2015학년도 수시모집 논술전형 자연계열 논술고사

공학부

문제 1

Ⅰ. 문제

<문제 1>

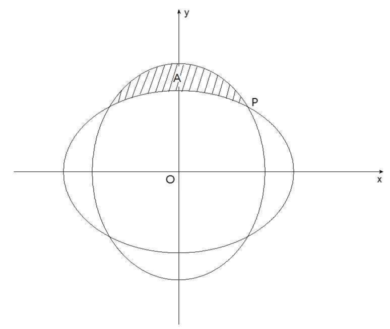
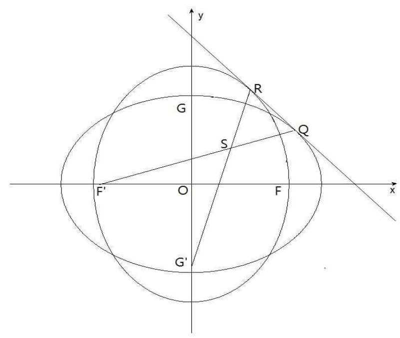
[가] 곡물이나 기름 등을 운반하는 탱크 트럭을 뒤에서 보면 용기의 단면이 원을 살짝 눌러 놓은 듯한 모양인데, 이 도형을 타원이라고 한다. 탱크 트럭에서 타원형 용기를 사용하는 이유는, 부피는 원형 용기보다 조금 작지만 무게중심의 위치가 더 낮기 때문에 트럭이 회전할 때 뒤집힐 가능성은 훨씬 적어지기 때문이라고 한다. 미국의 백악관의 대통령 집무실인 청실(Blue Room)의 천장이 타원으로 이루어져 있다. 또한, 독일의 천문학자 케플러는 태양계 행성의 공전 궤도가 타원임을 발견하였으며, 영국의 수학자 뉴턴은 공전 궤도가 타원임을 수학적으로 증명하였다.

[나] 두 초점 $\mathrm{F}(\mathrm{c},0), \mathrm{F}'(-\mathrm{c},0)$ 에서의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>c>0,\ b^2=a^2-c^2$)로 주어진다. 이 때 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$이다. 마찬가지로 두 초점 $\mathrm{G}(0,\mathrm{c}), \mathrm{G}'(0,-\mathrm{c})$ 에서의 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b>c>0,\ a^2=b^2-c^2$)로 주어진다. 이 때 장축의 길이는 $2b$, 단축의 길이는 $2a$이다.

[다] 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a,\ x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ 로 주어진다.

【1-1】 타원의 방정식 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 로 주어진 타원 E_1을 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전하여 얻어진 타원을 E_2라 하자. E_1과 E_2가 만나는 교점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ (단, $x_1>0, y_1>0$)라고 하자(【그림 1】 참고). E_1 위의 점 P에서의 접선과 E_2 위의 점 P에서의 접선이 이루는 예각을 θ라고 할 때 $\sqrt{\cot\theta}$ 를 구하시오.

【1-2】 문제 【1-1】에서 정의된 타원 E_1의 두 초점을 F, F'이라고 하고, 타원 E_2의 두 초점을 G, G'이라고 하자(【그림 2】 참고). 두 개의 타원 E_1과 E_2에 동시에 접하는 직선이 E_1과 만나는 점을 $\mathrm{Q}(\mathrm{s}_1, \mathrm{t}_1)$(단, $\mathrm{s}_1>0,\ \mathrm{t}_1>0$) , E_2와 만나는 점을 $\mathrm{R}(\mathrm{s}_2, \mathrm{t}_2)$(단, $\mathrm{s}_2>0,\ \mathrm{t}_2>0$) 이라고 하자. 또한 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{Q}$ 와 선분 $\mathrm{G}'\mathrm{R}$ 이 만나는 점을 S라고 하자. 이 때 삼각형 SQR 의 면적을 구하시오.

	
【그림 1】	【그림 2】

【1-3】 제시문 [다]를 참고하여, 두 곡선으로 둘러싸인 영역 A의 면적을 구하시오(【그림 1】 참고).

【1-4】 영역 A를 직선 $y=-5$의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하시오(【그림 1】 참고).

