서강대학교 SOGANG UNIVERSITY

2014학년도 수시모집 논술전형 예시답안

<컴퓨터공학계/화공생명공학계/기계공학계>

[문제 1]

가. 출제 및 채점기준

고교 교과과정의 기본적인 수함개념 중의 하나인 함수의 최댓값과 최솟값에 대한 정확한 이해를 묻는 문제임. 미적분학을 이용하지 않고 간단한 절대부등식인 산술·기하평균 부등식과 코시-슈바르츠의 부등식을 응용하여 최대최소 문제를 해결하는 능력을 평가하고자 함.

나. 예시답안

【1-1】 열린 구간 $(0,1)$에서 정의된 함수 $f(x)=x$를 생각한다. 함수 f가 $(0,1)$의 어떤 점 $x_{\max}$에서 최댓값 $f(x_{\max})$를 가진다고 하자. 그러면 우선 $x_{\max}\in(0,1)$이므로 $x_{\max}<x<1$인 $x\in(0,1)$이 존재한다 (예를 들어, $x=(x_{\max}+1)/2$로 놓으면 된다). 가정에 의하여 $f(x_{\max})$가 함수 f의 최댓값이므로 $x=f(x)\le f(x_{\max})=x_{\max}$가 성립해야한다. 그러나 이것은 x가 $x_{\max}<x$가 되도록 선택한 것에 모순이다. 그러므로 f는 최댓값을 갖지 않는다. 마찬가지로 f는 최솟값도 갖지 않는다.

【1-2】 임의의 $(x,y)\in D$에 대하여

$$\begin{aligned}1=\frac{x^m+y^n}{m+n}&=\frac{1}{n+m}\left(\frac{1}{n}x^m+\cdots+\frac{1}{n}x^m+\frac{1}{m}y^n+\cdots+\frac{1}{m}y^n\right)\\&\ge\sqrt[m+n]{\left(\frac{1}{n}x^m\right)^n\left(\frac{1}{m}y^n\right)^m}=\sqrt[m+n]{\frac{1}{n^n m^m}(xy)^{mn}}\end{aligned}$$

이므로

$$(xy)^{mn}\le n^n m^m$$

이고 따라서

$$f(x,y)=xy\le\left(n^n m^m\right)^{1/mn}=n^{1/m}m^{1/n}$$

이다. 이 부등식에서 등호는

$$\frac{1}{n}x^m=\frac{1}{m}y^n$$

일 때만 성립하고, 이 때 $x^m+y^n=m+n,\ x>0,\ y>0$을 이용하면

$$x^m=n,\ \ y^n=m \quad\Leftrightarrow\quad x=n^{1/m},\ \ y=m^{1/n}$$

이고

$$f(x,y)=n^{1/m}m^{1/n}$$

이다. 그러므로 f는 최댓값 $n^{1/m}m^{1/n}$을 갖는다.

【1-3】 실수 t에 대한 이차함수

$$\phi(t) = (a_1 - tb_1)^2 + \cdots + (a_n - tb_n)^2$$

을 생각하자. $A = a_1^2 + \cdots + a_n^2,\ B = b_1^2 + \cdots + b_n^2,\ C = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ 으로 놓으면

$$\phi(t) = Bt^2 - 2Ct + A = B\left(t - \frac{C}{B}\right)^2 + \frac{AB - C^2}{B}$$

으로 쓸 수 있다. 모든 실수 t 에 대하여 $\phi(t) \geq 0$ 이 성립하므로 특히 $t = \beta = C/B$ 일 때도 성립한다. 따라서

$$\phi(\beta) = \frac{AB - C^2}{B} \geq 0$$

이므로 $AB \geq C^2$ 이 성립한다. 또한 $AB = C^2$ 이면

$$\phi(\beta) = (a_1 - \beta b_1)^2 + \cdots + (a_n - \beta b_n)^2 = 0$$

이므로 모든 $k = 1, \ldots, n$ 에 대하여 $a_k = \beta b_k$ 가 성립한다.

