2. 자연계열

1) 모의 논술문제

[문항 1]

제시문을 읽고 다음 물음에 답하라.(글자 수 제한 없음, 50% 배점)

함수의 극한이라는 것은 그 점에서의 값과는 관계가 없고, 그 점 주위에서의 값이 어떻게 변하는 가를 나타내는 것이다. 예를 들어 함수 $y=g(x)$ 에 대하여 α와 a가 실수인 경우 $\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$ 라 함은 x가 점 a에 가까이 갈 때 함수 g의 값이 α에 가까이 간다는 것이며 g의 점 a에서의 값과는 관계가 없다. 그런데 α가 실수가 아닌 경우, 예를 들어 $\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\infty$ 을 생각하자. 이 경우 0보다 큰 x가 0에 가까이 갈 때 ∞에 가까이 간다고 할 수는 없다. ∞는 수가 아닌 기호인 것이다. 다시말하면 ∞는 모든 실수보다 큰 것을 나타내는 기호이다. 그러면 $\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\infty$ 을 어떻게 해석할 것인가 하는 문제가 있다. 이것의 의미는 0보다 큰 x가 0에 아주 가까이 갈 때 함수값이 아주 커진다는 것이며, 이를 수학적으로 해석하면 '임의의 양의 실수 M에 대하여 0의 근방이 존재하여 x가 0보다 크며 그 근방에 있을 때 함수의 값이 M보다 크다' 라고 해석한다.

위의 경우는 x가 특정한 실수에 가까이 갈 때 함수의 변화에 관한 것이다. 그러면 x가 아주 커질 때 또는 아주 작아질 때 함수의 값이 어떻게 변화하는 지를 생각할 수 있다. 함수 $y=h(x)$에 대하여 이는 수학적으로 $\lim_{x\to\infty}h(x)$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)$ 로 쓴다. 그러면 β가 실수인 경우 $\lim_{x\to\infty}h(x)=\beta$ 라 하는 것이 무슨 의미인지를 생각해 보자. 앞의 경우는 x가 특정한 값 a에 가까이 갈 때의 변화인 것처럼 'x가 ∞에 가까일 갈 때 $h(x)$가 β에 가까이 간다' 라고 할 수는 없다. 그 이유는 앞에서 설명한 것처럼 ∞는 수가 아니기 때문이다. $\lim_{x\to\infty}h(x)=\beta$ 는 수학적으로 설명하면 다음과 같다. β의 근방을 임의로 택할 때 실수 M이 존재하여 x가 M보다 크면 $h(x)$가 앞에서 택한 β의 근방에 들어간다는 것이다. 다음은 β가 실수가 아닌 경우는 무슨 의미인지를 생각해 볼 필요가 있다. 다시말하면 $\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$를 생각하자. 이는 x가 아주 크면 $h(x)$의 값이 아주 크다는 의미이다. 이를 수학적으로 쓰면 '임의의 양의 실수 M에 대하여 실수 N이 존재하여 x가 N보다 크면 $h(x)$가 M보다 크다'는 것이다. 여기서 M과 N을 아주 큰 수라 생각하면 앞의 생각과 일치가 된다.

미분가능한 함수의 대표적인 예로 다항함수를 생각하자. 다항함수에서 변수가 아주 커질 때 또는 아주 작아질 때 다항함수가 어떻게 변하는 지는 다항함수의 최고차항에 의하여 결정된다. 변수가 아주 작아질 때 최고차항의 지수가 짝수인 경우와 홀수인 경우 다르며, 또한 최고차항의 계수가 양수인가 음수인가에 따라 다르다. 예를 들어 최고차항의 지수가 홀수이고 최고차항의 계수가 음수이면 변수가 아주 작아질 때 함수의 값은 아주 커지며, 최고차항의 지수가 홀수이고 최고차항의 계수가 양수이면 변수가 아주 작아질 때 함수의 값은 아주 작아진다.

