단국대학교 2019학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오후)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 극대와 극소의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 극한과 연속의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 3] 정적분의 개념을 이해하고 부정적분의 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 황선욱 외 (2017), 미적분 I, 53-83쪽
○ 류희찬 외 (2017), 미적분 II, 136-153쪽
○ 신항균 외 (2017), 미적분 II, 152-163쪽

[논제 1 평가기준]

- $f(x)-g(x)$가 $x=0$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 가짐을 제시 : 5점
- $8<k<2e^3-9$ 임을 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]

- $f(x)=0$인 x에서 $h(x)=0$임을 제시 : 5점
- $h(x)$를 구체적으로 제시 : 10점
- $h(x)$의 불연속인 점 $x=4$를 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]

- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k-1}x_k}(x_k-x_{k-1})=1-\frac{1}{a}$임을 제시 : 5점
- $p(a) = 1-\frac{1}{a}$임을 제시 : 5점
- $\int \frac{e^{p(x)}}{x^3}dx=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{1-\frac{1}{x}}+C$임을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1] 함수 $F(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $F'(x)=2(e^x-1)(x-3)$이므로 $x=0$ 또는 $x=3$일 때 $F'(x)=0$이다.

x	-10	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	10
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$-28e^{-10}-160+k$	$\nearrow$	$-8+k$	$\searrow$	$9-2e^3+k$	$\nearrow$	$12e^{10}-40+k$

$F(x)$는 $(-10,0)$에서 증가, $(0,3)$에서 감소, $(3,10)$에서 다시 증가하므로

$F(-10)<0$, $F(0)>0$, $F(3)<0$, $F(10)>0$이면 $F(x)=0$은 $(-10,10)$에서 세 근을 갖는다.

즉, $-28e^{-10}-160+k<0$, $-8+k>0$, $9-2e^3+k<0$, $12e^{10}-40+k>0$로부터

$$8<k<2e^3-9$$

를 얻는다.

[논제 2] $f(x)=0$인 x에 대하여 $h(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=0$이고, $f(x)\neq 0$인 x에 대하여

$$\begin{aligned}h(x)&=\lim_{n\to\infty}\left(|nf(x)-1|-n\left|f(x)+\frac{1}{n+1}\right|\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n\left(\left|f(x)-\frac{1}{n}\right|-\left|f(x)+\frac{1}{n+1}\right|\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\left|f(x)-\frac{1}{n}\right|^2-\left|f(x)+\frac{1}{n+1}\right|^2\right)}{\left|f(x)-\frac{1}{n}\right|+\left|f(x)+\frac{1}{n+1}\right|}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-2f(x)+\frac{1}{n}-2f(x)\frac{n}{n+1}-\frac{n}{(n+1)^2}\right)}{\left|f(x)-\frac{1}{n}\right|+\left|f(x)+\frac{1}{n+1}\right|}=-2\frac{f(x)}{|f(x)|}=\begin{cases}-2, & (f(x)>0)\\ 2, & (f(x)<0)\end{cases}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $h(x)=\begin{cases}-2, & (x>4)\\ 0, & (x=4)\\ 2, & (x<4)\end{cases}$ 이므로 함수 $h(x)$가 불연속인 x의 값은 $x=4$이다.

[논제 3]

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k^2-x_{k-1}^2}{x_{k-1}x_k^2}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k-1}x_k}+\frac{1}{x_k^2}\right)(x_k-x_{k-1})\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k-1}}-\frac{1}{x_k}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2}(x_k-x_{k-1})\\&=\left(1-\frac{1}{a}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2}(x_k-x_{k-1})\end{aligned}$$

로부터

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k^2-x_{k-1}^2}{2x_{k-1}x_k^2}\right)&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2}(x_k-x_{k-1})\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\int_1^a\frac{1}{x^2}dx=1-\frac{1}{a}\end{aligned}$$

이므로 $p(a)=1-\frac{1}{a}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int\frac{e^{p(x)}}{x^3}dx&=\int\frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x^2}\frac{1}{x}dx\\&=e^{1-\frac{1}{x}}\frac{1}{x}-\int e^{1-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\\&=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{1-\frac{1}{x}}+C\end{aligned}$$

(C는 적분상수)이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 내적의 의미를 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 직선의 방정식, 평면의 방정식과 정사영의 개념을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 류희찬 외 (2017), 기하와 벡터, 143-146쪽, 171-196쪽
○ 우정호 외 (2017), 기하와 벡터, 164-168쪽, 200-231쪽
○ 황선욱 외 (2017), 기하와 벡터, 117-120쪽, 147-174쪽

[논제 1 평가기준]
- 점 $\mathrm{P}(0,-6,6)$을 제시 : 5점
- $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$일 때 최솟값을 가짐을 제시 : 10점
- 답 20을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- 최대 입체도형 E가 비스듬히 잘린 원기둥임을 제시 : 5점
- 구하는 정사영의 넓이가 타원과 평행사변형의 정사영의 넓이를 구해야 함을 제시 : 5점
- 타원의 법선벡터 $\vec{n}=k(2,-3,3)$ (k는 상수)를 제시 : 5점
- 타원의 넓이와 평행사변형의 넓이를 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5 점

