# 2014학년도 수시모집 논술전형 예시답안

<자연과학부/전자공학계>

[문제 1]

## 가. 출제 및 채점기준

대수와 기하와의 관계를 이해하고 평면에서의 수학적 논리를 공간좌표계로 확장할 수 있는지 알아보고 좌표계를 이용하여 대수적인 문제를 기하적으로 해결 가능한 예와 기하적인 문제를 대수적으로 해결 가능한 예를 출제하여, 학생들이 기본 개념에 대한 이해 및 응용력을 평가하고자 했음

## 나. 예시답안

【1-1】 $p \geq 2$인 솟수가 $mn$과 $m^2+n^2$을 나눈다고 가정하자. $p$가 솟수이므로 $p$는 $m$ 또는 $n$ 둘 중의 하나를 나눈다. $p$가 $m$을 나눈다고 가정할 수 있다. 즉 적당한 자연수 $\alpha$에 대하여 $m=p\alpha$라고 쓸 수 있다. 또 $p$가 $m^2+n^2$을 나누므로 적당한 자연수 $\beta$가 존재하여 $m^2+n^2=p\beta$라고 쓸 수 있다. 따라서 $p^2\alpha^2+n^2=p\beta$이므로 $n^2=p(\beta-p\alpha^2)$이다. $p$는 $n^2$ 즉 $n$을 나누어 $m$과 $n$이 서로소라는 가정에 모순이다. 그러므로 $mn$과 $m^2+n^2$은 서로소이다.

【1-2】 $(a,b,c)$를 원시피타고라스 수라고 하고 $a$를 2의 배수라고 하자. 양의 $a/c$와 $b/c$는 유리수로서 $(a/c)^2+(b/c)^2=1$이다. 제시문 [다]로부터 적당한 유리수 $-1<t<0$에 대해

$$\frac{a}{c}=\frac{-2t}{1+t^2},\quad \frac{b}{c}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

이다. 유리수 $t$를 $t=-n/m$이라 놓자. 여기서 $m, n$은 서로소인 자연수 $n<m$이다. 그러면

$$\frac{a}{c}=\frac{2mn}{m^2+n^2},\quad \frac{b}{c}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

이다. $a$와 $c$가 서로소이고 $a$는 2의 배수이므로 $a/2$와 $c$도 서로소이다. 문제 [1-1]로부터 $mn$과 $m^2+n^2$은 서로소이므로 $a/2=mn$, $b=m^2-n^2$이다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 자연수 $m$과 $n$이 존재한다.

【1-3】 $(1,0)$을 지나는 직선은 $y=t(x-1)$이다. 이 직선은 단위원 $x^2+y^2=1$과 $(1,0)$ 이외의 다른 점에서 항상 만난다. 두 방정식을 연립하여 $x$에 관해 정리하면, $(t^2+1)x^2-2t^2x+t^2-1=0$이므로

$$x=1 \text{ 또는 } x=\frac{t^2-1}{t^2+1}\quad (t\text{는 실수})$$

이다. $x=(t^2-1)/(t^2+1)$일 때 $y=-2t/(t^2+1)$이다. 따라서

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{-2t}{t^2+1} \quad (t\text{는 실수})$$

그리고 임의의 실수 $t$에 대해 $x = (t^2-1)/(t^2+1) \neq 1$이므로 $(1, 0)$을 제외한 단위원의 모든 점을 표현한다.

【1-4】 $N(0, 0, 1)$과 $(p, q, r)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z-1}{r-1} \text{ 또는 } x = pt,\ y = qt,\ z = (r-1)t + 1 \qquad (1)$$

이고 $z = (r-1)t + 1 = 0$일 때 직선은 $(u, v, 0)$를 지난다. 이때 $t = 1/(1-r)$이고

$$u = \frac{p}{1-r},\ v = \frac{q}{1-r}$$

가 된다. 그리고 $p, q, r$이 유리수이므로 $u, v$도 유리수이다. $p^2 + q^2 + r^2 = 1$이고 $t = 1/(1-r)$이므로 식 (1)로부터

$$\frac{u^2}{t^2} + \frac{v^2}{t^2} + \frac{(t-1)^2}{t^2} = 1 \quad \text{즉} \quad t = \frac{u^2 + v^2 + 1}{2}$$

이다. 그러므로

$$p = \frac{u}{t} = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \quad q = \frac{v}{t} = \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \quad r = \frac{t-1}{t} = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

이다. 이 식들로부터 $u, v$가 유리수 이면 $p, q, r$도 유리수임을 알 수 있다.

