2013학년도 수시모집 논술전형

논 술 고 사 문제지

<자연과학부/전자공학계>

수험번호		지 원 모 집 단 위		성 명	

■ **유의사항**

1. 제목은 쓰지 말고 본문부터 시작할 것.
2. 답안 분량은 띄어쓰기 포함한 글자 수임.
3. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 또는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용하여야 함.
4. 답안이나 답안지의 여백에 자신을 드러낼 수 있는 답안 이외의 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현 또는 표시를 한 경우에는 0점 처리함.

<문제 1 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수의 열을 수열이라고 한다. 무한수열은 자연수의 집합을 정의역으로 갖는 함수이다. 다시 말하면, $\mathbb{N}$을 자연수 전체의 집합, $\mathbb{R}$을 실수 전체의 집합이라 할 때, 함수 $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$은 수열이다. 이때, $a_n=f(n)$이라 하면 수열은 $\{a_n\}$으로 표현된다. 예를 들어 두 실수 a, b에 대하여 $\max(a,b)$를 a와 b중 작지 않은 실수라 할 때, d_1을 $-1<d_1<0$인 실수라 하고, 모든 자연수 n에 대하여 d_{n+1}을

$$\max\{d_n, -\frac{1}{n+1}\}<d_{n+1}<0$$

인 실수라 하면 $d_n<d_{n+1}$이므로 수열 $\{d_n\}$은 증가하는 수열이 된다.

수열의 몇 가지 성질을 살펴보자. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n<c_n$을 만족하는 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$에 대하여, $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L$이면 n이 한없이 커질 때 a_n과 c_n은 실수 L에 가까워지며, a_n과 c_n 사이의 수인 b_n도 L에 가까워진다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=L$이다. 위의 수열 $\{d_n\}$에 대하여 $-\frac{1}{n}<d_n<0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}d_n=0$ 이다. 수열 $\{e_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}e_n=\beta$ 이고 모든 자연수 n에 대하여 $e_n<e_{n+1}$이면, $e_n<\beta$ 이다. $\lim_{n\to\infty}e_n=\beta$ 이므로 실수 α가 $\alpha<\beta$이면 $e_\ell>\alpha$가 되는 자연수 ℓ이 존재한다.

[나] x, y를 $x<y$인 실수라 하자. $0\le x<y$인 경우를 생각하자. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 n이 한없이 커질 때 $\frac{1}{n}$은 0에 가까워진다. 그런데 $y-x>0$이므로 $\frac{1}{N}<y-x$인 자연수 N이 존재한다. 이러한 N을 고정시켰을 때, $\lim_{m\to\infty}\frac{m}{N}=\infty$이므로 m이 한없이 커짐에 따라 $\frac{m}{N}$은 한없이 커지고, 따라서 $y<\frac{M}{N}$이 되는 자연수 M이 존재한다. y는 집합

$$(0,\frac{M}{N}]=(\frac{0}{N},\frac{1}{N}]\cup(\frac{1}{N},\frac{2}{N}]\cup\cdots\cup(\frac{M-1}{N},\frac{M}{N}]$$

에 속하므로, $\frac{K-1}{N}<y\le\frac{K}{N}$를 만족하는 M보다 같거나 작은 자연수 K가 존재한다. $\frac{K-1}{N}<y\le\frac{K}{N}$이고 $\frac{1}{N}<y-x$ 이므로 ①<u>$0\le x<y$인 두 실수 x와 y에 대하여 $x<r<y$인 유리수 r이 존재한다.</u> $x<y\le0$인 경우를 생각하자. $0\le-y<-x$이므로 $-y<r<-x$인 유리수가 존재하며, $x<-r<y$이므로 $x<y\le0$을 만족하는 두 실수 x와 y 사이에는 유리수가 존재한다. $x<0<y$인 경우 0은 유리수이므로 x와 y 사이에는 유리수가 존재한다. 따라서 서로 다른 두 실수 사이에는 유리수가 항상 존재한다.

【1-1】 ①에서 유리수 $\frac{K-1}{N}$은 두 실수 x와 y 사이의 수임을 보여라.

【1-2】 두 실수 사이에는 0이 아닌 유리수가 존재함을 보여라.

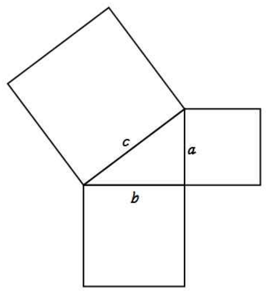
【1-3】 제시문 [가]를 참조하여 실수 y와 모든 자연수 n에 대하여 $r_n<r_{n+1}$과 $y-\frac{1}{n}<r_n$을 만족하며, $\lim_{n\to\infty}r_n=y$를 만족하는 유리수로 이루어진 수열 $\{r_n\}$이 존재함을 보여라.

【1-4】 $x<y$인 두 실수 x, y 사이에는 무한히 많은 유리수가 존재함을 보여라.

【1-5】 두 실수 사이에는 유리수가 있음을 이용하여, $x<y$인 두 실수 x, y 사이에는 무리수가 존재함을 보여라.