(다른 풀이)

$$C^2 - AB = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_i^2 b_j^2 - 2a_i b_i a_j b_j + a_j^2 b_i^2\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$$

이므로 코시-슈바르츠 부등식이 성립한다. 등호가 성립하는 경우는 $1 \leq i \neq j \leq n$ 임 모든 i, j 에 대하여 $a_i b_j = a_j b_i$ 일 때이다. 이 때, $B \neq 0$ 이므로 적당한 k 에 대하여 $b_k \neq 0$ 이다. $\beta = a_k / b_k$ 로 놓자. 그러면 $1 \leq i \neq j \leq n$ 임 모든 i, j 에 대하여 $a_i b_j = a_j b_i$ 라는 조건으로부터, $1 \leq i \leq n$ 인 모든 i 에 대하여 $a_i = \beta b_i$ 임을 보일 수 있다.

【1-4】 산술·기하평균 부등식에 의하여

$$f(x, y) = xy + \frac{ab}{xy} + a + b \geq 2\sqrt{ab} + a + b$$

이고 등식이 $(xy)^2 = ab$ 일 때 성립하므로

$$m(a, b) = 2\sqrt{ab} + a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

이다. 임의의 양수 r, s 에 대하여 코시-슈바르츠 부등식을 두 번 이용하면

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 \leq \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2 (a + rb)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{s}\right)(a^2 + r^2 s b^2)$$

이고 등식은

$$\frac{\sqrt{a}}{1} = \frac{\sqrt{r}\sqrt{b}}{1/\sqrt{r}}, \qquad \frac{a}{1} = \frac{r\sqrt{s}\, b}{1/\sqrt{s}}$$

일 때만 성립한다. 따라서 $r = s = 2$ 로 잡으면,

$$m(a, b) \leq \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3} \sqrt{a^2 + 8b^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

이고 등식은 $a = 4b$ 일 때 성립한다. 그러므로 $m(a, b)$ 의 최댓값은 $3\sqrt{3}/2$ 이다.

[문제 2]

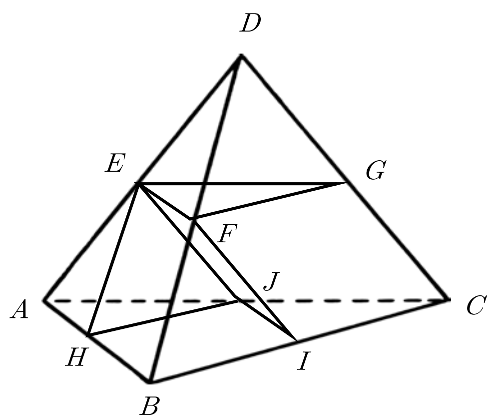
가. 출제 및 채점기준

고등학교 교과서의 기하와 벡터 내용을 다루고 있으며 특히 공간도형의 기하적인 문제와 부피 계산을 무한등비급수로서 해결 가능한 예를 바탕으로 출제하여, 학생들이 기본 개념에 대한 이해 및 응용력을 평가하고자 했다.

나. 예시답안

【2-1】 직사격형의 경우, 변의 길이가 m/n, p/q라고 하자. n과 q의 최소공배수를 L이라고 하면, 적당한 정수 m', p'에 대하여 $m/n=m'/L$이고 $p/q=p'/L$으로 쓸 수 있다. 한 변의 길이가 $1/L$인 정사각형을 제시문 [나]에서와 같이 $m'p'$개 이어붙인다. 그런데 변의 길이가 $1/L$인 정사각형의 넓이는 길이가 1인 정사각형의 넓이의 $1/L^2$이다. 따라서 구하는 넓이는 $m'p'/L^2=mp/nq$이므로 변의 길이가 유리수인 직사각형의 넓이는 너비×높이이다. 세 유리수의 최소공배를 이용하여 평면의 방법을 직육면체의 경우로 확장할 수 있다.

<u>문제 【2-2】와 【2-3】에 해당함.</u> 각 모서리를 이등분한 점을 그림과 같이 E, F, G, H, I, J라 하자.



【2-2】 모서리의 길이를 이등분하므로 삼각형 EFG, EFD, EGD, FGD, AHJ, AJE, AHE, HJE는 서로 합동이므로 사면체 $EFGD$와 사면체 $AHJE$의 부피는 같다.

삼각기둥 $JIC-EFG$과 삼각기둥 $BIF-HJE$를 비교한다. 삼각기둥 $JIC-EFG$의 밑면(삼각형 JIC)은 삼각기둥 $BIF-HJE$의 밑면(삼각형 BIF)과 합동이고 각각의 높이도 정사면체의 모서리의 길이의 반으로서 같다. 따라서 두 삼각기둥의 부피는 같다.