함수의 최솟값을 찾는 문제는 최적화 문제에서 아주 중요하다고 할 수 있다. 예를 들어 부피가 주어진 육각형 모양의 상자를 만들 때 가로와 세로, 높이를 어떻게 하면 최소 겉넓이를 갖는 상자를 만들 수 있는가 하는 문제는 함수의 최솟값을 찾는 문제이다. 최솟값을 찾는 가장 기본적인 방법은 미분을 이용하는 것이다. 미분가능한 함수가 구간 $[a,b]$의 내부의 점에서 최솟값을 가지는 경우와 경계점에서 최솟값을 가지는 경우는 매우 다르다. 구간 내의 점 c에서 함수가 최솟값을 갖는 경우 $a<c<b$이면 함수의 미분값은 0이 되어야 하며, a에서 최솟값을 가지면 미분값은 0보다 같거나 커야 한다. 또한 b에서 최솟값을 가지면

미분값은 0 보다 같거나 작아야 한다. 함수의 최솟값을 찾는 문제도 중요하지만 최솟값이 존재하는가 하는 문제 또한 중요하다. 연속함수의 경우 구간에서의 최솟값의 존재성 문제는 구간에 따라 다르다. 예를 들어 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$ 은 구간 $(0,1]$ 에서 최솟값을 갖지 않는다. 함수 $y=g(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이면 이 함수의 구간 $[a,b]$ 에서의 최솟값의 존재 문제는 잘 알려져 있다. 다음은 유한 구간이 아닌 경우를 생각하자. 변수가 아주 작아지거나 아주 커지는 경우에 최솟값을 생각할 수 있다. 만일 함수 $y=h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라 하고, $\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\infty$ 인 경우, 실수 α 와 $M>0$, 집합 $(-\infty,-M]\bigcup[M,\infty)$ 내의 점 a 가 존재하여 $x\geq M$ 또는 $x\leq-M$ 이면 $h(x)\geq\alpha=h(a)$ 이다. 다시말하면 함수 $y=h(x)$ 는 집합 $(-\infty,-M]\bigcup[M,\infty)$ 에서 최솟값을 가진다.

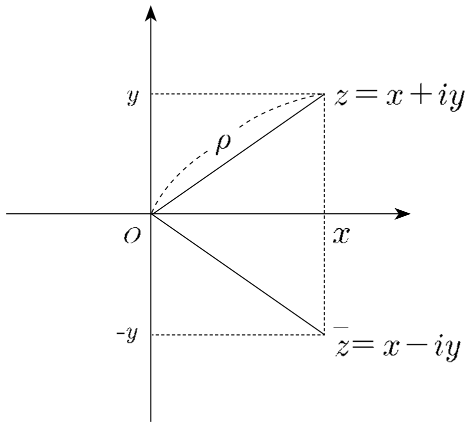
다항함수 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 라 하자. R은 실수 전체의 집합이다.

1. $a_n>0$ 이고 n 이 짝수이면 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ 임을 설명하여라.
2. 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이면 $a_n>0$ 이고 n 이 짝수임을 설명하여라.
3. $a_n>0$ 이고 n 이 짝수이면 f 는 R에서 최솟값 $f(x_0)$ 을 가짐을 설명하여라.
4. $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(n)}(x)$ 라 하자. $a_n>0$ 이고 n 이 짝수이면 g 는 최솟값을 가짐을 설명하여라.
5. g' 를 f 와 g 를 이용하여 나타내어라.
6. 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이라 하자. 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 임을 설명하여라.

[문항 2]

제시문을 읽고 다음 물음에 답하라.(글자 수 제한 없음, 50% 배점)

16세기에 들어와서 수학자들은 2차 또는 3차 다항식의 모든 근을 찾기 위해 음수의 제곱근의 표현방법을 연구하였다. 그러나 당시에 그것의 정확한 의미를 모른 채, 허수(imaginary)라는 용어를 사용하여, 실수와 다른 허구의 숫자로 생각했다. 거의 19세기 초반에 이르러, 베셀(Wessel), 아르강(Argand) 그리고 가우스(Gauss)에 의해 기하적 해석을 통하여 복소수를 명백히 하게 되었다. 즉, 복소수 $z = x + iy$를 다음【그림1】처럼 원점으로부터 각각 x –축, y –축의 좌표 (x, y) 로 평면에 표시하였다.