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

타원의 방정식과 회전변환의 이해도를 측정하는 문제이다. 한 개의 타원과 이를 90도 회전이동하여 얻은 타원과의 교점, 공통 접선, 삼각형의 면적, 둘러싸인 영역의 면적과 회전한 회전체의 부피를 찾을 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

2. 채점기준

[1-1] 문제에 나온 것과 같이 회전변환 관계인 두 타원의 식을 서로 연립하여 교점을 구하는 것을 평가한다. 그리고 접선의 기울기를 이용하여 $\sqrt{\cot\theta}$를 구하는 것 역시도 평가한다.

[1-2] 두 타원의 접선의 방정식이 서로 같다는 부분을 이용하여 공통된 접선의 방정식을 구하고 각 타원의 접점이 타원의 초점과 만나는 직선을 구하고, 그 교차점을 구하여 이로 인해 생기는 삼각형의 면적을 구하는 것을 평가한다.

[1-3] 두 타원의 공식을 바탕으로 면적의 공식에 반영하여 구하는 과정을 평가한다. 치환적분을 이용하여 값을 정확히 구하는 부분이 필요하다.

[1-4] 영역 A를 구성하는 도형의 방정식을 회전체의 공식에 반영하여 회전체의 부피를 구하는 과정을 평가한다. 위의 문제와 동일하게 치환적분을 이용하여 값을 정확히 구하는 부분이 필요하다.

3. 고등학교 교육과정과의 연계성

문제1은 고교 일반 교과서의 「기하와 벡터」과정에 나오는 타원의 방정식과 접선의 공식을 활

용하고, 「적분과 통계」에 나오는 면적과 회전체 부피를 치환적분 방법을 이용하였다.

제시문 [가]와 [나]는 자연계열 학생들이 수강하는 <기하와 벡터> 과목 중 이차곡선 단원에 해당하는 내용이다. 제시문 [나]에서는 기하학적인 타원을 수식으로 나타낸 타원의 방정식에 대하여 설명하고 있다. 제시문 [다]는 '적분과 통계' 과목 중 곡선으로 둘러싸인 넓이 단원에 해당하는 내용이다.

문제 [1-1]은 두 타원의 교점을 구할 수 있는지 묻는 문제이다. 문제 [1-2]는 타원의 접선의 방정식과 삼각형의 넓이를 묻는 문제로 방정식을 연립하여 세 점 Q, R, S의 좌표를 구해야 한다. 문제 [1-3]은 두 타원으로 이루어진 영역의 면적을 구하는 문제이다. 문제 [1-4]는 두 타원으로 이루어진 영역을 x축 둘레로 회전하여 얻어진 회전체의 부피를 구하는 문제이다.

Ⅲ. 제시문 분석 및 답안 사례

1. 제시문 분석

제시문 [가]는 실생활에서 찾아 볼 수 있는 타원의 예시를 언급한 것으로, 타원 단원의 도입부분에 들어 있는 내용을 인용하였다. 제시문 [나]에서는 평면 위의 서로 다른 두 정점 F, F′에서의 거리의 합이 일정한 점들의 집합이라는 타원의 정의로부터 얻을 수 있는 가장 기본적인 형태의 타원의 방정식인 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대하여 설명하고 있다. 한편, 제시문 [다]는 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구하는 것을 설명하고 있다.

2. 답안 사례

문제 [1-1]은 두 타원의 교점을 구할 수 있는지 묻는 문제로, 두 타원의 방정식 모두 중심이 원점에 있는 기본적인 형태로, 타원의 방정식이 문제에 제시되어 있어 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구하면 된다. 문제에서 요구하는 $\cot\theta$를 구하기 위해서는 삼각함수의 탄젠트 덧셈정리에 대한 이해가 필요하다. 문제 [1-2]는 타원의 접선의 방정식과 삼각형의 넓이를 묻는 문제로 방정식을 연립하여 세 점 Q, R, S의 좌표를 구해야 한다. 문제 [1-3]은 두 타원으로 이루어진 영역의 면적을 구하는 문제이다. 구하는 영역을 정적분으로 나타낼 수 있는지를 묻고 있는데, 문제 [1-1]에서 두 타원의 방정식이 제시되어 있기 때문에 간단히 정적분으로 나타낼 수 있다. 문제 [1-4]는 $y=-5$ 둘레로 회전시킨다는 점이 약간 다르지만, 이 $y=-5$를 y축으로 5만큼 평행이동하고 주어진 영역도 그만큼 평행이동한 후 x축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 구하는 공식을 적용하는 것에 대한 이해가 필요하다.

