단국대학교 2019학년도 모의논술고사

자연계열

문제 및 가이드답안

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 일정한 규칙에 의하여 차례로 나열된 수의 배열을 수열이라 하며, 나열된 각각의 수를 그 수열의 항이라고 한다. 예를 들어 첫째항에서 시작하여 차례로 일정한 수를 더하여 얻은 수열을 등차수열이라 한다.
(나) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 (i) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$, (ii) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$ 이다.
(다) [치환적분법] 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$

[논제 1] 두 함수 f와 g는 $f(1)=2$, $g(2)=2$이고 모든 자연수 m, n에 대하여

$$f(m+n)=f(m)f(n) \text{와 } g(mn) = g(m)+g(n)$$

을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{30}(g \circ f)(a+k)=1470$$

일 때, 자연수 a의 값을 구하시오(단, $g \circ f$는 함수 f와 g의 합성함수이다). [15점]

함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{a+\sin x}\ (a>1)$에 대하여 [논제 2]와 [논제 3]의 물음에 답하시오.

[논제 2] 함수 f가 극댓값과 극솟값을 갖도록 하는 a값의 범위를 구하시오. 이 경우 f가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\sin\alpha$, $\sin\beta$를 a에 관한 식으로 나타내시오 (단, $0<\alpha,\beta<2\pi$이다). [20점]

[논제 3] 양수 t에 대하여 점 $\mathrm{A}(t, f(t))$와 점 $\mathrm{B}(2t, 0)$을 양 끝점으로 하는 선분 위에 점 C가 있다. 원점 O와 점 C를 잇는 선분 OC가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분할 때, 점 C가 나타내는 곡선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수 $G(x)=\int_0^x g(t)dt$에 대하여

$$a\,G(1)+\int_0^{G(1)}\sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx$$

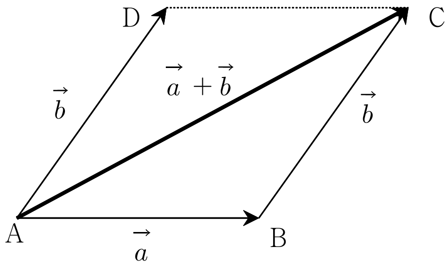
의 값을 구하시오(단, $g(0)=\dfrac{1}{2a}$이고 $G^{-1}(x)$는 $G(x)$의 역함수이다). [20점]

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 벡터의 덧셈

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고,
기호 $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$로 나타낸다.



(나) 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

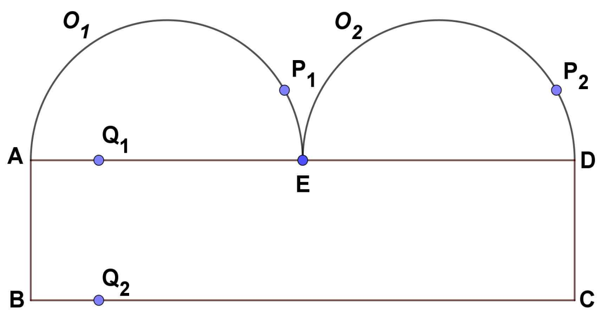
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (교환법칙)

$\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (분배법칙)

$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (결합법칙)

이 성립한다.

아래 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{AD}} = 8$인 직사각형 ABCD의 변 AD의 중점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 반원 O_1과 선분 ED를 지름으로 하는 반원 O_2가 있다.
반원 O_1 위의 점 P_1에 대하여, P_1을 지나고 직선 BC와 평행인 직선이 반원 O_2와 만나는 점 중 P_1로부터의 거리가 4인 점을 P_2라 하자.
선분 AD 위의 점 Q_1에 대하여, Q_1을 지나고 직선 AD와 수직인 직선이 선분 BC와 만나는 점을 Q_2라 하자.



다음 [논제 1]과 [논제 2]의 물음에 답하시오.

[논제 1] $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{AD} = 30^\circ$이고 $\overline{\mathrm{AQ}_1} = 1$일 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1} + \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}\right|^2$의 값을 구하시오. [20점]

[논제 2] 내적 $\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}$의 최솟값과 최댓값을 구하시오. [25점]

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 함수와 수열의 개념을 이해하고 수열의 합 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 함수의 극값을 판정할 수 있으며, 삼각함수의 그래프를 이해하고 있는지를 평가

[논제 3] 함수의 성질과 치환적분법을 사용하여 적분을 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이준열 외 (2014), 수학 II, 66-85, 112-151쪽
○ 신항균 외 (2014), 수학 II, 188-207쪽
○ 황선욱 외 (2014), 미적분 II, 44-123쪽
○ 우정호 외 (2014), 미적분 II, 148-217쪽

[논제 1 평가기준]

- 첫째항 $(g \circ f)(1) = 2$를 제시 : 5점
- 공차 2를 제시 : 5점
- $a = 9$를 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- a의 조건을 제시 : 6점
- $\alpha < \beta$임을 제시 : 7점
- $\sin\alpha, \sin\beta$값을 제시 : 7점

[논제 3 평가기준]

- 함수 $y = g(x)$를 제시 : 5점
- 치환을 사용하여 $aG(1) + \int_0^{G(1)} \sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx = \frac{3}{4}\int_0^{2/3} e^t\, dt$을 제시 : 10점
- 답 $\frac{3}{4}(e^{\frac{2}{3}} - 1)$을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}(g\circ f)(n+1) &= g(f(n)f(1)) \\ &= (g\circ f)(n)+(g\circ f)(1) \\ &= (g\circ f)(n)+2\end{aligned}$$

