서강대학교 SOGANG UNIVERSITY

논 술 시 험 문제지

<자연과학부/전자공학계>

■ 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고 본문부터 시작할 것.
2. 답안 분량은 띄어쓰기 포함한 글자 수임.
3. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 또는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용하여야 함.
4. 답안이나 답안지의 여백에 자신을 드러낼 수 있는 답안 이외의 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현 또는 표시를 한 경우에는 0점 처리함.

<문제 1 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 방정식 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는 자연수의 순서쌍 (a,b,c)를 피타고라스 수라고 말한다. 특히 a, b, c가 서로소일 때 (a,b,c)를 원시 피타고라스 수라고 한다. 만약 (a,b,c)가 원시 피타고라스 수이면 a와 c는 서로소이고 a 또는 b 중에 하나는 반드시 2의 배수이어야 한다. 임의의 피타고라스 수는 원시 피타고라스 수의 자연수 배로 쓸 수 있다. 원시 피타고라스 수를 찾는 다양한 방법들이 고대 그리스 시대부터 많이 연구되었다. 피타고라스 수 (a,b,c)에 대해 $x=a/c$, $y=b/c$로 놓으면 x, y는 양의 유리수이고 $x^2+y^2=1$이다. 역으로 x, y가 양의 유리수이고 $x^2+y^2=1$을 만족하면, 적당한 자연수 a, b, c에 대하여 $x=a/c$, $y=b/c$이고 $a^2+b^2=c^2$이다. 따라서 피타고라스 수를 찾기 위해서 중심이 원점인 단위원 위의 양의 유리수로 이루어진 순서쌍 (x,y)를 구하는 문제를 생각한다. (p,q)를 단위원 위의 양의 유리수의 순서쌍이라고 하자. 그리고 $(0,1)$과 (p,q)를 지나는 직선 $y=tx+1$을 생각하면 기울기 t는 $-1<t<0$인 유리수이다. (【그림 1】 참고)

[나] 임의의 실수 t에 대하여 연립방정식 $x^2+y^2=1$, $y=tx+1$의 해 (x,y)를 구하자. 먼저 y를 소거하면 $x^2+(tx+1)^2=1$, 즉 $(1+t^2)x^2+2tx=0$이다. 좌변을 인수분해하면 $x[(1+t^2)x+2t]=0$이므로 $x=0$ 또는 $x=-2t/(1+t^2)$이다. 따라서 구하는 해는 $x=0$, $y=1$ 또는 $x=-2t/(1+t^2)$, $y=(1-t^2)/(1+t^2)$이다.

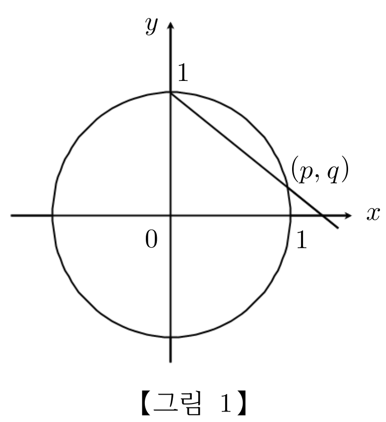
[다] 제시문 [가]와 [나]로부터, $x^2+y^2=1$을 만족하는 모든 양의 유리수 x와 y는

$$x(t)=\frac{-2t}{1+t^2},\quad y(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

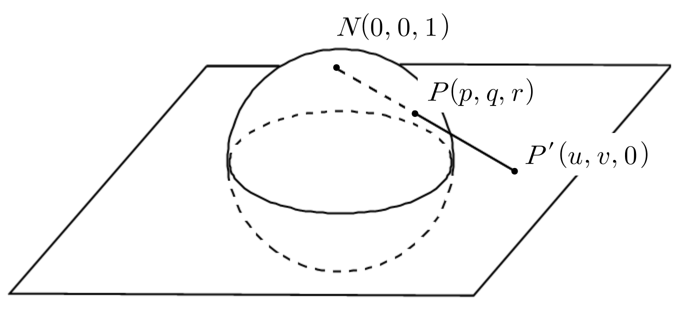
의 매개변수 방정식으로 나타난다는 것을 알 수 있다. 여기서 t는 $-1<t<0$인 유리수이다.