【그림1】

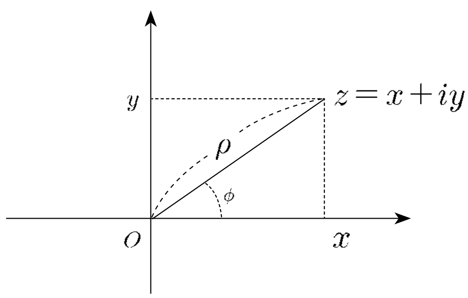
그리고 $z = x + iy$ 에 대하여 x축에 대칭인 복소수를 $\bar{z} = x - iy$ 로 정의하고 z 의 공액(conjugate)이라고 불러왔다.

두 복소수, $z_1 = x_1 + iy_1$과 $z_2 = x_2 + iy_2$ 에 대하여 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의한다.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2).$$

복소수 $z = x + iy$ 와 원점 사이의 거리를 ρ 라고 할 때, 피타고라스 정리에 의해 $\rho^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$ 이다. 이 경우, z 의 크기 $|z|$ 는 ρ 라고 말한다. 예컨대, 단위원은 원점에서 반지름이 1인 점들의 집합이므로 $\rho = 1$ 가 될 것이다.

원점이 아닌 복소수 z 에 대하여, 양의 x –축과 원점 O와 z 사이의 선분 $\overline{Oz}$ 사이의 반시계 방향의 각 ϕ 에 대하여 z 의 각(angle)이라고 정의한다. 이때, 다음【그림2】처럼 사인 함수와 코사인 함수의 성질을 이용하면, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ 이므로, 복소수 z는 $z = x + iy = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ 로 표현이 된다.



【그림2】

1. 곱의 정의로부터 $i^2 = -1$ 을 보이시오.

2. 두 복소수 z_1 , z_2에 대하여 $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ 이 성립하기위한 두 복소수 z_1 , z_2의 관계를 구하시오.

3. 모든 정수 n과 $z = x + iy$ 에 대하여, 귀납적 방법을 이용하여, $z^n = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$ 을 유도하시오.

4. 세 복소수 z_1, z_2, z_3를 꼭지점으로 하는 삼각형 $\triangle z_1z_2z_3$ 을 이용하여, 복소수 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$의 각을 해석하시오.

5. 네 개의 복소수 z_1, z_2, z_3, z_4에 대하여 복소수 $(z_3 - z_1)/(z_3 - z_2)$과 $(z_4 - z_1)/(z_4 - z_2)$의 각이 같을 때, 네 복소수들은 어떠한 위치 관계를 갖는가? 그리고 그 역의 성립여부를 입증하시오.

2) 예시답안 및 해설

[문항 1]

[예시답안]

문제1.

$a_n > 0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = \infty$ 이고,

n 이 짝수이므로 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = \infty$

문제2.

$a_n < 0$ 이면 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ 이며, 따라서 $a_n > 0$ 이다. n 이 홀수이면 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 이다.

따라서 $a_n > 0$ 이고 n 은 짝수이다.

문제3.

지문에서 실수 α와 $M > 0$, 집합 $(-\infty, -M] \cup [M, \infty)$ 내의 점 a가 존재하여 $x \ge M$ 또는 $x \le -M$ 이면 $f(x) \ge \alpha = f(a)$ 이다. f는 $[-M, M]$에서 연속이므로 f는 최솟값 $f(x_1)$를 갖는다.

즉 $f(a)$는 $(-\infty, -M] \cup [M, \infty)$에서의 최솟값이며 $f(x_1)$는 집합 $[-M, M]$ 에서 최솟값이다.

$f(a) \le f(x_1)$ 이면 $x_0 = a$, $f(a) \ge f(x_1)$ 이면 $x_0 = x_1$ 이라 하면 f 는 R에서 최솟값 $f(x_0)$를 갖는다.

문제4.