<문제1 답안 사례>

【1-1】 E_1으로부터 $\frac{\pi}{2}$회전하여 얻어진 포물선 E_2의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$로 주어진다.

따라서 $y^2=9(1-\frac{x^2}{16})$를 아래와 같이 대입하면 $\frac{x^2}{9}+\frac{1}{16}(9(1-\frac{x^2}{16}))=1$, 좀 더 간략히 하면

$\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{9}+\frac{9}{16}(1-\frac{x^2}{16})=1\ \Leftrightarrow\ 16x^2+81(1-\frac{x^2}{16})=9\times16$

$\Leftrightarrow\ 16^2x^2 - 81x^2 = 9\times16^2 - 81\times16 \quad \Leftrightarrow 175x^2 = 9\times16\times7 \Leftrightarrow x = \pm\frac{12}{5}$

조건에 의하여 $x>0$이므로 $x_1 = \frac{12}{5}$이다.

따라서 $y^2 = 9(1-\frac{x^2}{16})$에 이를 대입하면 $y^2 = \frac{3^2\times16^2}{4^2\times5^2}$이므로 $y=\pm\frac{12}{5}$. $y>0$이므로 $y_1 = \frac{12}{5}$.

따라서 점 $\mathrm{P}(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$을 얻는다.

타원 E_1위의 점 $\mathrm{P}(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$에서의 접선의 방정식은 공식에 의하여 $\frac{\frac{12}{5}x}{16} + \frac{\frac{12}{5}y}{9} = 1$이다. 이 접선의 기울기 $m_1 = -\frac{9}{16}$이다. 이 직선과 양의 x축과 이루는 각을 θ_1이라고 하면 $\tan\theta_1 = -\frac{9}{16}$이 된다.

마찬가지 방식으로 타원 E_2위의 점 $\mathrm{P}(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$에서 접선의 방정식의 기울기 $m_2 = -\frac{16}{9}$가 된다.

두 접선이 이루는 예각을 θ라고 하면 $\theta = \theta_1 - \theta_2$를 얻는다.

따라서 $\tan\theta = \tan(\theta_1-\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{-9/16-(-16/9)}{1+9/16\times16/9} = \frac{1}{2}(\frac{16^2-9^2}{9\times16}) = \frac{1}{2}\frac{25\times7}{9\times16}$

그러므로 $\sqrt{\cot\theta} = \sqrt{\frac{2\times9\times16}{25\times7}} = \frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} = \frac{12\sqrt{14}}{35}$.

【1-2】 공통접선의 y절편이 양수임을 고려하여, 타원 E_1에 접하는 기울기가 m인 접선의 방정식은 공식에 의하여 $y = mx + \sqrt{m^2\times16+9}$이고 타원 E_2에 접하는 기울기가 m인 접선의 방정식 $y = mx+\sqrt{m^2\times9+16}$이다. 이 두 직선이 서로 같으므로, y절편의 값도 동일해야 한다.

즉 $16m^2+9 = 9m^2+16 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm1$. 따라서 공통접선의 방정식은 $l_1 : y = -x+5$.

한편 타원 E_1위의 점 $\mathrm{Q}(\mathrm{s}_1, \mathrm{t}_1)$에서 접하는 직선의 방정식은

$\frac{s_1x}{16} + \frac{t_1y}{9} = 1 \ \Leftrightarrow y = -\frac{9}{16}\frac{s_1}{t_1}x + \frac{9}{t_1}$이므로 $l_1 : y = -x+5$와 비교하면 $s_1 = \frac{16}{5}, t_1 = \frac{9}{5}$이다.

즉, $\mathrm{Q}(\mathrm{s}_1, \mathrm{t}_1) = \mathrm{Q}(\frac{16}{5}, \frac{9}{5})$이다.

마찬가지로 계산하면 타원 E_2위의 점$\mathrm{R}(\mathrm{s}_2, \mathrm{t}_2)$에서 접하는 직선의 방정식은

$\frac{s_2x}{9} + \frac{t_2y}{16} = 1 \ \Leftrightarrow y = -\frac{16}{9}\frac{s_2}{t_2}x + \frac{16}{t_2}$이므로 $l_1 : y = -x+5$와 비교하면 $s_2 = \frac{9}{5}$, $t_2 = \frac{16}{5}$ 이다.

