서강대학교 SOGANG UNIVERSITY

# 논 술 시 험 문제지

<컴퓨터공학계/화공생명공학계/기계공학계>

■ 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고 본문부터 시작할 것.
2. 답안 분량은 띄어쓰기 포함한 글자 수임.
3. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 또는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용하여야 함.
4. 답안이나 답안지의 여백에 자신을 드러낼 수 있는 답안 이외의 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현 또는 표시를 한 경우에는 0점 처리함.

<문제 1 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 공집합이 아닌 집합 $D$에서 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$로 가는 함수 $f: D \to \mathbb{R}$을 생각해보자. 만약 모든 $x \in D$에 대하여 $f(x) \le f(x_{\max})$인 $x_{\max} \in D$가 존재하면 함수 $f$는 $x_{\max}$에서 최댓값 $f(x_{\max})$를 갖는다고 말하고, 모든 $x \in D$에 대하여 $f(x) \ge f(x_{\min})$인 $x_{\min} \in D$가 존재하면 함수 $f$는 $x_{\min}$에서 최솟값 $f(x_{\min})$을 갖는다고 말한다. 다시 말하면, $f$의 최댓값(또는 최솟값)은 $f$가 가질 수 있는 가장 큰 (또는 작은) 값이다. 정의에 의해서 모든 $x \in D$에 대하여 $f(x) \le M$가 성립하더라도 $f(x_{\max}) = M$인 $x_{\max} \in D$가 존재하지 않으면 실수 $M$은 $f$의 최댓값이 될 수 없다. 예를 들어, 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f(x) = 1 - x^2$을 생각하면 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) \le 2$이지만 $f(x_{\max}) = 2$인 $x_{\max} \in \mathbb{R}$가 존재하지 않으므로 2는 $f$의 최댓값이 될 수 없다. 사실 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) \le 1$이고 $f(0) = 1$이므로 $f$는 0에서 최댓값 1을 갖는다.

[나] 함수 $f: D \to \mathbb{R}$의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제는 가장 고전적이면서도 중요한 수학문제 중의 하나이다. $D$가 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 또는 그 곱집합인 $\mathbb{R}^n$의 부분집합이면 $f$의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 간단하면서도 매우 유용한 방법은 절대부등식을 이용하는 것이다. 임의의 실수 $a_1, \dots, a_n$에 대하여 성립하는 부등식

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \ge 0$$

은 가장 간단한 절대부등식이며 등호는 $a_1 = \cdots = a_n = 0$일 때만 성립한다. 특히 유용한 절대부등식은 음이 아닌 임의의 실수 $a_1, \dots, a_n$에 대한 산술·기하평균 부등식

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

이며 등호는 $a_1 = \cdots = a_n$일 때만 성립한다.

[다] 임의의 실수 $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$에 대하여 코시-슈바르츠(Cauchy-Schwarz) 부등식

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

이 성립하며 등식은 모든 $k = 1, \dots, n$에 대하여 $\alpha a_k = \beta b_k$인 상수 $\alpha, \beta$(동시에 0은 아님)가 존재할 때만 가능하다. 코시-슈바르츠 부등식을 최댓값·최솟값 문제에 응용할 수 있다. 예를 들어, $2x^2 + y^2 = 1$을 만족하는 임의의 실수 $x, y$에 대하여

$$(x+2y)^2 = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}x) + 2y\right\}^2 \le \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2^2\right\}\{(\sqrt{2}x)^2 + y^2\} = \frac{9}{2}$$

이고 등호는

$$\frac{\sqrt{2}x}{1/\sqrt{2}} = \frac{y}{2}, \text{ 즉 } 4x = y$$

일 때 성립한다. 또한 $2x^2 + y^2 = 1$이고 $4x = y$인 실수 $x$와 $y$의 쌍이 아래와 같이 두 개 존재한다.

$$(x, y) = \left(\pm\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \pm\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

따라서 $\mathbb{R}^2$의 부분집합 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}$에서 정의된 함수 $f(x,y) = x + 2y$의 최솟값은 $-3/\sqrt{2}$이고 최댓값은 $3/\sqrt{2}$이다.

**【1-1】** 닫힌 구간 $[a,b]$에서 정의된 연속함수가 항상 최댓값과 최솟값을 갖는다는 것은 미적분학의 가장 기본적인 사실 중에 하나이다. 그러나 열린 구간 $(a,b)$에서 정의된 연속함수에 대해서는 그렇지 않을 수도 있음을 제시문 [가]에 근거하여 설명하여라.