$g(x)$ 의 최고차항은 $a_n x^n$ 이다. $a_n > 0$ 이고 n 이 짝수이므로 문제 3에 의하여 g는 최솟값을 갖는다.

문제5.

$g'(x) = f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)$ 이고 f 는 n 차 다항식이므로 $f^{(n+1)}(x) = 0$. 따라서
$g'(x) = f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x) = g(x) - f(x)$ 이다.

문제6.

g가 b에서 최솟값을 갖는다고 하고 $g(b) \le 0$이라 하자. b는 구간 $[b-1, b+1]$ 내의 점이며 g는 구간에서 연속이므로 $g'(b) = 0$이다. 그러나 $f(b) > 0$이고 $g(b) \le 0$이므로 $g'(b) = g(b) - f(b) < 0$ 이므로 모순이다. 따라서 임의의 실수 x에 대하여 $g(x) > 0$ 이다.

[해 설]

미분과 극한의 개념에 관한 문제이다. 다항함수의 변화에 관한 문제로 다항함수는 연속이며 무한번 미분가능한 함수이다. 또한 다항함수의 최고차항의 지수가 n 이면 다항함수를 $n+1$ 번 미분하면 0 이 된다. 일반적으로 유한인 닫힌 구간에서 다항함수는 최솟값을 갖는다는 사실을 배우지만 이 사실은 당연히 받아들여지고 있으며 이를 응용하는 문제는 고등학교 과정에서 거의 다루고 있지 않다. 본 문제는 이 사실을 정확하게 이해하는 것이 중요하다. 유한 구간에서의 최솟값 문제를 확장하여 실수 전체에서의 최솟값에 관한 것을 묻고 있으며, 이를 풀기 위하여 지문에서 유한 구간 밖에서의 성질을 설명하고 있다. 고등학교 과정에서 나오는 유한 구간에서의 최솟값과 지문에서 주어지는 최솟값을 연결하여 생각하면 쉽게 풀 수 있는 문제이다.

[문항 2]

[예시답안]

문제1.

두 복소수를 각각 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 라고 할 때 정의에 의해

$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ 이다.

$z_1 = 0 + i = i$, $z_2 = 0 + i = i$ 라고 하면,

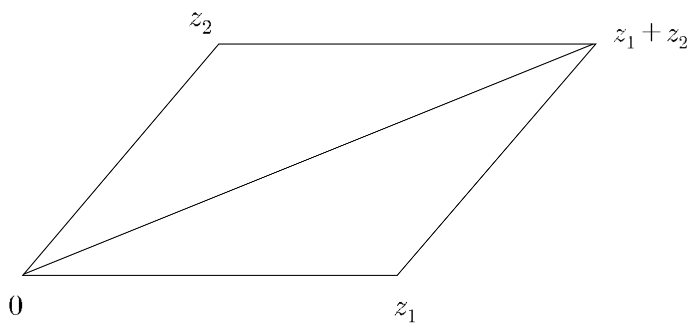
$z_1 z_2 = i^2$

$z_1 z_2 = (0-1) + i(0+0) = -1 + 0i = -1$

그러므로 $i^2 = -1$ 임을 알 수 있다.

문제2.

예시답안 A. 덧셈의 정의로부터 다음처럼 평행 사변형이 만들어진다. 따라서 등식 $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$ 이 성립하기 위해서는 z_1과 z_2는 일직선 상에 놓여야 할 것이다.



예시답안 B. 두 복소수를 각각 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 라고 할 때 양변을 각각 제곱하면

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 \quad \text{(식 1)}$$

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \quad \text{(식 2)}$$

이 된다.

(식 1)과 (식 2)가 같기 위해서는 $x_1x_2 + y_1y_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ 가 성립해야 된다. 양변을 각각 제곱하면

$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \quad \text{(식 3)}$$

$$(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2})^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \quad \text{(식 4)}$$

(식 3)과 (식 4) 양 변이 같기 위해서는

$$2x_1x_2y_1y_2 = x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

가 성립해야 한다는 사실을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} &2x_1x_2y_1y_2 = x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\ &\Leftrightarrow x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1y_2 = x_2y_1 \end{aligned}$$

$x_1y_2 = x_2y_1$ 이 성립하기 위해서는

1) 양변이 0인 경우와 2) 양변이 0이 아닌 경우, 두 가지로 나눌 수 있다.

