2012학년도 수시 2차 일반전형

서강대학교
SOGANG UNIVERSITY

# 논 술 고 사 문제지

<화공생명공학계/컴퓨터공학계>

■ 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고 본문부터 시작할 것.
2. 답안 분량은 띄어쓰기 포함한 글자 수임.
3. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 또는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용하여야 함.
4. 답안이나 답안지의 여백에 자신을 드러낼 수 있는 답안 이외의 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현 또는 표시를 한 경우에는 0점 처리함.

<문제 1 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 금세기에 들어와 처리할 자료의 양이 많아짐에 따라 자료의 처리와 계산을 위하여 컴퓨터에 대한 의존도가 높아지고 있다. 컴퓨터는 연산과 메모리 사용에 있어서 본질적으로 이진법을 사용한다고 볼 수 있다. 이는 정수뿐만 아니라 유리수도 컴퓨터로 연산할 수 있는 대상이 됨을 의미한다. 더 나아가 무리수에 대해서도 연산의 대상으로 파악되기를 원한다. 무리수의 경우, 적당한 유리수의 극한으로서, 주어진 무리수에 대해 그 차이(오차)가 충분히 작은 유리수를 찾아 그 무리수의 근사적 대안으로 사용한다. 따라서 컴퓨터를 이용한 계산 가능한 수 또는 대상이 무엇인지 연구할 필요가 있다.

[나] 임의의 실수 $x$를 고정하자. 음이 아닌 정수 $n$에 대하여 $x \in I_{n+1} \subset I_n$이고, $n$이 커짐에 따라 $I_n$의 길이가 0으로 수렴하는 유리수 끝점인 폐구간들의 열 $\{I_0, I_1, I_2, \dots\}$이 존재할 때, 실수 $x$는 계산가능하다고 말하고 $\{I_0, I_1, I_2, \dots\}$을 $x$의 코드(code)라고 부른다. 평면 $\mathbb{R}^2$의 점 $(x, y)$에 대하여 $x$, $y$가 계산가능한 수이면, $x$의 코드 $\{I_0, I_1, I_2, \dots\}$와 $y$의 코드 $\{J_0, J_1, J_2, \dots\}$이 존재한다. 이때 사각형들의 열 $\{I_0 \times J_0, I_1 \times J_1, I_2 \times J_2, \dots\}$을 $(x, y)$의 코드라고 말하고, $(x, y)$는 계산가능하다고 한다.

[다] 계산가능성의 개념을 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 경우로 확장한다. 계산가능한 실수들의 부분집합에서 실수로의 함수 $f$를 생각하자. 그리고 $f$의 정의역에 속하는 임의의 원소를 $x$라 하자. 적당한 $x$의 코드 $\{I_0, I_1, I_2, \dots\}$에 대하여, $\{f(I_0), f(I_1), f(I_2), \dots\}$이 $f(x)$의 코드가 될 때, $f$는 계산가능하다고 정의한다. 이때, 정의역이 동일한 계산가능한 두 함수 $f$와 $g$에 대하여 두 함수의 합과 차는 계산가능한 함수가 된다. 예컨대, 계산가능하고 동일한 정의역을 갖는 두 함수 $f$와 $g$를 생각하자. 임의의 $x$의 적당한 코드 $\{I_0, I_1, I_2, \dots\}$에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$의 코드 $\{f(I_0), f(I_1), f(I_2), \dots\}$와 $\{g(I_0), g(I_1), g(I_2), \dots\}$를 각각 찾을 수 있다. $f(I_n)$과 $g(I_n)$의 끝점들 중, 값이 작은 점들의 합과 큰 점들의 합, 이 두 점으로 만들어지는 폐구간을 $f(I_n) + g(I_n)$이라고 정의한다. 예를 들면 $[1, 2] + [3, 4]$는 $[1+3, 2+4] = [4, 6]$이 된다. 그러면

$$\{f(I_0)+g(I_0), f(I_1)+g(I_1), f(I_2)+g(I_2), \ldots\}$$

은 $f(x)+g(x)$의 코드가 됨을 보일 수 있다. 따라서 $f+g$는 계산가능하다.

