단국대학교 2019학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오전)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 구 위의 두 점 사이의 관계에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 구 위의 원에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 3] 구와 직선 사이의 관계에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김원경 외 (2017), 기하와 벡터, 191-205쪽
○ 정상권 외 (2017), 기하와 벡터, 172-182쪽
○ 이강섭 외 (2017), 미적분 II, 76-83쪽

[논제 1 평가기준]

- 구하려는 곡선이 반지름의 길이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$인 원임을 제시 : 10점
- 구하려는 곡선의 길이가 $3\sqrt{3}\pi$ 임을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- $r=\sqrt{6}$ 제시 : 5점
- $\angle \mathrm{GOQ}$가 일정한 값임을 제시 : 5점
- $a=\sqrt{6}$ 제시 : 10점

[논제 3 평가기준]

- $r=\frac{\sqrt{27-k^2}}{\sqrt{3}}$ 제시 : 4점
- $|\overrightarrow{\mathrm{BB}'}|=\frac{2\sqrt{6}\,r}{3}$, $|\overrightarrow{\mathrm{GB}'}|=\frac{2r}{3}$ 제시 : 6점
- $k=2\sqrt{6}$ 제시 : 10점

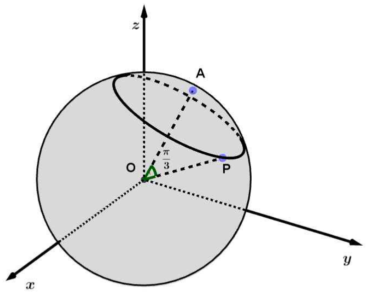
□ 예시 답안

[논제 1] 점 P는 구 S 위에 있고 $\angle \mathrm{AOP} = \frac{\pi}{3}$인 점이므로 점 P로 이루어지는 곡선은 중심이 선분 OA 위에 있고 반지름의 길이가 $3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 인 원이다.

따라서 구하려는 곡선의 길이는

$$2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \pi = 3\sqrt{3}\pi$$

이다.

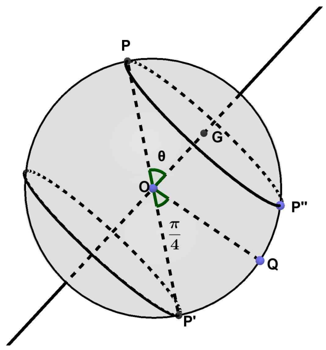


[논제 2] 평면 α의 방정식은 $x+y+z=3$이다. 점 O와 평면 α사이의 거리는 $\sqrt{3}$이므로 $r = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$이다. 또한 $\angle \mathrm{GOP} = \theta$라 하면

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다. $\angle \mathrm{POP}' = \pi$이므로 $\angle \mathrm{POQ} = 3\angle \mathrm{P}'\mathrm{OQ}$인 점 Q는 $\angle \mathrm{POQ} = \frac{3\pi}{4}$를 만족시킨다.

이로부터 $\angle \mathrm{GOQ}$는 일정한 값 $\frac{3\pi}{4} - \theta$이므로 점 Q로 이루어지는 곡선은 평면 α와 평행한 원이다.



$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) &= \sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\end{aligned}$$

으로부터 점 Q로 이루어지는 원의 반지름의 길이는 $3\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)}{2}$이고, 이 원의 길이는 $\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)\pi$이다. 따라서 $a = \sqrt{6}$이다.

[논제 3] 평면 α의 방정식은 $x+y+z=k$이다. 점 O와 평면 α사이의 거리는 $\frac{k}{\sqrt{3}}$이므로

$$r = \sqrt{9 - \frac{k^2}{3}} = \frac{\sqrt{27-k^2}}{\sqrt{3}} \quad \cdots \quad ①$$

