2. 해설

[문항1]

교과과정 : 고등학교 수학 1 (수열, 계차수열, 점화식, 수열의 극한)

문항 1은 수리 계산형, 수리 응용형 문제로 고등학교 교과과정에서 다루는 수열 및 극한을 주제로 하고 있다. 제시문의 내용을 이해하여, 이에 관한 질문을 수리적 계산으로 옮기고 답을 올바로 구하는 능력을 평가하기 위한 논술 문제로 본교 대입 논술시험에서 실제 출제되는 유형과 매우 유사하다.

【1−1】

$p+q+r \neq 0$ 에 대하여 $p\,a_{n+2}+q\,a_{n+1}+r\,a_n=0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴한다고 하자. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 라 놓고 등식 $p\,a_{n+2}+q\,a_{n+1}+r\,a_n=0$ 에 $n\to\infty$ 의 극한을 취하면 $(p+q+r)\alpha=0$ 을 얻는다. 이때 $p+q+r\neq 0$ 이므로 $\alpha=0$ 이어야 한다. 한편 $p+q+r=0$ 인 경우에는 $(p+q+r)\alpha=0$ 은 모든 실수 α 에 대하여 성립하므로 $\alpha=\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 이 반드시 성립할 필요가 없다. 실제로 제시문 [가]에서 수열의 일반항

$$a_n = a_1 + \frac{(a_2-a_1)(1-(r/p)^{n-1})}{1-(r/p)} \text{ 은 } -1<\frac{r}{p}<1 \text{ 인 경우에 } a_1+\frac{a_2-a_1}{1-(r/p)} \text{ 으로 수렴한다.}$$

【1−2】

$a_1=1,\ a_2=4$ 그리고 $(a_{n+2}-2\,a_{n+1})=2\,(a_{n+1}-2\,a_n)$ 에서 $a_{n+1}-2\,a_n=b_n$ 이라 놓으면, $b_{n+1}=2\,b_n$, $b_1=a_2-2\,a_1=2$ 이므로

$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$ 이고 따라서 $a_{n+1}-2\,a_n=2^n$ 이 성립한다. 이 식의 양변을 2^{n+1} 로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}$ 가 성립하므로

수열 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 은 첫째 항이 $\frac{1}{2}$ 이고 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이다. 따라서 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$ 가 성립하여 $a_n=n2^{n-1}$ 을 얻는다.

한편, $a_1=1,\ a_2=4$, $a_{n+2}-4\,a_{n+1}+3\,a_n=0$ 인 경우 $(a_{n+2}-\alpha\,a_{n+1})=\beta\,(a_{n+1}-\alpha\,a_n)$ 라 놓고 비교하면 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=3$ 으로부터 $(\alpha,\beta)=(1,3)$ 또는 $(3,1)$ 을 얻으므로, 제시문 [나]로부터

$$a_{n+1}-a_n=(4-1)\,3^{n-1}=3^n$$
$$a_{n+1}-3\,a_n=(4-3)\,1^{n-1}=1$$

이 성립한다. 위 식에서 아래 식을 빼고 정리하면 $a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$ 을 얻는다.

【1−3】

$a_k=k$ 분 후에 용기 A 에 들어있게 되는 리터 단위의 물의 양
$b_k=k$ 분 후에 용기 B 에 들어있게 되는 리터 단위의 물의 양
이라 놓으면 다음이 성립한다.

$$a_{k+1}=0.9\,a_k+0.2\,b_k$$
$$b_{k+1}=0.1\,a_k+0.8\,b_k$$

위의 식에서 $b_k=5\,a_{k+1}-4.5\,a_k$ 을 얻고 이를 아래 식에 대입하면 다음을 얻는다.

$$5\,a_{k+2}-4.5\,a_{k+1}=0.1\,a_k+0.8\,(5\,a_{k+1}-4.5\,a_k)$$

이를 정리하면 $5\,a_{k+2}-8.5\,a_{k+1}+3.5\,a_k=0$ 이 성립하고 ($p+q+r=0$ 인 경우) 따라서

$a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{7}{10}(a_{k+1}-a_k)$ 가 성립하고, $-1<\frac{7}{10}<1$ 이므로 $\lim_{k\to\infty} a_k=a$ 가 존재한다.

모든 자연수 k 에 대하여 a_k+b_k 는 일정한 값이므로 $\lim_{k\to\infty} b_k=b$ 도 존재한다.
이제 방정식

$$a=0.9\,a+0.2\,b$$
$$b=0.1\,a+0.8\,b$$

를 풀면 $a=2\,b$ 를 얻고 따라서 A 에 담긴 물의 양과 용기 B 에 담긴 물의 양의 비율은 특정한 값 2에 수렴한다.

