2012학년도 수시 2차 일반전형

서강대학교
SOGANG UNIVERSITY

논 술 고 사 문제지

<자연과학부/전자공학계/기계공학계>

■ 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고 본문부터 시작할 것.
2. 답안 분량은 띄어쓰기 포함한 글자 수임.
3. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 또는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용하여야 함.
4. 답안이나 답안지의 여백에 자신을 드러낼 수 있는 답안 이외의 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현 또는 표시를 한 경우에는 0점 처리함.

<문제 1 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 좌표평면 위의 임의의 점 $P(x,y)$를 그 좌표평면 위의 점 $P'(x',y')$으로 옮기는 함수를 변환이라고 하고 $f:(x,y)\to(x',y')$으로 나타낸다. 좌표평면의 원점을 O로 표시하자. 그러면 평면 위의 한 점 P는 원점 O에 대한 점 P의 위치벡터 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$와 일대일대응이다. 따라서 변환 f는 위치벡터 $\vec{p}$를 위치벡터 $\overrightarrow{p'}$으로 옮기는 함수로 볼 수 있고 이것을

$$f:\vec{p}\to\overrightarrow{p'} \qquad \text{또는} \qquad \overrightarrow{p'}=f(\vec{p})$$

로 나타낸다. 일반적으로 임의의 위치벡터 $\vec{p}, \vec{q}$에 대하여

$$\left|f(\vec{p})-f(\vec{q})\right|=\left|\vec{p}-\vec{q}\right|$$

를 만족시키는 변환 f를 합동변환이라고 한다. 여기서 $\left|\vec{p}-\vec{q}\right|$는 벡터 $\vec{p}-\vec{q}$의 크기, 즉 두 위치벡터 $\vec{p}, \vec{q}$의 종점의 거리를 의미한다. 따라서 합동변환이란 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 보존하는 변환을 말한다. 합동변환의 대표적인 예로는 평행이동, 회전이동 및 대칭이동을 들 수 있다. 또한 변환 $f:\vec{p}\to\overrightarrow{p'}$와 $g:\overrightarrow{p'}\to\overrightarrow{p''}$가 합동변환이면 f와 g의 합성변환 $g\circ f:\vec{p}\to\overrightarrow{p''}$도 합동변환이다. 한편, 변환 $f:(x,y)\to(x',y')$에서 대응하는 점의 좌표 사이에

$$x'=ax+by, \quad y'=cx+dy \qquad (a,b,c,d\text{는 상수})$$

와 같이 상수항이 없는 일차식의 관계가 성립할 때, 변환 f를 일차변환이라고 하고 행렬 $[f]=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 일차변환 f의 행렬이라고 한다. 두 일차변환 f와 g의 합성변환 $g\circ f$도 일차변환이고 세 일차변환의 행렬 사이에는 $[g\circ f]=[g][f]$의 관계가 있다.

[나] 원점 O를 중심으로 θ만큼 회전하는 회전이동을 R_θ라고 하고, 좌표평면 위의 세 점 $P(x,y)$, $Q(x,0)$, $R(0,y)$가 R_θ에 의하여 각각 P', Q', R'으로 옮겨진다고 하자. 두 점 Q', R'의 좌표는 $Q'(x\cos\theta, x\sin\theta)$, $R'(-y\sin\theta, y\cos\theta)$이다. 또한 사각형 $OQ'P'R'$이 직사각형이므로 P'의 좌표를 $P'(x',y')$이라 하면 $(x',y')=(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta)$이 성립한다. 따라서 회전이동 R_θ는 행렬이 $[R_\theta]=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$인 일차변환이다.

원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각이 $\theta/2$인 직선에 대한 대칭이동을 $M_{\theta/2}$라고 하자. 좌표평면 위의 점 $P(x,y)$가 $M_{\theta/2}$에 의하여 점 $P'(x',y')$으로 옮겨진다고 하면 점 $P'(x',y')$은 점 $P(x,y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 $P''(x,-y)$를 원점 O를 중심으로 θ만큼 회전이동한 점과 일치하므로 $(x',y')=(x\cos\theta+y\sin\theta, x\sin\theta-y\cos\theta)$가 된다. 따라서 대칭이동 $M_{\theta/2}$는 행렬이 $[M_{\theta/2}]=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$인 일차변환이다.

[다] 영벡터 $\vec{0}$은 원점 O의 위치벡터이다. $f(\vec{0})=\vec{0}$인 합동변환 f를 생각하자. 합동변환 f는 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 보존하므로 임의의 위치벡터 $\vec{p}$에 대하여

$$|f(\vec{p})|=|\vec{p}|$$

가 성립한다. 즉, 변환 f는 위치벡터의 크기를 보존한다. 그런데 두 위치벡터 $\vec{p}, \vec{q}$의 내적은 두 벡터의 크기와 거리를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{1}{2}\left[|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2-|\vec{p}-\vec{q}|^2\right]$$

따라서 임의의 위치벡터 $\vec{p}, \vec{q}$에 대하여

$$f(\vec{p})\cdot f(\vec{q})=\vec{p}\cdot\vec{q}$$

가 성립한다. 즉, 변환 f는 위치벡터의 내적도 보존한다. 그러므로 두 점 $E_1(1,0), E_2(0,1)$의 위치벡터 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$가 변환 f에 의하여 각각 $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}$으로 옮겨진다고 하면 두 벡터 $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}$은 서로 수직인 단위벡터이다.