【2-3】 삼각형 EFG와 삼각형 AHJ는 합동으로서 면적이 같다. 삼각형 EFG로부터 D까지 높이와 삼각형 AHJ로부터 E까지 높이가 사면체의 높이의 1/2로서 같다. 따라서 사면체 $EFGD$와 사면체 $AHJE$의 부피는 같다.

서강대학교

삼각기둥 JIC-EFG과 삼각기둥 $BIF-HJE$를 비교한다. 삼각기둥 JIC-EFG의 밑면(삼각형 JIC)의 넓이는 평행사변형 $HBIJ$의 $1/2$이다. 그런데 삼각형 JIC로부터 삼각형 EFG까지 높이와 평행사변형 $HBIJ$로부터 이와 평행한 직선 EF까지 높이는 같다. 평행사변형 $HBIJ$의 넓이×직선 EF까지 높이는 삼각기둥 $BIF-HJE$의 부피의 $1/2$이므로 결국 두 삼각기둥의 부피는 같다.

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하고, 사면체 $ABCD$의 높이를 h라고 하자. 문제 한 삼각기둥의 부피는

$$[S\times\frac{1}{4}]\times[h\times\frac{1}{2}] = S\times h\times 1/8$$

따라서 두 삼각기둥의 부피는 $S\times h\times 1/4$이다.

두 사면체 $EFGD$와 사면체 $AHJE$에 대해 위 분할을 통해 얻어진 삼각기둥의 부피는 같으며 삼각형 EFG 넓이×높이(사면체 $EFGD$의 높이)×$1/8$이다. 그런데 이와 같은 삼각기둥은 모두 4개이므로 두 사면체 $EFGD$와 사면체 $AHJE$로부터 얻어지는 삼각기둥의 부피는

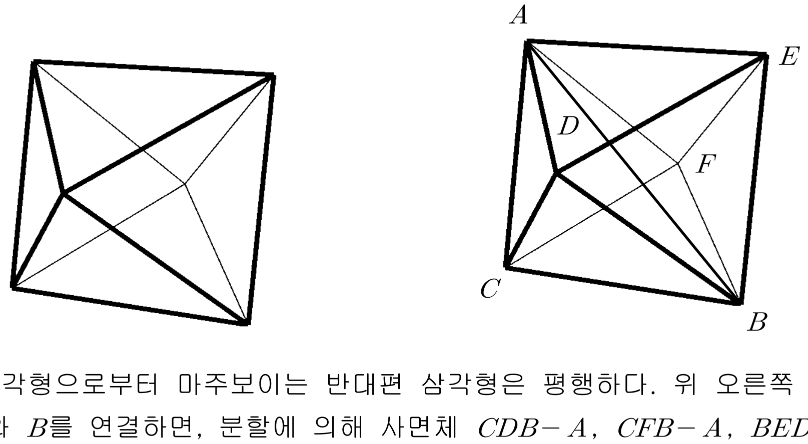
$$\begin{aligned}&\text{삼각형 } EFG \text{ 넓이}\times\text{높이(사면체 } EFGD\text{의 높이)}\times\frac{1}{2}\\ &= [S\times\frac{1}{4}]\times[h\times\frac{1}{2}]\times\frac{1}{2}\\ &= S\times h\times\frac{1}{4^2}\times 1/4^2\end{aligned}$$

이와 같은 과정을 반복하여 얻어진 모든 삼가기둥의 부피의 합은

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)\times\text{밑면(삼각형)의 넓이}\times\text{높이}$$

이다.

【2-4】 정팔면체는 다음과 같다.



정팔면체의 한 삼각형으로부터 마주보이는 반대편 삼각형은 평행하다. 위 오른쪽 그림과 같이 정팔면체에 두 점 A와 B를 연결하면, 분할에 의해 사면체 $CDB-A$, $CFB-A$, $BED-A$, $BEF-A$의 모두 4개의 사면체를 얻는다. 정팔면체라는 조건으로부터 모든 사면체의 부피는 같으며

서강대학교

$$삼각형의\ 넓이 \times 높이 \times \frac{1}{3} \times 4 = 삼각형의\ 넓이 \times 높이 \times \frac{4}{3}$$

이다.