서강대학교 SOGANG UNIVERSITY

# 논 술 고 사 문제지

<화공생명공학계/컴퓨터공학계/기계공학계>

| 수험번호 | | 지원 모집단위 | | 성 명 | |
|---|---|---|---|---|---|

■ **유의사항**

1. 제목은 쓰지 말고 본문부터 시작할 것.
2. 답안 분량은 띄어쓰기 포함한 글자 수임.
3. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 또는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용하여야 함.
4. 답안이나 답안지의 여백에 자신을 드러낼 수 있는 답안 이외의 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현 또는 표시를 한 경우에는 0점 처리함.

<문제 1 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

함수 $f(x)$에서 $x$가 $a$와 다른 값을 가지면서 $a$에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 실수 $L$에 한없이 가까워지면, $f(x)$는 $x=a$에서 극한(값) $L$을 갖는다고 말하며 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 또는 $x\to a$ 일 때 $f(x)\to L$로 나타낸다. 예를 들면 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 일 때, $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ 이다. 함수의 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$이 존재하면 좌극한 $\lim_{x\to a-0} f(x)$과 우극한 $\lim_{x\to a+0} f(x)$이 존재하고 그 값은 같으며, 이 역도 성립한다. 예를 들면 $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$ 일 때, $\lim_{x\to 1-0} f(x)=-1$ 이고 $\lim_{x\to 1+0} f(x)=1$ 이어서 좌극한과 우극한이 다르므로, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극한이 존재하지 않는다. 또한, 모든 $x$에 대하여 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 이고 $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$ 이면, $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 이 성립함을 극한의 정의로부터 쉽게 알 수 있다. $x$가 양수이면서 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 일정한 실수 $L$에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ 또는 $x\to\infty$ 일 때 $f(x)\to L$ 로 나타낸다. 예를 들면 $f(x)=\dfrac{x}{2^x}$ 일 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ 이다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고, $x=a$에서 극한이 존재하며, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ 일 때, 이 함수는 $x=a$에서 연속이라고 한다. 함수 $f(x)$가 구간 $I$ 의 모든 점에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\ne f(b)$ 이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 $k$에 대하여 $f(c)=k$인 실수 $c$가 $a$와 $b$ 사이에 적어도 하나 존재함이 알려져 있다. 이를 중간값의 정리라 한다.

함수 $f(x)$에 대하여 극한 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\left(=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ 이 존재하는 경우 이 함수는 $x=a$에서 미분가능하다고 하며 이 극한값을 $f'(a)$ 로 나타낸다. 함수 $f(x)$가 구간 $I$ 의 모든 점에서 미분가능할 때, $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 하며, 구간 $I$ 에서

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

로 정의된 함수 $f'(x)$를 $f(x)$의 도함수라고 한다. 구간 $I$ 의 모든 점 $x$에서 $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$는 $I$ 에서 증가함수이고, 구간 $I$ 의 모든 점 $x$에서 $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$는 $I$ 에서 감소함수이다. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0,$$

즉 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ 가 성립하므로 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 한편 $f(x)=|x-1|$ 는 $\lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$ 을 만족하므로 $x=1$에서 연속이지만, $\lim_{x\to 1-0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1\ne 1=\lim_{x\to 1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 이므로 $x=1$에서 미분가능하지 않다. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고, 열린 구간 $(a,b)$에서 미분가능할 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 실수 $c$가 $a$와 $b$ 사이에 적어도 하나 존재함이 알려져 있다. 이를 평균값의 정리라 한다.

【1-1】 실수 위에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x, w$에 대하여 $|f(x)-f(w)|\le 3|x-w|^{3/2}$ 를 만족할 때, 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)=0$임을 보여라.

【1-2】 실수 위에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\text{는 유리수}) \\ 0 & (x\text{는 무리수})\end{cases}$ 는 $x=0$ 에서 연속인가? $x=0$ 에서 미분가능한가?

【1-3】 실수 위에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} 2^{-(1/x)}+x^2\cos x & (x>0) \\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$ 는 $x=0$ 에서 미분가능한가?

【1-4】 방정식 $\sin x = x^3-6x^2+13x-7$ 은 단 하나의 실근을 갖으며, 그 실근은 0과 1사이에 있음을 보여라.

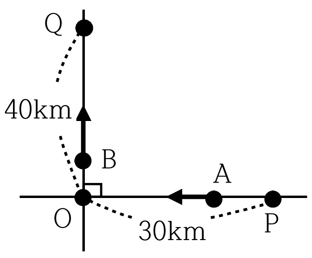
【1-5】 평균값의 정리를 사용하여 $\dfrac{9}{11}<\sqrt{119}-\sqrt{101}<\dfrac{9}{10}$ 임을 보여라.