[라] 제시문 [가]와 유사한 방법에 의해서 $a^2+b^2+c^2=d^2$을 만족하는 자연수의 순서쌍 (a,b,c,d)를 구하는 문제로부터 단위구면 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 양의 유리수의 순서쌍 (p,q,r)을 찾는 문제를 생각할 수 있다. 제시문 [나]의 방법을 확장하여 (p,q,r)을 구하고자 한다. 【그림 2】처럼 구면의 북극점 $N(0,0,1)$을 지나고 점 $P(p,q,r)$을 지나는 직선이 구면의 적도를 지나는 xy평면과 만나는 점을 $P'(u,v,0)$라고 하면 다음 식 (1)을 만족한다.

$$p=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\quad q=\frac{2v}{u^2+v^2+1},\quad r=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \qquad \cdots\cdots (1)$$



【그림 1】



【그림 2】

【1-1】 m, n이 서로소인 자연수이면 mn과 m^2+n^2이 서로소임을 보여라.

【1-2】 제시문 [가], [다]와 【1-1】을 이용하여, (a,b,c)가 원시 피타고라스 수이고 a가 2의 배수이면

$$a=2mn,\ b=m^2-n^2,\ c=m^2+n^2$$

인 자연수 m, n이 존재함을 보여라.

【1-3】 임의의 실수 t에 대한 매개변수방정식

$$x(t)=\frac{-2t}{1+t^2},\quad y(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

은 점 $(0,-1)$을 제외한 단위원 상의 모든 점을 표현한다. 함수 $x(t)$, $y(t)$는 변수 t와 상수의 사칙연산에 의해 표현되므로 t에 관한 유리함수이다. 제시문 [나]를 참고하여 점 $(1,0)$을 제외하고 단위원 상의 모든 점 (x,y)를 표현하는 유리함수 $x(t)$와 $y(t)$를 구하여라.

【1-4】 제시문 [라]에서 (1)이 성립함을 증명하고 u, v가 유리수임을 보여라.

<문제 2 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 양의 실수 a에 대하여 정수 n을 지수로 가지는 a의 거듭제곱 a^n을 다음과 같이 정의한다.

$$a^n = \begin{cases} a \times \cdots \times a \ \ (n\text{번}), & n > 0 \\ \quad 1, & n = 0 \\ (1/a) \times \cdots \times (1/a) \ \ (|n|\text{ 번}), & n < 0 \end{cases}$$

그러면 임의의 양의 실수 a, b와 정수 m, n에 대하여 지수법칙

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

이 성립한다. 또한 $a > 1$일 때, $n > 0$이면 $a^n > 1$이고 $n < 0$이면 $a^n < 1$이다.

[나] 양의 실수 a와 자연수 n에 대하여 $x^n = a$를 만족하는 양의 실수 x는 오직 하나 존재하며 이것을 a의 양의 n제곱근이라고 하고 $x = \sqrt[n]{a}$라고 나타낸다. 정수 지수에 대한 지수법칙을 이용하여 임의의 양의 실수 a, b와 자연수 m, n, k에 대하여

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[nk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

가 성립하는 것을 보일 수 있다. 또한 $a > 1$이면, 임의의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[n]{a} > 1$이다.