즉, $\mathrm{R}(\mathrm{s}_2, \mathrm{t}_2) = \mathrm{R}(\frac{9}{5}, \frac{16}{5})$이다.

Q와 R은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또한 $\overline{\mathrm{QR}}$는 $\sqrt{\left(\frac{16-9}{5}\right)^2 + \left(\frac{9-16}{5}\right)^2} = \frac{7}{5}\sqrt{2}$이다.

한편, 직선 $\mathrm{F'Q}$의 방정식은 $y = \frac{9}{16+5\sqrt{7}}(x+\sqrt{7})$이고 직선 $\mathrm{G'R}$의 방정식은

$y = \frac{16+5\sqrt{7}}{9}(x-\sqrt{7})$이다.

두 직선이 만나는 x좌표는 $x = \frac{9\sqrt{7}}{7+5\sqrt{7}} = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$이고 y좌표도 $y = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$이 된다.

따라서 $S=\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}, \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$

원점과 S를 지나는 직선의 방정식은 $y=x$이며 이는 $l_1: y=-x+5$과 수직임을 알 수 있다.

따라서 S로부터 직선 l_1의 수선의 발은 선분 QR의 중점 $M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$이 된다. $\overline{SM}=\frac{\sqrt{14}}{2}$이 되므로, 삼각형의 면적은 $\frac{1}{2}\frac{7\sqrt{2}}{5}\frac{\sqrt{14}}{2}=\frac{7\sqrt{7}}{10}$.

【1-3】 E_2내부에는 속하고 E_1내부에는 속하지 않는 영역의 면적을 구하는 문제이다. 이중에 1,2사분면에 있는 부분 A의 면적을 구하면 된다.

$$A=\int_{-12/5}^{12/5}\sqrt{16\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}-\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}\,dx=\frac{8}{3}\int_0^{12/5}\sqrt{9-x^2}\,dx-\frac{6}{4}\int_0^{12/5}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

우선, 각각의 적분값을 구한 후 간략히 하자. $A_1=\int_0^{12/5}\sqrt{9-x^2}\,dx$라고 하자. 치환 방법을 이용하여 이 값을 구하고자 한다.

$x=3\sin\theta\ (0\le\theta\le\pi/2)$라고 하면, $dx=3\cos\theta\, d\theta$이고 $12/5=3\sin\theta \Rightarrow \sin\alpha=4/5, \cos\alpha=3/5$.

따라서 $A_1=\int_0^{\alpha}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\ 3\cos\theta\, d\theta=\int_0^{\alpha}3\cos\theta\, 3\cos\theta\, d\theta=9\int_0^{\alpha}\cos^2\theta\, d\theta=\frac{9}{2}\int_0^{\alpha}(1+\cos 2\theta)\, d\theta$

$$=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\alpha}=\frac{9}{2}(\alpha+1/2\sin 2\alpha)=\frac{9}{2}(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=\frac{9}{2}(\alpha+4/5\times 3/5)=\frac{9}{2}(\alpha+12/25)\text{이다.}$$

마찬가지로 $A_2=\int_0^{12/5}\sqrt{16-x^2}\,dx$라고 두고 $x=4\sin\theta\ (0\le\theta\le\pi/2)$라 하면 $dx=4\cos\theta\, d\theta$이고 $12/5=4\sin\theta\Rightarrow\sin\beta=3/5,\ \cos\beta=4/5$.

따라서

$$A_2=\int_0^{\beta}\sqrt{16-16\sin^2\theta}\ 4\cos\theta\, d\theta=\int_0^{\beta}4\cos\theta\, 4\cos\theta\, d\theta=16\int_0^{\beta}\cos^2\theta\, d\theta=\frac{16}{2}\int_0^{\beta}(1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$=8\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\beta}=8(\beta+1/2\sin 2\beta)=8(\beta+12/25)\text{이다.}$$

따라서 $A=\frac{8}{3}A_1-\frac{3}{2}A_2=12(\alpha+12/25)-12(\beta+12/25)$
$=12(\alpha-\beta)$

(단, α,β는 예각이고, $\sin\alpha=4/5, \sin\beta=3/5$ 만족)

【1-4】 본 회전체는 직선 $y=-5$과 영역 A를 y축으로 $+5$만큼 이동한 후 x축 둘레로 회전하는 것으로 볼 수 있다.