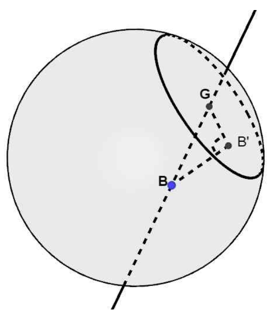
이다. $\overrightarrow{\mathrm{GB}} = (t, 2t, 3t)$ (t는 실수)라 하면 점 B의 조건 $\sqrt{14}\,|t| = \frac{2\sqrt{7}}{3}r$로부터

$$t = \frac{\sqrt{2}}{3}r \text{ 또는 } t = -\frac{\sqrt{2}}{3}r \ \cdots \ ②$$

를 얻는다. 이제 점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 B′이라 하면, $\overrightarrow{\mathrm{BB}'}$은 $\vec{v} = (1,1,1)$과 평행하고 $\overrightarrow{\mathrm{GB}'}$은 $\vec{v} = (1,1,1)$에 수직이다. 따라서 실수 s가 존재하여

$$\overrightarrow{\mathrm{BB}'} = (s, s, s)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GB}'} = \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{BB}'} = (t+s, 2t+s, 3t+s)$$
$$(t+s, 2t+s, 3t+s) \cdot (1,1,1) = 0$$

이 성립한다. 따라서 $s = -2t$이다. 그러므로



[그림 1]

$$t=\frac{\sqrt{2}\,r}{3},\ s=-\frac{2\sqrt{2}\,r}{3}\ \text{ 또는 }\ t=-\frac{\sqrt{2}\,r}{3},\ s=\frac{2\sqrt{2}\,r}{3}$$

이다. 따라서

$$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}=-\frac{2\sqrt{2}\,r}{3}(1,1,1),\ \overrightarrow{\mathrm{GB'}}=\frac{\sqrt{2}\,r}{3}(-1,0,1)$$

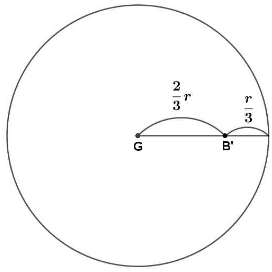
또는

$$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}=\frac{2\sqrt{2}\,r}{3}(1,1,1),\ \overrightarrow{\mathrm{GB'}}=-\frac{\sqrt{2}\,r}{3}(-1,0,1)$$

이다. 그러므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{BB'}}|=\frac{2\sqrt{6}\,r}{3},\ |\overrightarrow{\mathrm{GB'}}|=\frac{2r}{3}\qquad\cdots\ ③$$

이다.



[그림 2]

[그림 1]과 [그림 2]로부터 $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|$의 최솟값은 $\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BB'}}|^2+(r-|\overrightarrow{\mathrm{GB'}}|)^2}$ 임을 알 수 있고, ③, ①과 문제의 조건으로부터

$$\sqrt{\frac{8r^2}{3}+\left(r-\frac{2r}{3}\right)^2}=\frac{5r}{3}=\frac{5}{3}\times\frac{\sqrt{27-k^2}}{\sqrt{3}}=\frac{5}{3}$$

이므로 $k=2\sqrt{6}$ 이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 함수의 극대와 극소의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 접선의 개념과 정적분의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김원경 외(2014), 미적분 Ⅰ, 108-111쪽
○ 전상권 외(2014), 미적분 Ⅰ, 128-130쪽
○ 전상권 외(2014), 미적분 Ⅱ, 113-114쪽, 146-149쪽

[논제 1 평가기준]
- $f(x)=e^{ax}\tan bx$ 의 도함수 제시 : 5점
- 실근을 갖는 조건 $a>2b$(또는 $a^2>4b^2$)를 제시 : 10점
- 순서쌍 구하고 개수를 제시 : 5점 (답과 다른 순서쌍을 구하여도 개수를 맞출 수 있으니 확인 필요)

[논제 2 평가기준]
- $f'(t)=e^t+2e^{-2t}+k$ 를 제시 : 5점
- $f(t)=e^t-e^{-2t}+2t$ 를 제시 : 5점
- $F(t)-G(t)=\frac{1}{2}t^2f'(t)-tf(t)$ 을 제시 : 5점
- $\int_1^2(F(t)-G(t))dt=2e^{-2}-\frac{9}{2}e^{-4}-\frac{1}{2}e-\frac{7}{3}$ 을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1] 함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=ae^{ax}\tan bx+be^{ax}\sec^2 bx$$

