단국대학교 2019학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제
(오후)

단국대학교

전형유형	논술우수자
수험번호	
성　　명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 만족시키면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다. (1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다. (2) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다. (3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 함수 $f(x)$가 위의 세 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 $x=a$에서 불연속이라 한다.
(나) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대, $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
(다) 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\,b]$에서 연속이고, 자연수 n에 대하여 구간 $[a,\,b]$를 n등분한 각 등분점 (양 끝점도 포함)의 x좌표를 차례로 $a=x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$라 하자. 이때, 극한값 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}$$ 를 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이를 기호로 $\int_a^b f(x)dx$와 같이 나타낸다. 한편 함수 $f(x)$에 대하여 $F'(x)=f(x)$가 되는 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 하고, 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.

함수 $f(x)=2(x-4)e^x$, $g(x)=x^2-6x-k$ (k는 상수)

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\left(|nf(x)-1|-n\left|f(x)+\frac{1}{n+1}\right|\right)$$

에 대하여 [논제 1]과 [논제 2]의 물음에 답하시오.

[논제 1] 닫힌 구간 $[-10,10]$에서 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 k값의 범위를 구하시오. (단, $2.7<e<2.8$) (15점)

[논제 2] 함수 $h(x)$가 불연속인 x의 값을 구하시오. (20점)

[논제 3] $1<a$인 실수 a와 자연수 n에 대하여 구간 $[1,\,a]$를 n등분한 각 등분점의 x좌표를 차례로

$$1=x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=a$$

라 하자. 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k^2-x_{k-1}^2}{2x_{k-1}x_k^2}\right)$$

을 $p(a)$라 할 때, 부정적분

$$\int \frac{e^{p(x)}}{x^3}dx$$

를 구하시오. (20점)

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

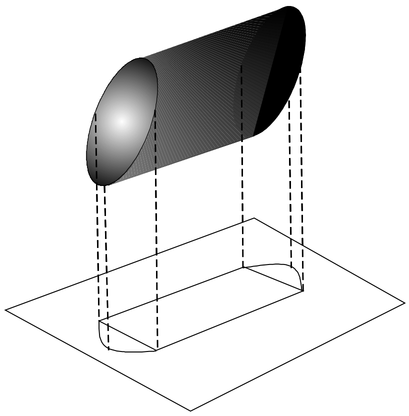
(가) 점 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$를 지나고, 벡터 $\vec{u} = (l, m, n)$에 평행한 직선의 방정식은

$$x = lt + x_0,\ \ y = mt + y_0,\ \ z = nt + z_0\ \ (t\text{는 실수})$$

점 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$를 지나고, 벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

(나) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P$'$이라고 할 때, 점 P$'$을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다. 일반적으로 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.
예를 들어 그림과 같은 원기둥을 비스듬히 자른 입체도형의 평면 α 위로의 정사영은 사각형에 입체도형의 밑면의 정사영을 양 옆에 붙인 모양이다.



(다) 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$가 이루는 각의 크기가 θ일 때

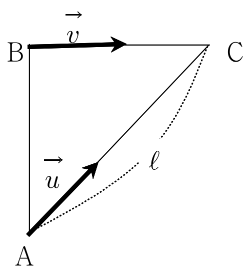
$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

(라) 그림과 같이 점 A를 지나고 벡터 $\vec{u} = (1, -1, 2)$에 평행한 직선과 점 B를 지나고 벡터 $\vec{v} = (0, 1, 1)$에 평행한 직선이 점 C에서 만난다. 삼각형 ABC가 $\angle \mathrm{ABC} = 90^\circ$인 직각삼각형이라고 하자.

$\ell = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{\ell}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$이고

(다)에 의해 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \dfrac{\ell}{2\sqrt{3}}$이다. 또한

$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \dfrac{\ell}{2\sqrt{6}}(0, -1, -1)$이다.



좌표공간에서 세 평면 α, β, γ 가

$$\alpha : x - y + 2z = 12,\quad \beta : y + z = 6,\quad \gamma : x + y - 10z = 36$$

이고, 점 P와 두 원 C_1, C_2는 아래 조건을 만족시킨다.

(1) 점 P의 평면 α 위로의 정사영은 점 $(-1, -5, 4)$이고, 점 P의 평면 γ 위로의 정사영은 점 $(1, -5, -4)$이다.
(2) 두 원 C_1과 C_2의 반지름의 길이는 모두 1이고 평면 β 위에 있다.
(3) 점 P의 평면 β 위로의 정사영은 원 C_1의 중심 O_1이고, 점 O_1으로부터 거리가 6인 β 위의 점 O_2는 원 C_2의 중심이다.

[논제 1] 원 C_1 위에 있는 점 Q_1과 C_2 위에 있는 점 Q_2가

$$\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_2Q_2}} \le 3 \le \overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_1Q_1}}$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{PQ_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ_2}}$의 최솟값을 구하시오. (20점)

[논제 2] 다음 조건을 만족시키는 입체도형 E의 γ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구하시오. (25점)

입체도형 E의 평면 α 위로의 정사영은 넓이가 π인 원이고 평면 β 위로의 정사영은 넓이가 4인 정사각형이다.