따라서 회전체의 부피 V는

V= $\int_{-12/5}^{12/5}\pi(f(x)+5)^2\,dx-\int_{-12/5}^{12/5}\pi(g(x)+5)^2\,dx$ (단, $f(x)=4\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$, $g(x)=3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$)

$$= \int_{-12/5}^{12/5} \pi(f(x)^2 + 10f(x) + 25)\,dx - \int_{-12/5}^{12/5} \pi(g(x)^2 + 10g(x) + 25)\,dx$$

$$= \pi\int_{-12/5}^{12/5} 16 - \frac{16x^2}{9} + 40\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} - 9 + \frac{9}{16}x^2 - 30\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{0}^{12/5} 7 + \left(\frac{9}{16} - \frac{16}{9}\right)x^2 + \frac{40}{3}\sqrt{9-x^2} - \frac{30}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$B_1 = \int_0^{12/5} 7 + \frac{9^2-16^2}{16\times 9}x^2\,dx = \frac{56}{5},$$

$B_2 = \int_0^{12/5} \frac{40}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{40}{3}\int_0^{12/5}\sqrt{9-x^2}\,dx$. $x = 3\sin\theta, dx = 3\cos\theta\,d\theta, 12/5 = 3\sin\alpha_1$,

즉 $4/5 = \sin\alpha_1$. 따라서

$$B_2 = \frac{40}{3}\int_0^{\alpha_1}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta = \frac{40}{3}\int_0^{\alpha_1}9\cos^2\theta\,d\theta = 60\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\alpha_1} = 60(\alpha_1 + 12/25)$$

같은 방식으로 $x = 4\sin\theta$라 두면 $3/5 = \sin\alpha_2$이고

$$B_3 = \frac{30}{4}\int_0^{\alpha_2}\sqrt{16-16\sin^2\theta}\,4\cos\theta\,d\theta = \frac{30}{4}\int_0^{\alpha_2}16\cos^2\theta\,d\theta = 60\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\alpha_2} = 60(\alpha_2 + 12/25)$$

따라서 $V = 2\pi(B_1 + B_2 - B_3)$

$$= \frac{112\pi}{5} + 120\pi(\alpha_1 - \alpha_2)$$

(단, α_1, α_2는 예각이고 $\sin\alpha_1 = 4/5, \sin\alpha_2 = 3/5$ 만족)

문제 2

Ⅰ. 문제

<문제 2>

[가] 일반적으로 좌표평면 위의 변환 $f:(x,\ y) \rightarrow (x',\ y')$ 이 $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$ (단, $a,\ b,\ c,\ d$는 상수)의 꼴로 나타날 때, 이러한 변환 f를 일차변환이라고 한다. 좌표평면 위의 점을 직선이나 점에 대하여 대칭인 점으로 옮기는 대칭변환, 원점을 중심으로 θ만큼 회전하는 회전변환, 0이 아닌 실수 k에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 $\mathrm{P}'(kx,\ ky)$로 옮기는 닮음변환 등이 일차변환의 예이다. 일차변환 f를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

여기서, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 라고 놓으면 $X' = AX$ 이다. 임의의 일차변환 $f,\ g$에 대하여 f와 g의 합성변환도 일차변환이고, f를 나타내는 행렬을 A, g를 나타내는 행렬을 B라고 하면 $g \circ f$를 나타내는 행렬은 BA이다. 특히 자연수 n에 대하여 f를 n번 합성한 함수 f^n을 나타내는 행렬은 A^n이고, A의 역행렬 A^{-1}가 존재하면 f의 역변환 $f^{-1}:(x',\ y') \rightarrow (x,\ y)$ 도 일차변환이고 f^{-1}를 나타내는 행렬은 A^{-1}이다.

[나] 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 서로 다른 r개($n \geq r$)를 택할 때, 이것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호 ${}_n\mathrm{C}_r$로 나타낸다. 순열과 조합의 관계를 이용하여 다음 공식을 얻을 수 있다.