[문항2]

교과과정 : 중학교 1학년 통계 (도수분포),
고등학교 1학년 방정식과 부등식 (방정식의 정수해)

문항 2는 자료 분석형 문제로 자료가 되는 도표에 대한 철저한 이해를 동반한 논리적 사고 및 수리적 능력을 기반으로 하는 문제 해결 능력을 평가하고자 출제되었다.
【2−1】과 【2−2】은 자료분석−과제해결형 문제로서 수험생이 논리적이고 수학적인 사고를 이용하여 현실의 문제를 분석하고 해결해나갈 수 있는 능력을 평가하는 문제이다.
【2−3】은 미지수의 범위가 주어진 1차 연립 방정식의 정수해를 구하는 문제로 귀결되는 과제 해결형 및 수리 응용형의 혼합 형식이다.

【2−1】
1순위를 가장 많이 얻은 후보가 당선되기로 할 때, 38표로 1순위를 가장 많이 얻은 후보 A가 총장에 당선되어야 한다. 이는 국회의원 선거에서 당선자가 나오는 방식과 금메달의 숫자로만 올림픽 출전국가의 순위를 매기는 방식과 같다.

1순위에게 4점, 2순위에게 3점, 3순위에게 2점, 4순위에게 1점을 주어 그 점수를 합하는 방법을 택할 때, 총점 284로 B가 가장 높은 점수를 얻어 281점으로 2위를 차지한 후보 C를 누르고 총장에 당선된다. 이는 A는 4점, B는 3점, C는 2점, D는 1점으로 간주하여 성적을 산출하는 대학교 학점 평가 방식과 같다.

후보끼리 일대일로 선호도를 비교할 때, C:A = 62:38 , C:B = 52:48 , C:D = 67:33 로 후보 C가 당선된다. 이는 출전 팀들이 일대일로 풀리그를 벌여서 우승자를 결정짓는 운동경기에 비교할 수 있다.

【2−2】
1위 최소득표 후보를 차례로 탈락시키고 마지막으로 남은 후보가 당선되는 방식을 고려해보자. 투표 시 처음부터 지지하는 후보를 1순위, 1순위 후보가 탈락할 때 지지하는 후보를 2순위, 2순위 후보가 탈락할 때 지지하는 후보를 3순위 등으로 기표하면 단 한번 투표로 최종 당선자를 선출할 수 있다. 이런 방식을 택하는 경우 1순위 지지자가 11명뿐인 후보 B가 가장 먼저 탈락하고, B가 없는 상황에서 투표결과를 상정하면 후보 C가 이어서 탈락하고 최종 선발은 남은 후보 A와 D 중 다수의 표를 얻은 후보 D가 당선된다.

【2−3】
주어진 식 $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6=20,\ f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \geq 1$ 와
$f_3+f_4+f_6=11,\ f_2+f_5+f_6=14,\ f_1+f_2+f_3=12$ 로부터
$f_1+f_2+f_5=9,\ f_1+f_3+f_4=6,\ f_4+f_5+f_6=8$ 을 얻는다.

이중 가장 간단한 식 $f_1+f_3+f_4=6$ 으로부터 $2 \leq f_3+f_4 \leq 5$ 가 성립하므로
$f_3+f_4=2, 3, 4, 5$ 를 각각 대입해서 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ 를 구하도록 한다.

(i) $f_3+f_4=2$ 인 경우 $f_1=4,\ f_3=1,\ f_4=1$ 이고 $f_1+f_2+f_3=12$ 로부터 $f_2=7$ 을 얻으나 이는 식 $f_1+f_2+f_5=9$ 를 만족할 수 없다.
(ii) $f_3+f_4=3$ 인 경우 $f_1=3,\ f_3=1,\ f_4=2$ 또는 $f_1=3,\ f_3=2,\ f_4=1$ 가 성립하나 이는 $f_1+f_2+f_3=12$ 와 $f_1+f_2+f_5=9$ 를 동시에 만족할 수 없다.
(iii) $f_3+f_4=4$ 인 경우 $f_3+f_4+f_6=11$ 으로부터 $f_6=7$ 을 얻으나 이는 $f_4+f_5+f_6=8$ 를 만족할 수 없다.
(iv) $f_3+f_4=5$ 인 경우 $f_1=1$ 이고 $f_3+f_4+f_6=11$ 으로부터 $f_6=6$ 을 얻고 $f_4+f_5+f_6=8$ 로부터 $f_4=1,\ f_5=1$ 을 얻고 따라서 $f_3=4$ 이고 $f_1+f_2+f_3=12$ 로부터 $f_2=7$ 을 얻는다. 이렇게 얻어진 $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)=(1, 7, 4, 1, 1, 6)$ 은 모든 식을 만족한다.

따라서 위원회가 공표한 내용만으로 총장 당선자가 유일하게 결정되며, 당선자는 8명에게서 1위 득표를 얻은 후보 A이다.