1) 의 경우, z_1, z_2 둘 중 하나가 0 이거나, z_1, z_2 의 실수부나 허수부가 동시에 0일 경우이다.

2) 의 경우,

$$\begin{aligned} &x_1y_2 = x_2y_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

이므로, $az_1 = z_2$ 를 만족하는 0이 아닌 실수 a 가 존재하면 된다.

문제3.

수학적 귀납법을 사용하여 증명할 것이다. n이 0일 때, 당연히 성립한다. n이 1일 때,

$z=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$ 는 정의에 의해 성립한다.

n이 k 일 때, $z^k=\rho^k(\cos k\phi+i\sin k\phi)$를 참이라고 가정하면

$$
\begin{aligned}
z^{k+1} &= z^k \cdot z \\
&= \rho^k(\cos k\phi+i\sin k\phi)\cdot\rho(\cos\phi+i\sin\phi) \\
&= (\rho^k\cos k\phi+\rho^k i\sin k\phi)(\rho\cos\phi+\rho\, i\sin\phi) \\
&= \frac{1}{2}\rho^{k+1}[\{\cos(k+1)\phi+\cos(k-1)\phi\} \\
&\qquad +\{\cos(k+1)\phi-\cos(k-1)\phi\} \\
&\qquad\quad +i\{\sin(k+1)\phi+\sin(k-1)\phi\} \\
&\qquad\qquad +i\{\sin(k+1)\phi-\sin(k-1)\phi\}] \\
&= \frac{1}{2}\rho^{k+1}\{2\cos(k+1)\phi+2i\sin(k+1)\phi\} \\
&= \rho^{k+1}\{\cos(k+1)\phi+i\sin(k+1)\phi\}
\end{aligned}
$$

따라서 n이 $k+1$일 때 역시 성립한다.

n이 음의 정수인 경우, n이 -1이면

$$
\begin{aligned}
z^{\;1} &= \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{\rho(\cos\phi+i\sin\phi)} \\
&= \frac{1}{\rho}(\cos\phi-i\sin\phi) \\
&= \frac{1}{\rho}\{\cos(-\phi)+i\sin(-\phi)\}
\end{aligned}
$$

이므로 성립한다.

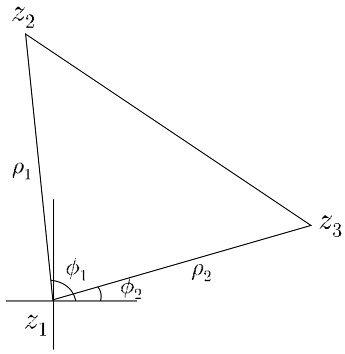
n이 $-k$ 일 때, $z^{-k}=\rho^{-k}\{\cos(-k\phi)+i\sin(-k\phi)\}=\rho^{-k}(\cos k\phi-i\sin k\phi)$를 참이라고 가정하면

$$
\begin{aligned}
z^{-k-1} &= z^{-k}\cdot z^{-1} \\
&= \rho^{-k}(\cos k\phi-i\sin k\phi)\cdot\rho^{-1}(\cos\phi-i\sin\phi) \\
&= (\rho^{-k}\cos k\phi-\rho^{-k}i\sin k\phi)(\rho^{-1}\cos\phi-\rho^{-1}i\sin\phi) \\
&= \frac{1}{2}\rho^{-k-1}[\{\cos(k+1)\phi+\cos(k-1)\phi\} \\
&\qquad +\{\cos(k+1)\phi-\cos(k-1)\phi\} \\
&\qquad\quad -i\{(\sin(k+1)\phi+\sin(k-1)\phi\} \\
&\qquad\qquad -i\{(\sin(k+1)\phi-\sin(k-1)\phi\}] \\
&= \frac{1}{2}\rho^{-k-1}\{2\cos(k+1)\phi-2i\sin(k+1)\phi\} \\
&= \rho^{-k-1}\{\cos(-k-1)\phi+i\sin(-k-1)\phi\}
\end{aligned}
$$

이므로 $n=-k-1$ 인 경우에도 성립함을 알 수 있다.