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\ (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (\text{단, } 0 < r \leq n)$$

이 수는 행렬의 전개식에서도 자주 등장한다. 이차정사각행렬 A와 이차단위행렬 E에 대하여 다음 등식들이 성립한다.

$$(A+E)^2 = A^2 + {}_2\mathrm{C}_1 A + E$$

$$(A+E)^3 = A^3 + {}_3\mathrm{C}_1 A^2 + {}_3\mathrm{C}_2 A + E$$

$$(A+E)^4 = A^4 + {}_4\mathrm{C}_1 A^3 + {}_4\mathrm{C}_2 A^2 + {}_4\mathrm{C}_3 A + E$$

$$(A+E)^5 = A^5 + {}_5\mathrm{C}_1 A^4 + {}_5\mathrm{C}_2 A^3 + {}_5\mathrm{C}_3 A^2 + {}_5\mathrm{C}_4 A + E$$

이 등식에 나타나는 계수들은 $(x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4, (x+1)^5$ 의 이항전개에서 나타나는 계수와 일치함을 볼 수 있다.

【2-1】 좌표평면 위의 점 $(3,0)$에서 포물선 $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x$ 가 일차변환 $f:(x,\ y) \rightarrow (2x, x+3y)$ 에 의하여 옮겨지는 곡선에 이르는 최단거리를 구하시오.

【2-2】 일차변환

$f : (x,\ y) \to (x,\ 0)$,

$g : (x,\ y) \to (0,\ y)$,

h : 직선 $y = mx$ (단, $m \neq 0$) 에 대한 대칭변환

에 대하여 합성변환 $f \circ h \circ g \circ h \circ f$ 를 나타내는 행렬을 B라고 놓자. 자연수 n에 대하여 $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ 라고 할 때, 무한급수 $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$의 수렴, 발산을 설문하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

【2-3】 제시문 [나]를 참고하여 $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} - 1 & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} - 1 \end{pmatrix}$ 일 때

$$(2\times1)_7\mathrm{C}_2E + (3\times2)_7\mathrm{C}_3A + (4\times3)_7\mathrm{C}_4A^2 + (5\times4)_7\mathrm{C}_5A^3 + (6\times5)_7\mathrm{C}_6A^4 + (7\times6)_7\mathrm{C}_7A^5$$

을 구하시오.

【2-4】 $\sin\frac{\pi}{5}$ 를 s 라고 할 때, 문제 【2-3】의 행렬 A에 대해 A^7 을 s 에 관한 식으로 나타내시오.

Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

일차변환을 이차곡선에 적용하여 얻어지는 새로운 이차곡선의 방정식을 구할 수 있는 능력을 평가하고자 출제된 문제이다. 일차변환의 합성에 관한 추론 및 연산능력, 이항전개에 관한 정확한 개념 및 활용능력, 삼각함수의 배각공식의 활용 및 응용력 등이 본 문제를 통해 평가된다.

2. 채점기준

[2-1] 일차변환을 이용하여 옮겨진 포물선의 방정식을 구하고 임의의 점을 잡아 최단거리를 구하는 과정을 평가한다.

[2-2] 주어진 합성변환에 의한 행렬을 구하고 이를 이용하여 수열을 구하고 수열의 성질을 파악하는 과정이 필요하다. 수열의 성질을 이용하여 무한급수의 수렴여부를 조사하고 그 합을 구하는 과정과 결과까지 평가한다.

[2-3] 제시문 [나]를 이용하여 직접 이항계수를 계산하여 값을 구하는 것을 평가한다.

[2-4] 회전변환의 상수배와 삼각함수의 배각공식을 사용하여 식을 정리하는 과정을 평가한다. 그리고 이를 문제에서 원하는 방법으로 바꾸어 표현한 답까지 구하는 것이 필요하다.

3. 고등학교 교육과정과의 연계성

제시문은 일차변환과 행렬과의 관계, 이항계수와 이항정리 부분을 발문으로 활용하였다. 고교 교과서의 「기하와 벡터」과정에 나오는 일차변환 단원과 「적분과 통계」에 나오는 이항정리에 관

한 부분을 활용하였다.
제시문 [가]는 자연계열 학생들이 수강하는 <기하와 벡터> 과목 중 행렬과 일차변환 단원에 해당하는 내용이다. 제시문 [나]는 <적분과 통계> 과목 중 이항정리 단원에 해당하는 내용이다.
문제 [2-1]은 주어진 곡선이 일차변환에 의하여 어떤 곡선으로 옮겨지는 지를 묻는 문제이다. 문제 [2-2]는 일차변환의 합성변환과 무한급수를 결합한 문제로 직선에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 구하는 것이 중요하다. 또한 무한등비급수가 수렴할 조건은 무엇이며 어떤 값으로 수렴하는지에 대한 이해가 필요하다. 문제 [2-3]은 이항계수의 기본 성질을 알고 있는지 묻는 문제로 제시문에 있는 형태로 주어진 식을 변형하는 것이 필요하다. 문제 [2-4]는 삼각함수의 배각공식과 회전변환을 응용하는 문제로 주어진 행렬이 닮음변환행렬과 회전변환을 나타내는 두 행렬의 곱으로 나타내어지도록 변형하는 것이 필요하다.