**【1-2】** $m$과 $n$을 임의의 자연수라고 하자. 산술·기하평균 부등식을 응용하여 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^m + y^n = m + n,\ x > 0,\ y > 0\}$에서 정의된 함수 $f(x,y) = xy$의 최댓값을 구하여라.

**【1-3】** $b_1^2 + \cdots + b_n^2 > 0$일 때, 코시-슈바르츠 부등식

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

이 성립함을 증명하고 등호는 모든 $k = 1, \dots, n$에 대하여 $a_k = \beta b_k$인 상수 $\beta$가 존재할 때만 가능하다는 것을 보여라.

**【1-4】** $a^2 + 8b^2 = 2$인 두 양수 $a, b$에 대하여 함수

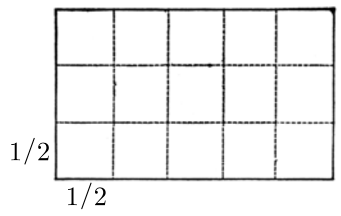
$$f(x,y) = \left(x + \frac{a}{y}\right)\left(y + \frac{b}{x}\right) \quad (x, y > 0)$$

의 최솟값을 $m(a,b)$라고 할 때, $m(a,b)$의 최댓값을 구하여라.

<문제 2 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 토지의 크기 측정을 위해 기하(geometry)라는 단어가 그리스어에서 생겨났듯이 고대 그리스인들은 무리수 개념−예를 들어, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 등을 알고 있었다. 물론 이런 무리수들을 숫자로 인식하지는 않았지만, 오늘날과 같은 개념인 넓이가 2가 되는 정사각형의 한 변의 길이를 $\sqrt{2}$로 알고 있었다.

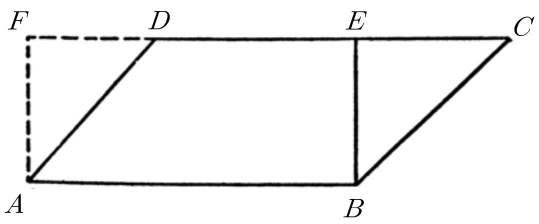
[나] 고대 그리스인들은 공간에서 부피의 단위(단위 부피)를 모든 모서리의 길이가 1인 정육면체로 정의하고, 각 모서리의 길이가 자연수인 직육면체의 부피를 단위 부피로의 **분할**을 통해 **너비×높이×깊이**로 이해하였다. 이는 평면에서 자연수 길이를 갖는 직사각형의 넓이의 개념을 자연스럽게 확장한 것이다. 그렇다면 유리수 길이를 가지는 직육면체의 부피는 어떻게 계산될까? 먼저 평면에서 두 변의 길이가 각각 3/2, 5/2인 직사각형을 생각하자. 차례로 변의 길이가 1/2인 정사각형을【그림 1】처럼 **이어붙임**을 하여 15개 만든다. 변의 길이가 1/2인 정사각형은 길이 1인 정사각형의 1/4을 차지하므로 그 넓이는 1/4이다. 이러한 개념을 이용하면 유리수 길이를 갖는 직사각형의 넓이는 **너비×높이**임을 알 수 있다.



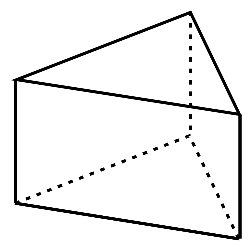
【그림 1】

이 방법을 공간의 경우로 확장할 수 있으며, 모서리의 길이가 유리수인 직육면체의 경우도 **분할** 또는 **이어붙임**을 통해 동일한 부피 공식인 **너비×높이×깊이**를 얻는다. 일반적으로 직육면체의 모서리의 길이가 무리수라고 하더라도 유리수의 극한을 이용하여 동일한 부피 공식을 얻는다.