[라] 평면에서 정의된 함수 $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$를 생각한다. 계산가능한 $\mathbb{R}^2$의 부분집합에서 실수로의 함수 $F$를 생각하자. 그리고 $F$의 정의역에 속하는 임의의 원소를 $(x,y)$라 하자. 만약 $(x,y)$의 적당한 코드 $\{I_0 \times J_0, I_1 \times J_1, I_2 \times J_2, \ldots\}$에 대하여, $\{F(I_0 \times J_0), F(I_1 \times J_1), F(I_2 \times J_2), \ldots\}$이 $F(x,y)$의 코드가 될 때, $F$는 계산가능하다고 정의한다. 여기서 $I_n \times J_n$은 카르테시안 곱으로서 $\{(a,b) \mid a \in I_n, b \in J_n\}$을 나타낸다.

【1-1】임의의 실수 $x$는 계산가능한 수임을 증명하라.

【1-2】함수 $f(x) = \sqrt{x}$는 계산가능함을 증명하라.

【1-3】실수 곱하기 함수 $f(x,y) = xy$는 계산가능함을 증명하라.

【1-4】함수 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$를

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

로 정의할 때, $f$의 계산가능 여부를 보이라.

**<문제 2 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.**

[가] 미리 정해진 길이의 시간구간 동안 지정된 영역으로 들어가는 방사선 물질로부터 방출되는 알파입자의 수를 검출하는 실험으로부터 다음 결과를 얻는다.

(a) 양수 $h$가 매우 작을 때, 길이가 $h$인 임의의 시간구간에서 알파입자가 한 개 검출될 확률은 근사적으로 $\lambda h$이다.
(b) 양수 $h$가 매우 작을 때, 길이가 $h$인 임의의 시간구간에서 알파입자가 두 개 이상 검출될 확률은 근사적으로 $0$이다.
(c) 겹치지 않는 두 시간구간에 대하여 알파입자가 검출될 사건은 항상 독립적이다.

[나] 제시문 [가]의 내용을 수리적인 모형으로 나타내고자 한다. 먼저 기호 $o(h)$를 도입하자. $o(h)$는 $\lim_{h \to 0}[o(h)/h] = 0$을 만족하는 함수들을 총칭한다. 쉬운 예들로 $h^2 = o(h)$, $h^3 = o(h)$이지만, $h \neq o(h)$이

다. $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1\neq 0$이기 때문이다. 길이 $h$인 구간에서 알파입자가 $x$개 검출될 확률을 $g(x,h)$라고 하자. $g(x,h)$와 $o(h)$를 이용하여 제시문 [가]의 (a), (b), (c)를 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

(a') $g(1,h)=\lambda h+o(h)$. ($\lambda$는 고정된 상수값)

(b') $\sum_{x=2}^{\infty} g(x,h)=o(h)$.

(c') 임의의 양수 $h$와 $w$에 대하여 $g(0,w+h)=g(0,w)g(0,h)$, $g(1,w+h)=g(1,w)g(0,h)+g(0,w)g(1,h)$ 등으로 나타낼 수 있다.

[다] 제시문 [나]의 법칙들 (a'), (b'), (c')을 만족시키는 $g(x,h)$는

$$g(x,w)=\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!},\ x=0,1,2,\cdots$$

임을 얻을 수 있다. 지수함수 $e^m$는 무한급수 $1+m+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{m^x}{x!}$으로 표현된다는 것이 잘 알려져 있으며, 이로부터 $\sum_{x=0}^{\infty}g(x,w)=1$이 된다. 즉 주어진 $w$에 대한 위 실험치를 확률변수 $X$라 할 때, $g(x,w)$는 $X$에 관한 확률질량함수가 된다.

[라] 일반적으로 확률변수 $X$의 함수 $f(X)$에 대하여, $f(X)$의 기댓값을

$$E(f(X))=\sum_{x=0}^{\infty}f(x)g(x,w)$$

로 정의한다. 특별히 $f(X)=X$일 때, $E(X)$는 확률변수 $X$의 기댓값이라고 부르며, $f(X)=(X-E(X))^2$일 때 $E((X-E(X))^2)$을 확률변수 $X$의 분산이라고 정의한다.

【2-1】$o(h)+o(h)=o(h)$임과 $o(h)^2=o(h)$임을 보이라.

【2-2】제시문 [다]에서 유도된 확률질량함수 $g(x,w)$의 공식을 이용하지 않고, 제시문 [나]의 (a'), (b'), (c')로부터 $x=0$에서 미분계수 $\frac{d}{dw}g(0,w)$를 계산하라.

【2-3】실수 $t$에 대하여 함수 $f(X)=e^{tX}$에 대한 기댓값 $E(f(X))$를 유도하라.

【2-4】$E(e^{tX})$를 $t$에 관한 함수로 이해하여 확률변수 $X$의 평균과 분산을 구하라.