 있으리라 생각한다.
- [4-3] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 있는지 묻는 문제이다. 두 변수 x, y에 대한 이항정리 $(x+y)^{n-l} = \sum_{k=0}^{n-l} {}_{n-l}\mathrm{C}_k\, x^k y^{n-l-k}$ 의 활용은 고등학교 교육과정을 벗어난 것은 아니지만 학생들에게 생소할 수 있다고 본다. 더구나 조합 항등식 ${}_n\mathrm{C}_k\ {}_{n-k}\mathrm{C}_l = {}_n\mathrm{C}_l\ {}_{n-l}\mathrm{C}_k$ 을 유도하고 적용하는 과정은 상당히 연상하기 어려운 과정이라고 생각하며, $(x+y)^{n-l} = \sum_{k=0}^{n-l} {}_{n-l}\mathrm{C}_k\, x^k y^{n-l-k}$에 $x=1, y=-1$을 대입하여 $\sum_{k=0}^{n-l} (-1)^{n-l-k}\ {}_{n-l}\mathrm{C}_k = 0$이 되어 $\sum_{k=1}^{n-l} (-1)^{n-l-k}\ {}_{n-l}\mathrm{C}_k = (-1)^{n-l+1}$이 됨을 첨수를 비교하여 유추하는 과정 또한 높은 관찰 능력을 필요로 함을 알 수 있다.
- [4-4] 문제의 상황을 이해하고 필요한 변수를 설정하여, 부정방정식

  $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = r+1 \text{ (단, } x_i \ge i \ (1 \le i \le n) \text{ 이고 } x_{n+1} \ge 1)$$

  을 유도하는 것이 핵심 과정이다. 그리고 이 부정방정식의 근의 순서쌍의 개수와 중복조합의 관계를 알고, 그 조합의 수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

3. 채점기준

- [4-1] 자연수의 거듭제곱으로 주어진 수열의 합을 이용하여 주어진 영역에 포한된 정수점들의 개수를 계산할 수 있는지 평가한다.
- [4-2] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

- [4-3] 이항정리를 통해 이항계수 사이에 성립하는 관계를 이끌어낼 수 있는지 평가한다.
- [4-4] 주어진 문제를 중복조합으로 해석할 수 있는 능력이 있는지 평가한다.

4. 답안 사례

[4-1]

$a_1 = 1$은 분명하다. 이제 n을 2 이상의 자연수라 하자. 자연수 $i = 1, 2, \cdots, n-1$에 대하여 자연수 k가 $[\sqrt{k}] = i$이기 위한 필요충분조건은 $i^2 \le k < (i+1)^2$이다. 그러므로 주어진 영역에 속하면서 x좌표가 k (단, $i^2 \le k < (i+1)^2$)인 정수점의 개수는 i개이며 $i^2 \le k < (i+1)^2$를 만족하는 자연수 k의 개수는 $(2i+1)$이므로

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} (2i+1)i + n = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6} \quad (n\text{은 2 이상의 자연수})$$

이다.

$$a_1 = 1 = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6} \Big|_{n=1}$$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6}$$ 이다.

[4-2]

문항 [4-1]에 의하여

$$(*) \qquad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot {}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2 - 3k + 5}{6(k+1)}\, {}_n\mathrm{C}_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4k(k+1) - 7(k+1) + 12}{6(k+1)}\, {}_n\mathrm{C}_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{3} - \frac{7}{6} + \frac{2}{k+1} \right) {}_n\mathrm{C}_k \\ &= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k - \frac{7}{6} \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1} \end{aligned}$$

이다. 제시문 **[가]**에 의해 등식 $2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k$이 성립하므로

등식 (i): $\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n - 1$

을 얻는다. 또한 전개식 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k$의 양변을 x에 대하여 미분한 후 $x = 1$을 대입하면

등식(ii): $n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k$

를 이끌어 낼 수 있다. 한편, 등식 $\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k dx$

로부터 $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$을 얻고, 이로부터

등식(iii): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}-1=\frac{2^{n+1}-n-2}{n+1}$

를 얻는다. 등식 (i), (ii), (iii)을 (*)에 대입하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k\cdot{}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)}&=\frac{2n\cdot 2^{n-1}}{3}-\frac{7(2^n-1)}{6}+\frac{2(2^{n+1}-n-2)}{n+1}\\&=\frac{(2n^2-5n+17)2^n-5n-17}{6(n+1)}\end{aligned}$$

이므로

$$A(n)=\left(6(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k\cdot{}_n\mathrm{C}_k}{k(k+1)}+5n+17\right)\cdot 2^{-n}=2n^2-5n+17$$

이다.