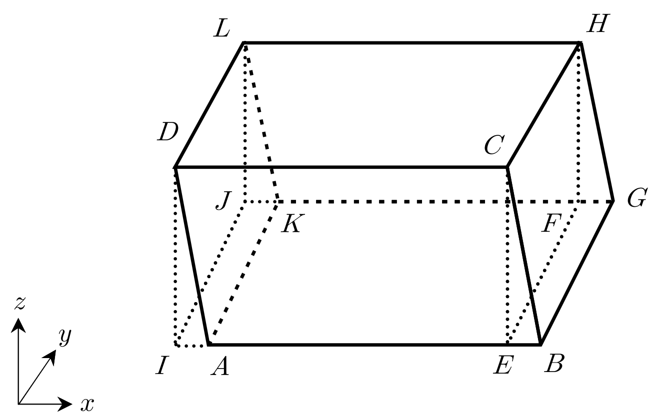
[다]【그림 2】에서 평행사변형 $ABCD$에서 삼각형 $BCE$를 잘라서 $ADF$에 붙인다. 이러한 **분할**과 **이어붙임**을 통해 평행사변형 $ABCD$와 직사각형 $ABEF$의 넓이가 같음을 알 수 있다. 따라서 주어진 평행사변형의 넓이는 **너비×높이**가 된다. 이를 이용하면 삼각형의 면적은 1/2×**너비×높이**가 되고 공간에서 직각삼각기둥의 부피는 **삼각형의 넓이×높이**로 계산할 수 있다. (【그림 3】 참고) 이 공식은 직각이 아닌 삼각기둥의 부피에도 동일하게 성립한다.



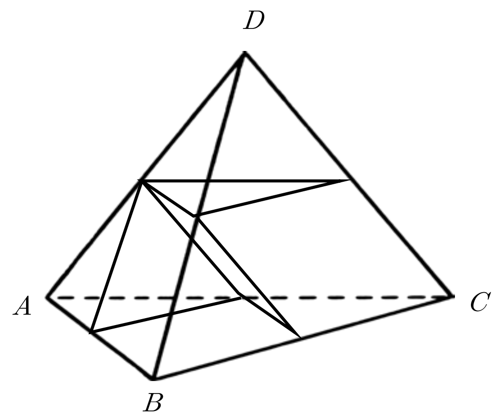
【그림 2】


【그림 3】

공간에서【그림 4】와 같이 $x$축으로 기울어진 평행육면체 $ABGK$-$DCHL$을 생각하자. 다면체 $EBGF$-$HC$를 잘라 $IAKJ$-$LD$에 이어붙임을 하여 직육면체 $IEFJ$-$DCHL$을 얻는다. 이러한 방법으로 일반적인 평행육면체인 경우도 직육면체로 변형하여 **밑면(평행사변형)의 넓이×높이**로 부피를 계산할 수 있다.



【그림 4】



【그림 5】

[라] 고대 그리스인들은 유한 번의 **분할** 또는 **이어붙임**을 하여 사면체를 직육면체로 변형하고자 하였다. 이는 불가능하다는 것이 20세기 초가 되어서야 밝혀졌다. 그렇다면 사면체의 부피를 어떻게 구할 수 있을까? 사면체 $ABCD$의 여섯 개의 모서리를 각각 이등분하여【그림 5】와 같이 연결하면, 작은 사면체 두 개와 삼각기둥 두 개로 분할된다. 이와 같은 분할을 반복하여 만들어진 삼각기둥의 부피를 모두 합하면

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)\times \text{밑면(삼각형 } ABC\text{)의 넓이}\times\text{높이}\\ &=\frac{1}{3}\times\text{밑면(삼각형 } ABC\text{)의 넓이}\times\text{높이}\end{aligned} \quad \cdots\cdots (1)$$

이다. 사면체에서 삼각기둥을 계속해서 제거하면 남은 부분의 부피는 0으로 수렴하므로 결국 사면체의 부피는

$$\frac{1}{3}\times\text{밑면(삼각형 } ABC\text{)의 넓이}\times\text{높이}$$

이다.

【2-1】 제시문 [나]를 참고하여 변의 길이가 임의의 양의 유리수인 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 설명하고 직육면체의 경우로 확장하여라.

【2-2】 제시문 [라]의 정사면체 분할에서 얻어지는 두 사면체의 부피가 같고 두 삼각기둥 역시 부피가 같음을 보여라.

【2-3】 제시문 [라]에서 (1)이 성립함을 자세히 설명하여라.

【2-4】 정팔면체의 한 삼각형을 밑면이라고 하고 마주보이는 반대편 삼각형까지의 거리를 높이라고 할 때, 제시문을 이용하여 부피 공식을 유도하라.