□ 예시 답안

[논제 1]
점 P는 평면 α의 법선벡터 $(1,-1,2)$를 방향벡터로 하고 점 $(-1,-5,4)$를 지나는 직선 위에 있고, 또한 평면 γ 의 법선벡터 $(1,1,-10)$을 방향벡터로 하고 점 $(1,-5,-4)$를 지나는 직선 위에도 있다. 따라서 두 직선의 방정식

$$x+1=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-4}{2},\qquad x-1=y+5=\frac{z+4}{-10}$$

을 연립하여 풀면 $\mathrm{P}(0,-6,6)$을 얻는다. 또한

$$\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} = (\overrightarrow{PO_1} + \overrightarrow{O_1Q_1}) \cdot (\overrightarrow{PO_1} + \overrightarrow{O_1Q_2})$$
$$= |\overrightarrow{PO_1}|^2 + (\overrightarrow{O_1Q_1} \cdot \overrightarrow{O_1Q_2})$$

이고 점 P에서 평면 β 사이의 거리가 $|\overrightarrow{PO_1}|$이므로

$$|\overrightarrow{PO_1}| = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

이다. 따라서 $\overrightarrow{O_1Q_1} \cdot \overrightarrow{O_1Q_2}$의 최솟값을 구하면 된다.

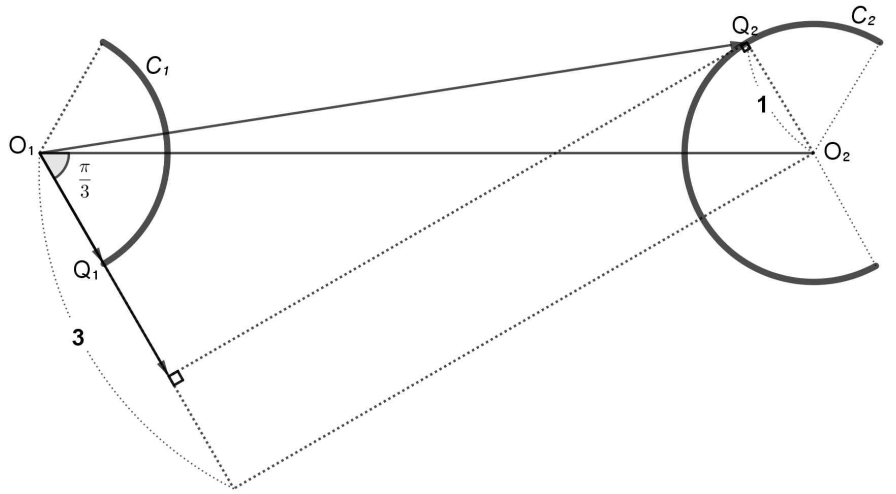
두 벡터 $\overrightarrow{O_1O_2}$, $\overrightarrow{O_1Q_1}$가 이루는 각의 크기를 θ_1이라할 때

$$3 \le \overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{O_1Q_1} = |\overrightarrow{O_1O_2}||\overrightarrow{O_1Q_1}|\cos\theta_1 = 6\cos\theta_1$$

이므로 $\cos\theta_1 \ge \frac{1}{2}$이다. 즉, $0 \le \theta_1 \le \frac{\pi}{3}$. 마찬가지로 두 벡터 $\overrightarrow{O_1O_2}$, $\overrightarrow{O_2Q_2}$ 가 이루는 각의 크기 θ_2의 범위는 $\frac{\pi}{3} \le \theta_2 \le \pi$이다. 따라서 $\overrightarrow{O_1Q_1}$와 $\overrightarrow{O_1Q_2}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때

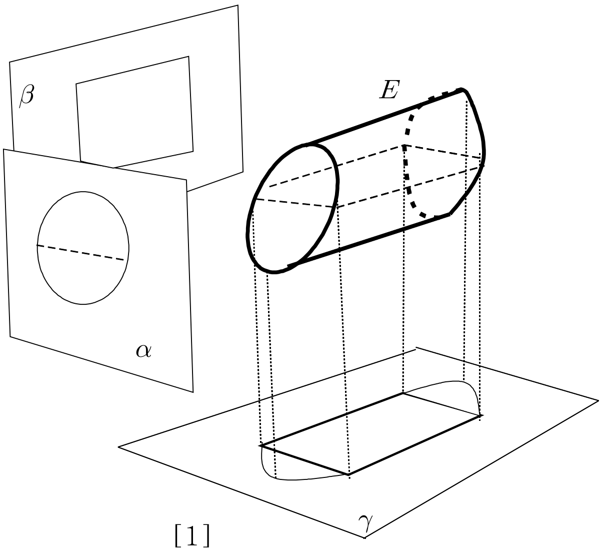
$$\overrightarrow{O_1Q_1} \cdot \overrightarrow{O_1Q_2} = |\overrightarrow{O_1Q_2}|\cos\theta$$
$$= (\text{점 } O_1\text{으로부터 점 } Q_2\text{에서 직선 } O_1Q_1\text{에 내린 수선의 발까지의 거리})$$

이다. 따라서 θ_1이 증가할 때 $\overrightarrow{O_1Q_1} \cdot \overrightarrow{O_1Q_2}$는 감소하므로, [그림 1]과 같이 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$일 때 최솟값 2를 갖는다. 그러므로 $\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2}$ 의 최솟값은 20이다.