Ⅲ. 제시문 분석 및 답안 사례

1. 제시문 분석

제시문 [가]는 행렬의 일차변환에서 다루는 일차변환의 개념, 합성변환, 역변환 등에 대하여 요약하여 설명하고 있다. 제시문 [나]는 경우의 수 단원에 나오는 조합의 개념을 설명하고 이것을 활용한 이항정리의 내용을 행렬의 거듭제곱에 응용한 것이다. 특히, 제시문에서는 행렬의 거듭제곱 전개에서 나타나는 계수와 다항식의 거듭제곱 전개에서 나타나는 계수가 일치하는 것을 설명하고 있다.

2. 답안 사례

문제 [2-1]은 한 점에서 옮겨진 곡선에 이르는 최단거리는 두 점사이의 거리를 함수로 정의하고 그 함수의 최솟값을 구하는 것으로 미분을 이용한 극솟값을 구하는 과정이 필요하다. 문제 [2-2]는 일차변환의 합성변환과 무한급수를 결합한 문제로 직선에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 구하는 것이 중요하다. 또한 무한등비급수가 수렴할 조건은 무엇이며 어떤 값으로 수렴하는지에 대한 이해가 필요하다. 문제 [2-3]은 이항계수의 기본 성질을 알고 있는지 묻는 문제로 제시문에 있는 형태로 주어진 식을 변형하는 것이 필요하다. 문제 [2-4]는 삼각함수의 배각공식과 회전변환을 응용하는 문제로 주어진 행렬이 닮음변환행렬과 회전변환을 나타내는 두 행렬의 곱으로 나타내어지도록 변형하는 것이 필요하다.

<문제2 답안 사례>

【2-1】 일차변환 f에 의해 임의의 점 $(x,\ y)$가 (x',y')으로 옮겨진다고 하면 $x'=2x, y'=x+3y$ 이다. 그러므로 $x=\frac{x}{2}, y=\frac{-x+2y}{6}$ 이고 이 값을 포물선의 방정식 $y=\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x$ 에 대입해 풀면 $y'=x'^2$ 을 얻는다. 그러므로 옮겨진 포물선의 방정식은 $y=x^2$ 이다.
한편, 점 $(3,0)$에서 포물선 $y=x^2$ 위의 임의의 점 $(t,\ t^2)$에 이르는 거리를 제곱한 함수를 $d(t)$ 라고 하면 $d(t)=(t-3)^2+\ t^4$ 이고 이 식을 t로 미분하면 $d'(t)=4t^3+2t-6$ 이다.
이 때 우변은 $2(t-1)(2t^2+2t+3)$ 로 인수분해가 되고 $2t^2+2t+3$ 은 판별식이 음수이므로

$t=1$이 $d'(t)=0$의 유일한 실근임을 알 수 있다. 함수 $y=d(t)$는 사차함수이므로 점 $(1, d(1))$에서 유일한 극소점을 갖고 $d(t)$는 $t=1$에서 최솟값을 갖는다. 그러므로 함수 $\sqrt{d(t)}$는 $t=1$에서 최솟값 $\sqrt{5}$를 갖는다.

【2-2】 일차변환 f, g를 나타내는 행렬은 각각 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 이다. 이제 일차변환 h를 나타내는 행렬을 구해보자. 좌표평면 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에 일차변환 h에 의해 (x', y')으로 옮겨진다고 하면, $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$는 직선 $y=mx$ 위에 있고 $\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{1}{m}$ 이다.

이 식을 정리하면 $\begin{cases} mx'-y'=-mx+y \\ x'+my'=x+my \end{cases}$ 을 얻는다.

연립해서 풀면 $x'=\frac{1-m^2}{m^2+1}x+\frac{2m}{m^2+1}y,\quad y'=\frac{2m}{m^2+1}x+\frac{m^2-1}{m^2+1}y$ 을 얻는다.