문제4.

주어진 복소수는 주어진 정의에 따라 다음과 같이 표현할 수 있다.



이때, $\dfrac{z_1-z_2}{z_1-z_3}=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$ 가 된다. 그리고 좌표축을 평행하게 이동시켜도 좌표에 의하여 생성되는 각에는 변화를 주지 않으므로 그림과 같이 x축과 y축을 이동한 좌표를 생각하면, $z_1=0$ 이고,

$$\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}=\rho'(\cos\phi+i\sin\phi)$$

$$\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_2-0}{z_3-0}=\frac{z_2}{z_3}$$

이다. 이동한 좌표축에서 z_2, z_3를 정의에 따라 살펴보면

$$z_2=\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1),\quad z_3=\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)\text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_3}&=\frac{\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)}{\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)}\\&=\frac{\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)(\cos\phi_2-i\sin\phi_2)}{\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)(\cos\phi_2-i\sin\phi_2)}\\&=\frac{\rho_1}{\rho_2}\{(\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2)+i(\sin\phi_1\cos\phi_2-\cos\phi_1\sin\phi_2)\}\\&=\frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\phi_1+\phi_2)+\cos(\phi_1-\phi_2)-\cos(\phi_1+\phi_2)-\cos(\phi_1-\phi_2)\\&\qquad+i\sin(\phi_1+\phi_2)+\sin(\phi_1-\phi_2)-\sin(\phi_1+\phi_2)-\sin(\phi_1-\phi_2)]\\&=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cos(\phi_1-\phi_2)+\mathrm{i}\sin(\phi_1-\phi_2)\end{aligned}$$

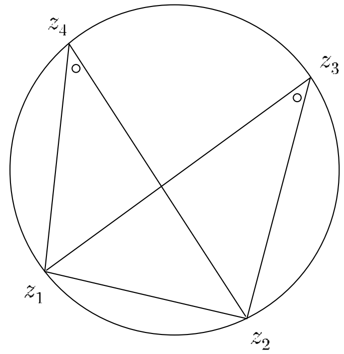
따라서 주어진 복소수의 각 ϕ 는 다음과 같고,

$$\phi=\phi_1-\phi_2$$

이것은 $\angle z_2z_1z_3$ 이다.

문제5.

두 복소수 $(z_3-z_1)/(z_3-z_2)$과 $(z_4-z_1)/(z_4-z_2)$의 각은 선분 $\overline{z_1z_2}$를 기준으로 각각 z_3와 z_4를 꼭짓점으로 갖는 각이다. 두 복소수 $(z_3-z_1)/(z_3-z_2)$과 $(z_4-z_1)/(z_4-z_2)$의 각이 같으므로 원의 성질에 의하여 선분 $\overline{z_1z_2}$를 현으로 갖는 사각형 $\square z_1z_2z_3z_4$의 외접원이 존재한다. 따라서 주어진 조건을 만족하는 네 복소수들은 한 원 위에 있다. 그 역도 한 원 위의 같은 현 $\overline{z_1z_2}$에 대한 두 원주각 $(z_3-z_1)/(z_3-z_2)$과 $(z_4-z_1)/(z_4-z_2)$의 각의 크기는 서로 같으므로 성립한다.



[해 설]

이 문제는 복소수를 통하여 대수적 연산 이해도와 동시에 평면 상의 각 점을 복소수로 이해하여 기하적인 해석능력을 측정하는 것을 주요 골자로 하고 있다. 소문항들은 점진적으로 심화되어 있으며, 기하적인 성질을 이용하면 다소 쉽게 문제를 해결 할 수 있게 되어 있다.

문제의 해결을 위해 필요한 교과 지식은 삼각함수의 성질들, 원과 관련된 평면기하 그리고 대수적 연산의 활용도 등이다.