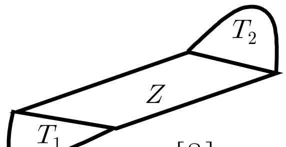


[그림 1]

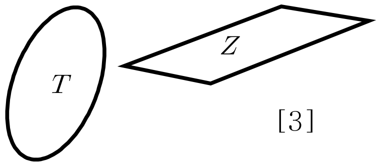
[논제 2] 평면 α 위로의 정사영의 지름의 길이와 β 위로의 정사영의 한 변의 길이가 서로 같기 때문에, γ위로의 정사영의 넓이가 최대가 되는 입체도형은 그림 [1]과 같이 비스듬히 잘린 원기둥이다. 입체도형 E를 이 원기둥이라 하자. 따라서 E의 평면 γ위로의 정사영은 그림 [2]와 같이 평행사변형 Z와 양 쪽에 붙은 T_1과 T_2의 γ위로의 정사영과 같다. 그림 [3]과 같이 T_1과 T_2를 같은 쪽으로 이동하여 붙이면 타원 T가 되므로, T 와 평행사변형 Z의 γ위로의 정사영의 넓이를 구하면 된다.



[1]



[2]

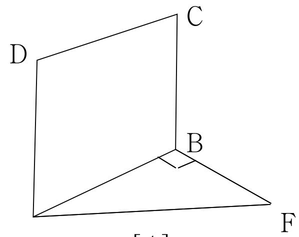


[3]

평면 β 위로의 정사영인 정사각형 ABCD의 각 변들은 T를 포함하는 평면에 평행하거나 수직이므로, 수직인 변 중 하나를 AB라 하자. 그림 [4]와 같이 평면 α에 수직이고 점 A를 지나는 직선과 평면 β에 수직이고 점 B를 지나는 직선이 만나는 점을 F라 하자. $\ell = |\overrightarrow{\mathrm{AF}}|$라 하면 제시문 (라)에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{\ell}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \text{ 이고 } \overrightarrow{\mathrm{FB}} = \frac{\ell}{2\sqrt{6}}(0,-1,-1) \text{ 또는}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = -\frac{\ell}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \text{ 이고 } \overrightarrow{\mathrm{FB}} = -\frac{\ell}{2\sqrt{6}}(0,-1,-1)$$



[4]

이다. 따라서

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{FB}} = \frac{\ell}{2\sqrt{6}}(2,-3,3) \text{ 또는 } \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\frac{\ell}{2\sqrt{6}}(2,-3,3)$$

이다. 그러므로 T 를 포함하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n} = (2,-3,3)$으로 두자.

타원 T를 포함하는 평면과 α가 이루는 각의 크기를 θ_1 이라 하면 (T의 넓이)$\times \cos\theta_1 = \pi$ 이고, 법선벡터 $\vec{n}$과 α의 법선벡터 $(1,-1,2)$가 이루는 각의 크기도 θ_1이므로 제시문 (다)에 의해

(T의 넓이) $= \dfrac{\pi}{\cos\theta_1} = \dfrac{2\sqrt{33}\,\pi}{11}$ 이다. 따라서 평면 γ 과 T를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면 $\cos\theta_2 = \dfrac{31}{2\sqrt{11}\sqrt{51}}$ 이므로

$$(T\text{의 } \gamma\text{위로의 정사영의 넓이}) = \frac{31}{11\sqrt{17}}\pi$$

이제 평행사변형 Z의 넓이를 구하자. Z의 높이는 2이므로 밑변의 길이 ℓ을 구하면 된다. Z의 밑변은 α의 법선벡터 $(1,-1,2)$와 평행하고 Z의 β로의 정사영은 법선벡터 $\vec{n}$과 평행하므로

$\ell = \dfrac{2}{\cos\theta_1} = \dfrac{4\sqrt{33}}{11}$ 이다. 따라서 (Z의 넓이)$= \dfrac{8\sqrt{33}}{11}$ 이다. 평면 γ 과 Z를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ_3라 하면 $(90^\circ - \theta_3)$는 α의 법선벡터 $(1,-1,2)$와 γ의 법선벡터 $(1,1,-10)$이 이루는 각의 크기이므로 $\cos(90^\circ - \theta_3) = \dfrac{20}{\sqrt{6}\sqrt{102}}$ 이다. 그러므로

$$(Z\text{의 } \gamma\text{위로의 정사영의 넓이}) = (Z\text{의 넓이}) \times \cos\theta_3 = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{159}{187}}$$

이다. 결국 (E의 γ위로의 정사영의 넓이) $= \dfrac{31}{11\sqrt{17}}\pi + \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{159}{187}}$ 이다.