<문제 2 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 르네 데카르트는 1637년에 발간된 '방법서설'을 통하여 수학적 방법을 어떻게 철학을 비롯한 다른 학문에 적용할 수 있는지 설명하였는데, 그 책의 부록인 '기하학'에서 평면 좌표를 도입하여 대수적인 방법으로 중요한 기하적 문제들을 해결할 수 있었다. 평면에 좌표계를 도입하면 각 점은 실수의 순서쌍으로 표현될 수 있고, 기하 곡선은 대수 방정식으로 표현되며, 두 곡선이 만나는 점은 연립방정식을 통하여 구할 수 있기 때문이다. 데카르트의 좌표계는 그때까지 누구도 알지 못했던 대수와 기하 사이의 연결 고리를 찾았다는 점에서 역사적인 혁명과도 같았다. 특히, 좌표평면에서 그래프를 통해 데카르트는 대수방정식을 기하 곡선으로, 마찬가지로 기하 곡선을 대수 방정식, 즉 수치로 나타내는 법을 발견하였고, 다른 두 곡선을 같은 좌표계에 그릴 수 있으며, 이 두 곡선의 교차점은 두 곡선으로 나타내어지는 연립방정식의 해가 된다는 것도 같이 발견하였다. 이로서 데카르트는 오랜 세월 동안 별개라고 생각되었던 대수와 기하를 통합함으로써 해석기하학이라는 분야의 초석을 다지게 되었다.

[나] 삼각형의 면적을 이용하여 좌표평면 위에서 원점과 직선 사이의 거리를 구하는 방법에 대하여 살펴본다. 먼저, 원점과 직선 $4x+3y=12$ 과의 거리 $d$를 구하기 위해 이 직선의 $x$절편, $y$절편과 원점이 이루는 삼각형의 면적을 두 가지 방법으로 구해서 서로 같게 놓음으로써 $d=\frac{12}{5}$ 를 얻을 수 있다. 이를 일반화하여 원점과 직선의 $x$절편, $y$절편을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 면적을 이용하면 $a$와 $b$가 0이 아닌 실수일 때 원점 $(0,0)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 $d$는 $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 임을 보일 수 있다.

[다] 아래 그림과 같이 수직으로 교차하는 두 길에서 A는 P지점에서 출발하여 O지점을 향해 시속 $30km$의 균일한 속력으로 달리고, 동시에 B는 O지점에서 출발하여 Q지점을 향해 시속 $40km$의 균일한 속력으로 달린다. P지점과 O지점 사이의 거리가 $30km$ 일 때, 출발 이후 A와 B 사이의 거리의 최솟값을 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 구할 수 있음을 살펴보자. 좌표평면에서 A의 위치를 원점으로 고정한 상태에서 B의 상대적인 위치를 생각해 보면, A와 B 사이의 거리의 최솟값은 원점과 직선 $4x-3y+120=0$ 사이의 거리임을 알 수 있다. 그러므로 A와 B 사이의 거리의 최솟값은 $\frac{120}{\sqrt{4^2+3^2}}=24$이다.



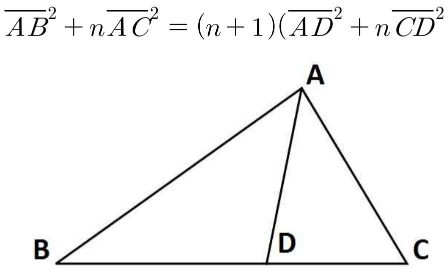

[라] 좌표평면의 점 $(x,y)$를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(x,-y)$ 이고, $(x,y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(y,x)$이다. 점의 대칭이동을 이용하고, 삼각형에서 두 변의 길이의 합은 다른 한 변의 길이보다 항상 크다는 사실을 이용하여 $a$와 $b$가 실수일 때 좌표평면위의 세 점 $(a,a),(b,0)$ 그리고 $(2,1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{10}$ 이다. 이때 최솟값 $\sqrt{10}$은 점 $(2,1)$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점과 $(2,1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 사이의 거리이다.

【2-1】 제시문 [나]의 밑줄 친 부분을 직접 계산을 통해 증명하고, 이를 이용하여 $a$와 $b$가 0이 아닌 실수일 때 점 $(x_1,y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리를 구하여라.

【2-2】 제시문 [다]의 밑줄 친 부분에서 A와 B 사이의 거리의 최솟값을 원점과 직선 $4x-3y+120=0$ 사이의 거리로 해석할 수 있는 이유를 설명하여라.

【2-3】 주어진 자연수 $n$과 삼각형 $ABC$ 에서 변 $BC$를 $n:1$로 내분하는 점을 $D$라고 하자 ( $\overline{BD}:\overline{DC}=n:1$).
이때 다음의 결과가 성립함을 보여라.

$$\overline{AB}^2+n\overline{AC}^2=(n+1)(\overline{AD}^2+n\overline{CD}^2)$$




【2-4】 제시문 [라]에서 언급한 세 점 $(a,a),(b,0)$ 그리고 $(2,1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{10}$ 임을 보여라.