영국산업혁명 후기의 삶의 질에 대한 추론 우선 [바]에서 제시한 그래프는 1800~1855년 사이 실질임금은 증가하였고, 성인 남성의 평균 신장은 줄어들었음을 확인할 수 있다. 실질임금 추이는 영국 산업혁명기 물질적인 삶의 질은 평균적으로 증가하였음을 시사한다. 그러나 성인 남성의 평균 신장 추이로 평가할 때 영국 산업혁명의 삶의 질은 하락하였음을 추론할 수 있다. 제시문 **[라]**는 신장이 어린 시절의 영양결핍, 아동노동 그리고 질병환경에의 노출 정도를 보여준다고 하였다. 또한 우리는 제시문 **[마]**의 작품을 통해 영국산업혁명 당시 아이들이 육체적 노동과 배고픔에 시달리고 있었음을 알 수 있다. 따라서 **[라]**와 **[마]**의 내용을 종합하면 산업혁명 후기 왜 성인 남성의 평균 신장이 하락하는지를 이해할 수 있다. 결국 성인 평균 신장으로 평가할 때 영국 산업혁명 동안 개인들의 평균적인 삶의 질은 하락하고 있었음을 추론할 수 있다. 유의할 점은 두 지표(실질임금과 평균 신장) 중 어느 한 쪽만을 선택하는 것 보다는 각 지표가 보여주는 점을 명확히 밝히고 두 지표의 차이점을 논의하는 것이 요구된다.

자연계열

1. 모의 논술문제

[문항1]

제시문을 읽고 다음 물음에 답하라. (글자 수 제한 없음, 50% 배점)

[가]

첫째 항 a_1과 둘째 항 a_2가 주어지고 $p+q+r=0$ 인 실수 p, q, r과 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$p\,a_{n+2}+q\,a_{n+1}+r\,a_n=0$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 있을 때 $q=-p-r$ 을 주어진 식에 대입하고 정리하면

$$p\,(a_{n+2}-a_{n+1})=r\,(a_{n+1}-a_n)$$

즉, 등식

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{r}{p}\,(a_{n+1}-a_n)$$

을 만족하므로 $\{a_n\}$ 의 계차수열은 공비가 $\frac{r}{p}$ 인 등비수열이다. 이때 $a_{n+1}-a_n=b_n$이라 놓으면,

$$b_{n+1}=\frac{r}{p}\,b_n,\ \ b_1=a_2-a_1$$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=(a_2-a_1)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}$$

이다. 그러므로 $n>1$에 대하여

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_2-a_1)\left(\frac{r}{p}\right)^{k-1}=a_1+\frac{(a_2-a_1)\,(1-(r/p)^{n-1})}{1-(r/p)}$$

이다.

[나]

수열 $\{a_n\}$ 이 $p+q+r \neq 0$ 인 실수 p, q, r 과 모든 자연수 n 에 대하여

$$p\,a_{n+2} + q\,a_{n+1} + r\,a_n = 0$$

을 만족하는 경우

$$(a_{n+2} - \alpha\,a_{n+1}) = \beta\,(a_{n+1} - \alpha\,a_n)$$

을 성립하게 하는 실수 α, β 를 찾는다.

먼저 $\alpha = \beta$ 인 경우를 살펴보자. 예를 들어, 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} - 4\,a_{n+1} + 4\,a_n = 0$$

을 만족할 때, 식

$$(a_{n+2} - \alpha\,a_{n+1}) = \beta\,(a_{n+1} - \alpha\,a_n)$$

으로부터 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\,\beta = 4$ 를 얻고 이를 풀면 $\alpha = \beta = 2$ 를 얻는다. 이 경우 수열 $\{a_n\}$ 은

$$(a_{n+2} - 2\,a_{n+1}) = 2\,(a_{n+1} - 2\,a_n)$$

을 만족한다.

이때 $a_{n+1} - 2\,a_n = b_n$ 이라 놓으면, $b_{n+1} = 2\,b_n$, $b_1 = a_2 - 2\,a_1$ 이므로 $b_n = (a_2 - 2\,a_1)\,2^{\,n-1}$ 이고, 이로부터 수열의 일반항 a_n 을 구할 수 있다.①

α, β 가 서로 다른 실수 ($\alpha \neq \beta$) 인 경우에는 두 식

$$(a_{n+2} - \alpha\,a_{n+1}) = \beta\,(a_{n+1} - \alpha\,a_n)$$

과

$$(a_{n+2} - \beta\,a_{n+1}) = \alpha\,(a_{n+1} - \beta\,a_n)$$

이 모든 자연수 n 에 대하여 성립하고, 이는 두 수열 $\{a_{n+1} - \alpha\,a_n\}$ 과 $\{a_{n+1} - \beta\,a_n\}$ 이 각각 공비가 β 와 α 인 등비수열이라는 것을 의미한다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - \alpha\,a_n = (a_2 - \alpha\,a_1)\,\beta^{\,n-1}$$
$$a_{n+1} - \beta\,a_n = (a_2 - \beta\,a_1)\,\alpha^{\,n-1}$$

이 성립하고, 이 두 개의 식 중 위의 식에서 아래의 식을 빼고 정리하면 수열의 일반항 a_n 을 구할 수 있다.