## [문제 2]

### 가. 출제 및 채점기준

고교 교과과정에서 도입되는 지수의 정수, 유리수 및 실수로의 확장과 이와 관련하여 다른 수학 분야에서도 흔히 나오는 정의의 명확성 또는 모호성에 대한 이해를 묻는 문제임. 지수법칙과 거듭제곱근의 성질 등의 기본적인 사실들을 활용하는 능력과 여러 가지 부등식을 이용하여 수열의 수렴을 판단하는 능력 등도 함께 평가함.

### 나. 예시답안

【2-1】 유리수 $r, s$에 대하여 $r = m/n,\ s = k/l$이고 서로소인 정수 $m$과 자연수 $n$와 서로소인 정수 $k$와 자연수 $l$을 찾자. 그러면 제시문 [나]와 [가]의 제곱근의 성질과 지수법칙에 의하여

$$a^r a^s = \sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[l]{a^k} = \sqrt[nl]{a^{ml}}\,\sqrt[nl]{a^{nk}} = \sqrt[nl]{a^{ml}a^{nk}} = \sqrt[nl]{a^{ml+nk}}$$

이다. 여기서, 물론

$$r + s = \frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}$$

이지만 $ml+nk$와 $nl$이 서로소가 아닐 수도 있기 때문에

$$a^{r+s}=\sqrt[nl]{a^{ml}a^{nk}}$$

이 성립하는 것이 정의에 의해서 당연한 것은 아니다. 그럼에도 불구하고 이것이 사실임을 보일 수 있다. 문제에서 제시된 $a^{r+s}$의 정의를 이용하기 위하여

$$r+s=\frac{ml+nk}{nl}=\frac{p}{q}$$

이고 서로 소인 정수 $p$와 자연수 $q$를 찾자. 그러면 제시문 [가]의 지수법칙에 의하여

$$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{nlq}=(a^p)^{nl}=a^{nlp}=a^{(ml+nk)q}=\left(\sqrt[nl]{a^{ml+nk}}\right)^{nlq}$$

이므로

$$a^{r+s}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nl]{a^{ml+nk}}=a^r a^s$$

이다.

【2-2】 함수 $\phi$가 단조증가임을 보이기 위하여 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\phi(n)<\phi(n+1)$$

또는 동치인 부등식

$$na^{n+1}-(n+1)a^n+1>0 \qquad (1)$$

가 성립함을 보이면 된다. $n=1$일 때는

$$a^2-2a+1=(a-1)^2>0$$

이므로 (1)이 당연히 성립한다. 부등식 (1)이 어떤 자연수 $n=k$에 대하여 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}&(k+1)a^{k+2}-(k+2)a^{k+1}+1\\&\quad=\left\{ka^{k+1}-(k+1)a^k+1\right\}a+a^{k+2}-a^{k+1}-a+1\\&\quad>a^{k+2}-a^{k+1}-a+1=(a-1)(a^{k+1}-1)>0\end{aligned}$$

이므로 (1)이 $n=k+1$에 대해서도 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 부등식 (1)이 모든 자연수 $n$에 대하여 성립한다. 그러므로 함수 $\phi$는 단조증가함수이고 $m<n$인 임의의 자연수 $m,n$에 대하여

$$\frac{a^m-1}{m}<\frac{a^n-1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad a^m-1<\frac{m}{n}(a^n-1)$$

이 성립한다. $a>1$이면 $a^{1/n}>1$이므로 위의 부등식에서 $a$를 $a^{1/n}$으로 바꾸어도 성립한다. 따라서

$$a^{m/n}-1<\frac{m}{n}(a-1)$$

을 얻는다. $0<m/n<1$이므로 이것이 원하던 부등식이다.