이다. 한편 $\sec^2 bx=1+\tan^2 bx$ 이므로

$$f'(x)=e^{ax}(b\tan^2 bx+a\tan bx+b)$$

이다. 여기서 $e^{ax}>0$ 이므로 $f'(x)=0$ 이려면 $b\tan^2 bx+a\tan bx+b=0$ 이어야 한다.
또한, 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2b},\frac{\pi}{2b}\right)$ 에서 $\tan bx$ 는 일대일 대응이므로 $\tan bx=u$ 로 치환하여

$$bu^2+au+b=0 \qquad \cdots ①$$

을 얻는다. 판별식을 사용하면 $a^2>4b^2$ 인 경우에만 ①은 서로 다른 두 실근을 갖고 따라서 $f'(x)$도 서

로 다른 두 실근을 갖는다. 그리고 a,b가 자연수이므로 $a>2b$일 때만 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다. $a>2b$를 만족시키는 한 자리 자연수의 순서쌍 (a,b)는

$(3,1),(4,1)\cdots,(9,1)$ $--$ 7개
$(5,2),(6,2),\cdots,(9,2)$ $--$ 5개
$(7,3),(8,3),(9,3)$ $--$ 3개
$(9,4)$ $--$ 1개

이므로 구하려는 개수는 16이다.

[논제 2] 곡선 $y=f(x)$위의 한 점 $\mathrm{A}(t,f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$l\ :\ y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

이므로 접선 l의 y절편을 $h(t)$라 하면 $h(t)=f(t)-tf'(t)$이다. 조건 (1)로부터 $f(x)$는 증가함수이므로 $f(t)>h(t)$이다. 따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}t(f(t)-h(t))$이므로 조건 (2)로부터

$$\frac{1}{2}t(f(t)-h(t))=\frac{t^2}{2}(e^t+2e^{-2t}+k)$$

이다. 그러므로

$$f'(t)=e^t+2e^{-2t}+k$$

이고 이를 적분하면 $f(t)=e^t-e^{-2t}+kt+R$ (R는 적분상수)이다. 조건 (3)의 $\lim\limits_{t\to0+}\frac{f(t)}{\sin t}=5$로부터 $\lim\limits_{t\to0+}f(t)=0$이므로 $R=0$이다. 또한

$$\begin{aligned}5&=\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{\sin t}=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-e^{-2t}+kt}{\sin t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{e^t-1}{t}}{\frac{\sin t}{t}}+2\lim_{t\to0+}\frac{\frac{e^{-2t}-1}{-2t}}{\frac{\sin t}{t}}+k\lim_{t\to0+}\frac{t}{\sin t}\\&=3+k\end{aligned}$$

이므로 $k=2$이다. 양의 실수 t에 대하여 $\mathrm{B}(0,f(t)-tf'(t))$이고 $\mathrm{D}\left(t-\frac{f(t)}{f'(t)},0\right)$이다. 조건 (1)로부터 접선 l의 x절편과 y절편의 부호는 다르므로

$$F(t)=\frac{1}{2}(tf'(t)-f(t))\left(t-\frac{f(t)}{f'(t)}\right),\quad G(t)=\frac{1}{2}\frac{f(t)}{f'(t)}f(t)$$

이다. 따라서 $F(t)-G(t)=\frac{1}{2}t^2f'(t)-tf(t)$ 이고

$$\begin{aligned}\int_1^2(F(t)-G(t))dt&=\frac{1}{2}\int_1^2t^2f'(t)dt-\int_1^2tf(t)\,dt\\&=\frac{1}{2}(4f(2)-f(1))-2\int_1^2tf(t)dt\end{aligned}$$

이다. 한편

$$\begin{aligned}\int_1^2tf(t)dt&=\int_1^2te^tdt-\int_1^2te^{-2t}dt+2\int_1^2t^2dt\\&=[te^t-e^t]_1^2+\left[\frac{t}{2}e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_1^2+\frac{2}{3}[t^3]_1^2\\&=e^2+\frac{5}{4}e^{-4}-\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{14}{3}\end{aligned}$$

이므로

$$\int_1^2(F(t)-G(t))dt=2e^{-2}-\frac{9}{2}e^{-4}-\frac{1}{2}e-\frac{7}{3}$$