그러므로 구하는 행렬은 $\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}$ 이다.

제시문 [가]에 의해 합성변환 $f\circ h\circ g\circ h\circ f$ 를 나타내는 행렬 B는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

이 행렬의 곱을 계산하면 $B=\frac{1}{(m^2+1)^2}\begin{pmatrix}4m^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 이다.

그러므로 $\alpha_n=\left(\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}\right)^n$ 이다. 수열 $\{\alpha_n\}$은 초항과 공비가 $\left(\frac{2m}{(m^2+1)}\right)^2$인 등비수열이므로 무한급수 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$은 $-1<\frac{2m}{(m^2+1)}<1$ 일 때에만 존재한다. $m\neq\pm1$인 모든 실수에 대해 이 부등식은 성립한다. 가정에 의해 $m\neq0$ 이므로 $m\neq0, 1, -1$ 인 경우에만 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$이 존재하고 그 합은 $\frac{\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}}{1-\frac{4m^2}{(m^2+1)^2}}=\frac{4m^2}{(m^2-1)^2}$ 이다.

【2-3】 직접 이항계수를 계산해 보면 구하는 식

$(2\times1)\,{}_7C_2E+(3\times2)\,{}_7C_3A+(4\times3)\,{}_7C_4A^2+(5\times4)\,{}_7C_5A^3+(6\times5)\,{}_7C_6A^4+(7\times6)\,{}_7C_7A^5$ ----(1)

은 $(7\times6)(A^5+{}_5C_1A^4+{}_5C_2A^3+{}_5C_3A^2+{}_5C_4A+E)$ 이 됨을 보일 수 있다.

제시문 [나]에 의해 $(A+E)^5=A^5+{}_5C_1A^4+{}_5C_2A^3+{}_5C_3A^2+{}_5C_4A+E$ 이므로

식 (1)은 $42\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5}\\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix}^5=42\begin{pmatrix}\cos2\pi & -\sin2\pi\\ \sin2\pi & \cos2\pi\end{pmatrix}=42E$ 이다.

【2-4】 먼저 임의의 각 θ에 대해 삼각함수의 배각공식을 사용하면 다음을 보일 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta-1 & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta-1\end{pmatrix} = -2\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$$

문제에서 주어진 행렬 A는 위 행렬에 $\theta=\frac{\pi}{5}$를 대입하여 얻을 수 있다.

그런데 $\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta-\frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta-\frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta-\frac{\pi}{2}) & \cos(\theta-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{pmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$은 $\theta-\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전 변환을 나타내는 행렬이다.

그러므로 $\begin{pmatrix}\cos 2\theta-1 & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta-1\end{pmatrix}^7=(-2\sin\theta)^7\begin{pmatrix}\cos 7(\theta-\frac{\pi}{2}) & -\sin 7(\theta-\frac{\pi}{2})\\ \sin 7(\theta-\frac{\pi}{2}) & \cos 7(\theta-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}$ 이다.

이로부터 $A^7=(-2\sin\frac{\pi}{5})^7\begin{pmatrix}-\sin\frac{7\pi}{5} & -\cos\frac{7\pi}{5}\\ \cos\frac{7\pi}{5} & -\sin\frac{7\pi}{5}\end{pmatrix}$

$$=(-2\sin\frac{\pi}{5})^7\begin{pmatrix}\sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5}\\ -\cos\frac{2\pi}{5} & \sin\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix}=-(2\sin\frac{\pi}{5})^7\begin{pmatrix}\sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5}\\ -\cos\frac{2\pi}{5} & \sin\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix}$$

을 얻을 수 있다. 다시 한 번 삼각함수의 배각공식을 이용하면

$$A^7=-(2\sin\frac{\pi}{5})^7\begin{pmatrix}2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} & 1-2\sin^2\frac{\pi}{5}\\ -1+2\sin^2\frac{\pi}{5} & 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\end{pmatrix}$$

$s=\sin\frac{\pi}{5}$라 놓으면 $\cos\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-s^2}$ 이므로 $A^7=-2^7s^7\begin{pmatrix}2s\sqrt{1-s^2} & 1-2s^2\\ -1+2s^2 & 2s\sqrt{1-s^2}\end{pmatrix}$ 이다.