[다] a를 양의 실수라고 하자. 임의의 유리수 r에 대하여 $r = m/n$인 정수 m과 자연수 n이 항상 존재하므로 유리수 r을 지수로 가지는 수 a^r을

$$a^r = \sqrt[n]{a^m} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (2)$$

으로 정의할 수 있다. 그러나 이 정의는 명확하지 않다. 왜냐하면 유리수 r을 분수로 표현하는 방법이 한 가지가 아니기 때문이다. 보다 자세히 말하면 $r = m/n$을 만족하는 정수 m과 자연수 n의 쌍 (m, n)이 무한히 많이 있으며 (2)의 우변이 $r = m/n$인 쌍 (m, n)에 따라서 다른 값이 될 수도 있기 때문이다. 사실 a^r에 대한 위의 정의는 타당하다. 이를 보이기 위하여 정수 m, k와 자연수 n, l에 대하여

$$r = \frac{m}{n} = \frac{k}{l}$$

으로 쓸 수 있다고 하자. 그러면 $ml = nk$이므로 정수 지수에 대한 지수법칙에 의하여

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nl} = (a^m)^l = a^{ml} = a^{nk} = (a^k)^n = \left(\sqrt[l]{a^k}\right)^{nl}$$

이고 따라서

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[l]{a^k}$$

이다. 이로부터 (2)의 우변이 r의 분수 표현에 관계없이 일정한 값이 된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 유리수 r을 지수로 하는 a^r에 대한 정의 (2)가 타당하다. 제시문 [가]와 [나]의 지수법칙과 제곱근의 성질을 이용하여 임의의 양의 실수 a, b와 유리수 r, s에 대한 다음의 지수법칙을 증명할 수 있다.

$$a^{r+s} = a^r a^s, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad (ab)^r = a^r b^r$$

또한 $a > 1$이고 r이 유리수일 때, $r > 0$이면 $a^r > 1$이고 $r < 0$이면 $a^r < 1$이 되는 것도 보일 수 있다.

[라] a를 양의 실수라고 하자. x가 임의의 무리수이면 모든 자연수 n에 대하여 $r_n < r_{n+1}$이고 $\lim_{n\to\infty} r_n = x$인 유리수의 수열 $\{r_n\}$을 항상 찾을 수 있다. 이 때, 유리수 r_n을 지수로 가지는 수들의 수열 $\{a^{r_n}\}$이 어떤 실수에 수렴한다는 것이 알려져 있다. 따라서 무리수 x를 지수로 가지는 수 a^x을 다음과 같이 정의한다.

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

【2-1】 a를 양의 실수라고 하자. 임의의 유리수 r에 대하여 $r = m/n$을 만족하는 서로소인 정수 m과 자연수 n은 오직 하나 존재한다. 따라서 제시문 [다]의 정의와 달리,

$$a^r = \sqrt[n]{a^m} \qquad \left(r = \frac{m}{n},\ m \text{ 과 } n \text{ 은 서로소}\right)$$

으로 정의하면 a^r을 명확하게 정의할 수 있다. 이 정의를 이용하여, 임의의 양의 실수 a와 유리수 r, s에 대하여

$$a^{r+s} = a^r a^s$$

가 성립함을 보여라.

【2-2】 a를 $a > 1$인 실수라고 하자. 함수 $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 을 아래와 같이 정의한다.

$$\phi(n) = \frac{a^n - 1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

함수 ϕ가 단조증가(즉, $m < n$이면 $\phi(m) < \phi(n)$)임을 수학적 귀납법으로 증명하고, 이를 이용하여 $0 < r < 1$인 임의의 유리수 r에 대하여

$$a^r - 1 < r(a-1)$$

이 성립함을 보여라. 여기서 $\mathbb{N}$과 $\mathbb{R}$은 각각 자연수의 집합과 실수의 집합을 나타낸다.

【2-3】 a를 $a > 1$인 실수라고 하자. 【2-2】의 결과를 이용하여 r이 유리수, $\{r_n\}$이 유리수의 수열이고 $\lim_{n\to\infty} r_n = r$이면 $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$임을 보여라.
(힌트: 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n - L| \le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$이다.)

【2-4】 제시문 [라]에서 제안된 무리수 x에 대한 a^x의 정의가 명확하지 않은 이유를 밝혀라. 그럼에도 불구하고 이 정의가 타당함을 【2-3】의 결과에 근거하여 설명하여라.