<문제 2 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 나머지 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 두 개의 넓이의 합과 같다는 정리인 피타고라스 정리는 고대 그리스의 철학자이자 수학자였던 피타고라스가 처음 발견, 증명한 것으로 일반적으로 알려져 있다. 직각삼각형의 빗변의 길이를 c, 다른 두 변의 길이를 각각 a, b 라고 하면 $a^2+b^2=c^2$ 이라는 식으로 쓸 수 있다. 피타고라스 정리의 증명은 수백 가지의 다양한 증명 방법이 알려져 있다.



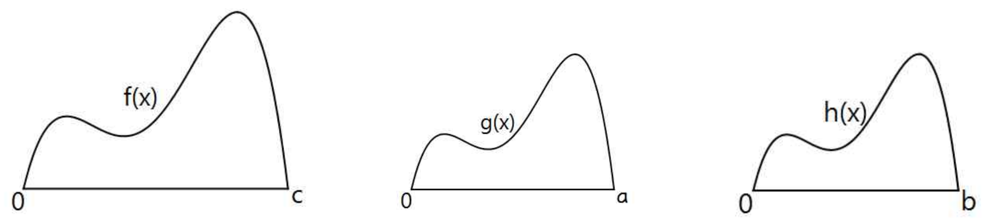
[나] 피타고라스 수는 피타고라스 정리 $a^2+b^2=c^2$ 를 만족하는 세 자연수 쌍 (a,b,c) 를 말한다. 만일 (a,b,c) 가 피타고라스 수라면 모든 자연수 k 에 대하여 (ka,kb,kc) 역시 피타고라스 수가 된다. 어떤 피타고라스 수 (a,b,c) 가 a,b,c 중 어느 두 수도 서로 소일 때 이를 원시 피타고라스 수라고 한다. c 가 100보다 작은 원시 피타고라스 수는 아래와 같이 모두 16개가 있다.

$$(3,4,5),\ (5,12,13),\ (7,24,25),\ (8,15,17),\ (9,40,41),\ (11,60,61),\ (12,35,37),\ (13,84,85),$$
$$(16,63,65),\ (20,21,29),\ (28,45,53),\ (33,56,65),\ (36,77,85),\ (39,80,89),\ (48,55,73),\ (65,72,97).$$

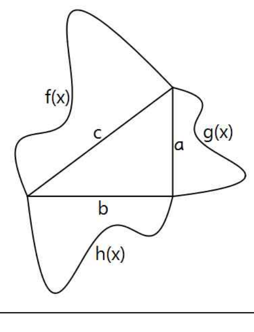
[다] 원점을 중심으로 닮은비가 k 인 닮음변환은 아래와 같은 일차변환이다.

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

예를 들어, 반지름이 1인 원 $x^2+y^2=1$을 원점을 중심으로 닮은비가 2인 닮음변환에 의하여 얻어지는 도형은 반지름이 2인 원 $x^2+y^2=4$이다.
(a,b,c) 를 피라고라스 수라 하자. $y=f(x)$ 를 구간 $[0,c]$ 에서 정의되고 양의 실수를 함수값으로 갖는 연속함수라 하자. $y=f(x)$ 를 원점을 중심으로 닮은비가 $\frac{a}{c}$ 인 닮음변환에 의하여 얻어진 함수 $y=g(x)$ 는 구간 $[0,a]$ 에서 정의되고 양의 실수를 함수값으로 갖는 연속함수가 된다. 마찬가지 방법으로 $y=f(x)$ 를 원점을 중심으로 닮은비가 $\frac{b}{c}$ 인 닮음변환에 의하여 얻어진 함수 $y=h(x)$ 는 구간 $[0,b]$ 에서 정의되고 양의 실수를 함수값으로 갖는 연속함수가 된다.



연속함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 의 그래프를 아래와 같이 a,b,c 를 세 변으로 갖는 직각삼각형에 그려보자.



【2-1】 원시 피라고라스 수 (a,b,c) 들 중에서 a,b,c 가 등차수열을 이루는 것은 하나밖에 없음을 보여라.

【2-2】 원시 피라고라스 수 (a,b,c) 들 중에서 a,b,c 가 등비수열을 이루는 것은 존재하지 않음을 보여라.

【2-3】 (a,b,c) 를 피타고라스 수라 하자. 위의 제시문 [다]에서 주어진 함수 $f(x),g(x),h(x)$ 에 대하여 다음과 같은 피타고라스 정리의 일반화 명제가 성립함을 보여\라.

$$\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^a g(x)\,dx + \int_0^b h(x)\,dx.$$

【2-4】 T를 3차원 공간에서 네 점 $O(0,0,0), A(\alpha,0,0), B(0,\beta,0), C(0,0,\gamma)$ 를 꼭지점으로 하는 사면체라고 하자. 이때 다음과 같은 피타고라스 정리의 일반화 명제가 성립함을 보여라.

『세 삼각형 OAB, OBC, OAC 의 면적의 제곱의 합은 삼각형 ABC 의 면적의 제곱과 같다.』