[4-3]

등식

$${}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_{n-k}\mathrm{C}_l=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!}=\frac{n!}{l!(n-l)!}\cdot\frac{(n-l)!}{k!(n-l-k)!}={}_n\mathrm{C}_l\cdot{}_{n-l}\mathrm{C}_k$$

가 성립하므로

(**) $\qquad a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-l}(-1)^{n-k-l}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_{n-k}\mathrm{C}_l={}_n\mathrm{C}_l\sum_{k=1}^{n-l}(-1)^{n-l-k}{}_{n-l}\mathrm{C}_k$

이다. 한편, 다항식 $(x+y)^{n-l}$의 이항정리

$$(x+y)^{n-l}=\sum_{k=0}^{n-l}{}_{n-l}\mathrm{C}_k\,x^k y^{n-l-k}$$

에 $x=1, y=-1$을 대입하면 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-l}(-1)^{n-l-k}{}_{n-l}\mathrm{C}_k=0$이므로

$$\sum_{k=1}^{n-l}(-1)^{n-l-k}{}_{n-l}\mathrm{C}_k=(-1)^{n-l+1}$$

임을 알 수 있다. 이 결과를 (**)에 대입하면

$$a_n=(-1)^{n-l+1}{}_n\mathrm{C}_l$$

이 된다. 그러므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{a_{2n}}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_l}{{}_n\mathrm{C}_l}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-(l-1))}{n(n-1)\cdots(n-(l-1))}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(2-\frac{l-1}{n}\right)}{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{l-1}{n}\right)}\\&=2^l\end{aligned}$$

이다.

[4-4]
A역과 B역 사이에 있는 r개의 역(A, B역 제외)을 A역에서 B역 방향으로 순서대로 1번역, 2번역, $\cdots$, r번역이라고 부르자. 편의상 B역은 $(r+1)$번역이라 하자. 이제 x_1을 첫 번째 도착역의 번호, x_i $(i=2,3,\cdots,n,n+1)$을 i번째 도착한 역의 번호에서 $(i-1)$번째 도착한 역의 번호를 뺀 값이라

하자. 여기서 $(n+1)$번째 도착역은 B역이라고 하자. 문제의 가정에 의해 자연수 $i=2,3,\cdots,n$에 대해 $(i-1)$번째 도착한 역과 i번째 도착한 역 사이에는 적어도 $(i-1)$개의 역이 있으므로 $x_i \ge i$임을 알 수 있다. 그러면

$x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=r+1$ (단, $x_i \ge i$ $(1 \le i \le n)$ 이고 $x_{n+1} \ge 1$)

이제 $x_i = y_i + i$ $(1 \le i \le n)$, $x_{n+1}=y_{n+1}+1$라고 두면 위 식은

$$y_1+y_2+\cdots+y_n+y_{n+1}=r+1-\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)=r-\frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{단, } y_i \ge 0 \ (1 \le i \le n+1))$$

이 된다. 그러므로 제시문 **[나]**에 의해 구하는 답은 ${}_{n+1}\mathrm{H}_{r-\frac{n(n+1)}{2}}$이다. 한편

$$ {}_{n+1}\mathrm{H}_{r-\frac{n(n+1)}{2}} = {}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+n}\mathrm{C}_{r-\frac{n(n+1)}{2}} = {}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+n}\mathrm{C}_{n} = {}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+1}\mathrm{H}_{n}$$

이므로 ${}_{r-\frac{n(n+1)}{2}+1}\mathrm{H}_{n}$ 역시 답이 된다.