참고) 사실 부등식 (1)의 증명을 위해 수학적 귀납법을 이용할 필요가 없다. 왜냐하면 (1)의 좌변을 인수분해하면 $a^n>1$이므로

$$na^{n+1}-(n+1)a^n+1=(na^n-1)(a-1)>0$$

이기 때문이다.

【2-3】 먼저, 임의의 유리수 $r$에 대하여 다음 부등식을 증명한다.

(2) $$\left|a^r - 1\right| \le a^{|r|} - 1$$

$r \ge 0$ 이면 $a^r \ge 1$ 이므로 부등식 (2)는 등호로 성립한다. $r < 0$ 라고 하자. 그러면 $a^r < 1$ 이므로 부등식 (2)는 아래의 부등식들과 동치이다.

$$1 - a^r \le a^{-r} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^r + a^{-r} \ge 2$$

그런데, 마지막 부등식은 산술·기하평균 부등식에 의해서 항상 성립한다. 따라서 부등식 (2)도 성립한다. 이제 $r$ 이 유리수, $\{r_n\}$ 이 유리수의 수열이고 $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ 이라고 하자. 그러면 임의의 자연수 $n$ 에 대하여 $r_n - r$ 이 유리수이므로 유리수 지수에 대한 지수법칙과 부등식 (2)를 이용하면

$$\left|a^{r_n} - a^r\right| = a^r \left|a^{r_n - r} - 1\right| \le a^r \left(a^{|r_n - r|} - 1\right)$$

이다. $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ 이므로 모든 $n$ 에 대하여 $|r_n - r| < 1$ 라고 가정할 수 있다. 그러면 【2-2】에서 증명한 부등식에 의하여

$$\left|a^{r_n} - a^r\right| \le a^r |r_n - r| (a-1)$$

이 모든 자연수 $n$ 에 대하여 성립함을 알 수 있다. 따라서 주어진 힌트에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$$

이 성립한다.

【2-4】 (1) 제시문 [라]의 정의가 명확하지 않은 이유: $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ 이고 단조증가하는 유리수의 수열 $\{r_n\}$ 이 하나만 있는 것이 아니다. 따라서 제시문 [라]의 정의가 타당하려면 $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ 이고 단조증가하는 임의의 유리수의 수열 $\{r_n\}$ 에 대하여 극한 $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ 이 수열 $\{r_n\}$ 에 관계없는 실수여야 한다. 그러나 이것은 유리수 지수에 대한 제시문 [다]로부터 자명하게 알 수 있는 사실이 아니므로 제시문 [라]의 정의는 명확하지 않다.

(2) 제시문 [라]의 정의가 타당하다는 것의 증명: 정의의 타당성을 증명하기 위해서는, $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ 이고 단조증가하는 임의의 유리수의 수열 $\{r_n\}$ 에 대하여 극한 $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ 이 수열 $\{r_n\}$ 에 관계없는 실수임을 보여야 한다. $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n = x$ 이고 단조증가하는 두 개의 유리수의 수열 $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ 을 생각하자. 그러면 제시문 [라]에 의하여 두 극한 $L_1 = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ , $L_2 = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$ 이 존재한다. 또한, $\{r_n - s_n\}$ 은 유리수의 수열이고 $\lim_{n\to\infty} (r_n - s_n) = x - x = 0$ 이므로 【2-3】의 결과에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n} = a^0 = 1$$

이다. 따라서 유리수 지수에 대한 지수법칙을 이용하면

$$L_1 - L_2 = \lim_{n\to\infty} \left[a^{r_n} - a^{s_n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[a^{r_n - s_n} - 1\right] a^{s_n} = 0 \cdot L_2 = 0$$

이므로

$$L_1 = L_2$$

이다. 그러므로 제시문 [라]의 정의가 타당하다.