[다]

두 개의 용기 A, B 에 현재 적당한 양의 물이 들어있는데, 용기 A 에 담긴 물의 양의 10%를 용기 B 로 옮겨 담는 동시에 용기 B 에 담긴 물의 양의 20%를 용기 A 로 옮겨 담는 작업을 매 1분마다 지속적으로 반복한다. 즉 현재부터 매 1분마다 용기 A 에는 담겨 있던 물의 10%가 빠져나가는 동시에 용기 B 에 담겨져 있던 물의 20%가 들어오는 것이 반복 된다. 이때 아주 오랜 시간이 지난 후 두 용기에 담긴 물의 양의 비율은 일정한 값으로 수렴한다.

【1−1】 $p+q+r \neq 0$ 인 실수 p, q, r 과 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $p\,a_{n+2} + q\,a_{n+1} + r\,a_n = 0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴할 때 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 임을 설명하시오. 또한 $p+q+r = 0$ 인 경우에도 $p\,a_{n+2} + q\,a_{n+1} + r\,a_n = 0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴할 때 항상 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이 성립하는가?

【1−2】 제시문 **[나]**의 밑줄 친 ①에서 언급한 수열에서 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ 일 때 일반항 a_n 을 구하시오. 또한, 제시문 **[나]**를 참조하여 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ 그리고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} - 4\,a_{n+1} + 3\,a_n = 0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하라.

【1−3】 제시문 **[다]**에서 아주 오랜 시간이 지난 후 후에 용기 A 에 담긴 물의 양은 용기 B 에 담긴 물의 양의 2배의 값으로 수렴함을 설명하라.

[문항2]
제시문을 읽고 다음 물음에 답하라. (글자 수 제한 없음, 50% 배점)

한국대학교는 교수 100명의 직접투표를 통해 총장 선거를 실시했다. 총장후보자는 A, B, C, D 네 사람이고, 유권자인 교수 100명은 투표용지에 각 후보자의 순위를 적는 방식으로 선거가 진행되었으며, 투표 결과는 다음의 표와 같다.

득표수 (명)	1위	2위	3위	4위
35	A	B	C	D
1	A	B	D	C
0	A	C	B	D
1	A	C	D	B
0	A	D	B	C
1	A	D	C	B
0	B	A	C	D
0	B	A	D	C
0	B	C	A	D
1	B	C	D	A
0	B	D	A	C
10	B	D	C	A
0	C	A	B	D
0	C	A	D	B
2	C	B	A	D
25	C	B	D	A
0	C	D	A	B
3	C	D	B	A
0	D	A	B	C
0	D	A	C	B
0	D	B	A	C
1	D	B	C	A
0	D	C	A	B
20	D	C	B	A

투표결과 4명의 후보들은 각자가 총장이 되어야 한다고 주장하였고, 학교의 이사회는 토론 끝에 후보 D를 탈락시킨 후 교수 20명으로 총장 후보 추천 위원회를 새롭게 구성하여 이들로 하여금 후보 A, B, C를 각자 선호하는 순서대로 적는 2차 투표를 실시하였다. 위원회는 2차 투표 결과 단순히 1순위를 가장 많이 얻은 후보가 총장으로 당선된다고 룰을 정했고, 개표결과 20명의 위원들 중 11명이 A보다 B를 선호하였고, 14명이 B보다 C를 선호하였으며, 12명이 C보다 A를 선호하였고, 또한 아래 표에서 개표결과 발생 가능한 6가지 결과의 득표수를 나타내는 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ 중 단 하나도 0이 아니었다고 공표하였다.

득표수 (명)	1위	2위	3위
f_1	A	B	C
f_2	A	C	B
f_3	B	A	C
f_4	B	C	A
f_5	C	A	B
f_6	C	B	A

【2-1】1차 투표결과 세 명의 후보 A, B, C 모두 각자 자신이 총장이 되어야 한다고 주장하였을 때 그 이유가 나름대로 의미 있다고 받아들여진 이유를 설명하시오. (15% 배점)

【2-2】1차 투표에서 탈락한 후보 D가 총장이 되어야 한다고 주장할 수 있는 근거를 나름의 논리로 설명하시오. (10% 배점)

【2-3】2차 투표 후 위원회가 공표한 내용만으로 총장 당선자가 결정되었다고 말할 수 있는가? 만일 그렇다면 총장 당선자는 누구인가? (25% 배점)