단국대학교 2019학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제
(오전)

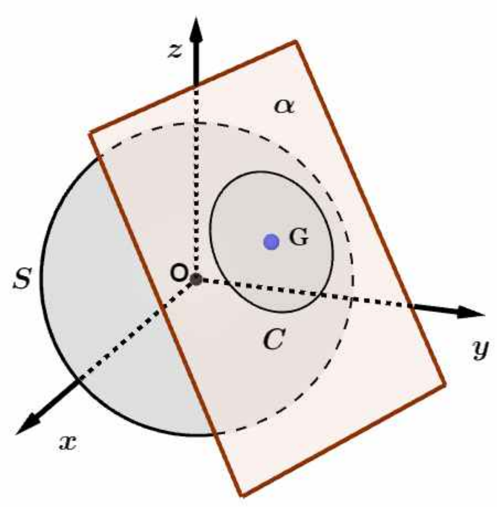
전형유형	논술우수자
수험번호	
성　　명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u} = (a, b, c)$에 평행한 직선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y, z)$라고 하면 매개변수 t로 나타낸 이 직선의 방정식은 $$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \text{ (단, } t\text{는 실수)}$$
(나) 점 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$과 평면 $ax + by + cz + d = 0$ 사이의 거리는 $$\frac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
(다) 삼각함수의 덧셈정리 $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$ $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

좌표공간에서 구 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$와 세 점 $(k, 0, 0)$, $(0, k, 0)$, $(0, 0, k)$ (단, $0 < k < 3\sqrt{3}$)을 지나는 평면 α가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C의 중심을 G라 하고 반지름의 길이를 r라 하자. (단, O는 원점)



[논제 1] 구 S 위에 한 점 A가 있다. 점 P가 $\angle \mathrm{AOP} = \dfrac{\pi}{3}$를 만족시키며 S 위를 움직일 때, 점 P로 이루어지는 곡선의 길이를 구하시오. (15점)

[논제 2] $k=3$이라 하자. 원 C 위의 점 P에 대하여 직선 PO가 구 S와 만나는 점을 $\mathrm{P}'(\mathrm{P} \neq \mathrm{P}')$이라 하고 직선 PG가 구 S와 만나는 점을 $\mathrm{P}''(\mathrm{P} \neq \mathrm{P}'')$이라 할 때, 구 S 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (1) 점 Q는 중심이 O이고 점 P''을 포함하는 호 $\overparen{\mathrm{PP}'}$ 위에 있다.
> (2) $\angle \mathrm{POQ} = 3\angle \mathrm{P}'\mathrm{OQ}$

점 P가 원 C 위를 움직일 때 점 Q로 이루어지는 곡선의 길이는 $a(\sqrt{2}+1)\pi$이다. a의 값을 구하시오. (20점)

[논제 3] 점 G를 지나고 벡터 $\vec{u} = (1, 2, 3)$에 평행한 직선 위의 점 B가 $|\overrightarrow{\mathrm{GB}}| = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}r$를 만족시킨다. 원 C 위를 움직이는 점 R에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|$의 최솟값이 $\dfrac{5}{3}$일 때, k의 값을 구하시오. (20점)

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대, $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
(나) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$
(다) [정적분의 부분적분법] 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$와 $g'(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)dx$

[논제 1] 한 자리 자연수 a, b에 대하여 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2b}, \frac{\pi}{2b}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{ax}\tan bx$$

가 극값을 갖도록 하는 순서쌍 (a,b)의 개수를 구하시오. (20점)

[논제 2] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(1) 모든 양의 실수 t에 대하여 $f'(t)>0$

(2) 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,f(t))$에서의 접선 l이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A에서 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선에 내린 수선의 발을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{t^2}{2}(e^t+2e^{-2t}+k) \quad (k\text{는 상수})$$

(3) $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{\sin x}=5$

양의 실수 t에 대하여 접선 l이 x축과 만나는 점을 D라 하고 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 E라 하자. 삼각형 OBD의 넓이를 $F(t)$라 하고 삼각형 ADE의 넓이를 $G(t)$라 할 때, $\int_1^2 (F(t)-G(t))dt$의 값을 구하시오. (단, O는 원점) (25점)