【1-1】제시문 [가]와 [나]를 참고하여, 회전이동 R_α와 대칭이동 $M_{\beta/2}$에 대한 합성변환 $R_\alpha \circ M_{\beta/2}$와 $M_{\beta/2}\circ R_\alpha$가 어떤 합동변환이 되는지 밝히고, 이를 기하학적으로 설명하라.

【1-2】합동변환 f가 $f(\vec{0})=\vec{0}$을 만족시킨다고 하자. 제시문 [다]를 참고하여, 임의의 위치벡터 $\vec{p}$에 대한 다음의 등식이 성립하는 이유를 설명하라.

$$f(\vec{p})=(\vec{p}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1'}+(\vec{p}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2'}$$

또한, 이를 이용하여 변환 f가 일차변환임을 증명하라.

【1-3】제시문 [가]와 [나]로부터, 회전이동 R_θ와 대칭이동 $M_{\theta/2}$가 일차변환인 합동변환임을 알았다. 역으로, 일차변환인 합동변환은 반드시 회전이동 또는 대칭이동이라는 것을 제시문 [다]를 참고하여 증명하라.

<문제 2 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 이산확률변수 X가 가질 수 있는 값이 $x_1, x_2, ..., x_n$이고 각각의 i에 대하여 X가 값 x_i를 가질 확률이 p_i라고 할 때, X가 가질 수 있는 값 x_i와 X가 그 값 x_i를 가질 확률 p_i의 대응 관계를 X의 확률분포라고 한다. 이산확률변수 X의 확률분포는 확률질량함수

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \quad (i=1,\ 2,\ ,...,\ n) \qquad (☆)$$

또는 확률분포표

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

에 의해 주어진다. X의 확률분포가 이와 같을 때,

$$m=E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{P}(X=x_i)$$

를 X의 평균(또는 기댓값)이라고 하고

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\mathrm{P}(X=x_i)$$

를 X의 분산이라고 한다. **그러므로 이산확률변수 X의 평균과 분산을 구하기 위해서는 확률질량함수 또는 확률분포표로 주어지는 X의 확률분포를 알고 있어야 한다.** 이 사실에 기초하여, 이산확률변수 $Y=X-m$의 평균과 분산을 구할 수 있다. X의 확률분포표로부터 Y의 확률분포표는

Y	x_1-m	x_2-m	x_3-m	$\cdots$	x_n-m	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

이다. 따라서 Y의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)\mathrm{P}(Y=x_i-m)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)p_i=0$$

$$V(Y)=\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-m)-E(Y)\right]^2\mathrm{P}(Y=x_i-m)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=V(X)$$

[나] 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $p\,(0<p<1)$이고 따라서 일어나지 않을 확률이 $q=1-p$이다. 이 시행을 독립적으로 n번 반복할 때, 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 X는 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_nC_x\,p^x q^{n-x} \qquad (x=0,\ 1,\ ...,\ n)$$

으로 주어지는 이산확률변수이다. 이와 같은 X의 확률분포를 이항분포라고 하고 $B(n,p)$로 나타낸다. 제시문 [가]의 정의를 이용하여, X의 평균과 분산을 구하면 다음과 같다.

$$E(X)=np, \quad V(X)=npq$$

[다] 랜덤워크(random walk)는 액체 또는 기체 속에 있는 입자의 불규칙적인 운동이나 예측하기 어려운 주식의 가격변화를 설명하는 데 이용될 수 있는 수리적 모형이다. 가장 간단한 랜덤워크의 예로는 수직선 상의 한 점 P가 원점에서 출발하여 오른쪽 또는 왼쪽으로 한 칸씩 임의로 움직이는 것을 들 수 있다. 점 P가 오른쪽으로 움직일 확률을 $p\,(0<p<1)$, 왼쪽으로 움직일 확률을 $q=1-p$라고 하자. 또한, 점 P가 원점 0의 위치에서 출발하여 독립적으로 n번 임의이동한 후 도착한 위치를 W라고 하자. 그러면 변수 W는 가질 수 있는 값이 유한개이며 각 값에 대하여 확률이 정해져 있는 이산확률변수이다. 예를 들어, 점 P가 다섯 번 이동한다면 W는 $-5, -3, -1, 1, 3, 5$ 중의 하나의 값을 가질 수 있고 각각의 확률은 다음과 같다.

W	-5	-3	-1	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(W=w)$	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5	1

이 예로부터 W의 확률분포가 이항분포와 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다.

【2-1】확률질량함수가 제시문 [가]의 (☆)로 주어지는 이산확률변수 X에 대하여,

$$Y=aX+b \quad (a, b \text{는 상수이고 } a\neq 0)$$

로 정의된 이산확률변수 Y를 생각하자. Y의 확률질량함수를 구하고, 이를 이용하여 Y의 평균과 분산을 X의 평균과 분산으로 표현하라.

【2-2】이산확률변수 X에 대하여, X^2의 평균 $E(X^2)$을 아래 식을 이용하여 구할 수 있는지를 제시문 [가]의 밑줄 친 부분을 근거로 하여 논하라.

$$E(X^2)=V(X)+[E(X)]^2$$

【2-3】제시문 [다]에서 정의된 이산확률변수 W의 확률분포가 이항분포 $B(n,p)$와 어떤 관계가 있는지를 설명하고, 이를 이용하여 $E(W)$, $V(W)$ 그리고 $E(W^2)$을 구하라.