이므로 $\{(g\circ f)(n)\}$은 첫째항이 $(g\circ f)(1)=2$이고 공차가 2인 등차수열이다. 따라서

$$1470 = \sum_{k=1}^{30}(g\circ f)(a+k) = \sum_{k=1}^{30}(2a+2k) = 60a + 2\sum_{k=1}^{30}k = 60a+930$$

이므로 $a=9$이다. 답 : $\underline{a=9}$

[논제 2] 함수 f의 도함수는

$$f'(x) = \frac{e^x(a+\sin x)-e^x\cos x}{(a+\sin x)^2} = \frac{e^x\{a-(\cos x-\sin x)\}}{(a+\sin x)^2} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

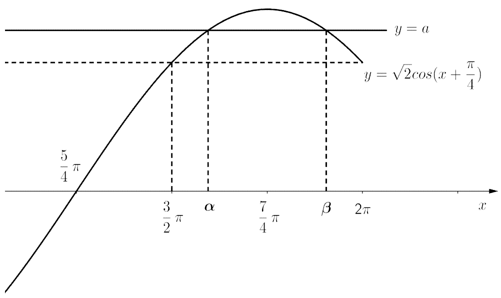
이므로 $f'(x)=0$에서

$$a-(\cos x-\sin x)=0 \quad \cdots\cdots \quad (**)$$

을 얻는다. 한편 $\cos x-\sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$이고 (*)과 $a-(\cos x-\sin x)$의 부호는 같다. 따라서 제시문 (나)에 의하여

$$a-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

의 부호를 조사하면 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 a의 조건은 $1<a<\sqrt{2}$이고 α와 β의 관계는 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\beta<2\pi$임을 알 수 있다(그림 참조).



한편 (**)식의 양변을 제곱하여 정리하면

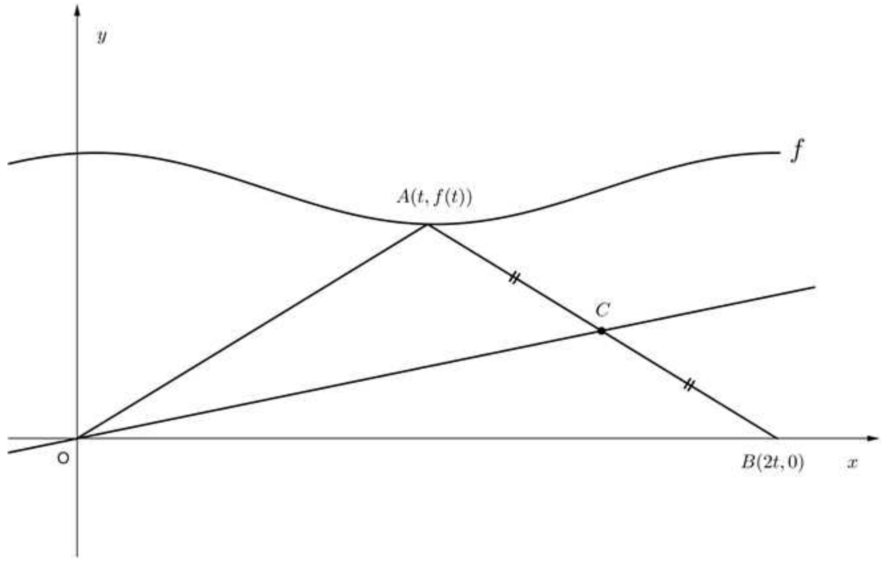
$$2\sin^2 x+2a\sin x+(a^2-1)=0$$

이므로 $\sin x = \frac{-a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$이고, 구간 $\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$에서 $\sin x$는 증가함수이므로

$$\sin\alpha = \frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}, \quad \sin\beta = \frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2}$$

이어야 한다. 답 : $\underline{1<a<\sqrt{2},\ \sin\alpha = \frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2},\ \sin\beta = \frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2}}$

[논제 3] 원점 O를 지나는 직선이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 이 직선은 선분 AB의 중점을 지나야 한다.



따라서 C는 선분 AB의 중점이다. 점 C의 좌표를 (x,y)라 하면 $x=\dfrac{3t}{2},\ y=\dfrac{f(t)}{2}$이므로

구하는 곡선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{2}{3}x\right)$이다, 따라서

$$g(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{2}{3}x\right)$$

이다. 이제, 문제에 주어진 적분을 구하기 위해서 $\dfrac{2}{3}G^{-1}(x)=t$라 치환하면

$G'(x)=g(x)=\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{2}{3}x\right)$이므로 $x=G\left(\dfrac{3}{2}t\right)$ 이고 $dx=\dfrac{3}{2}G'\left(\dfrac{3}{2}t\right)dt=\dfrac{3}{4}f(t)\,dt$

이다. 따라서

$$\int_0^{G(1)}\sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx=\frac{3}{4}\int_0^{2/3}(\sin t)\ f(t)\,dt\ =\frac{3}{4}\int_0^{2/3}\sin t\ \frac{e^t}{a+\sin t}dt$$

이므로

$$aG(1)+\int_0^{G(1)}\sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx=aG(1)+\frac{3}{4}\int_0^{2/3}\left[(a+\sin t)\frac{e^t}{a+\sin t}-a\frac{e^t}{a+\sin t}\right]dt$$

이다. 그런데

$$\frac{3}{4}\int_0^{2/3}\left[\frac{e^t}{a+\sin t}\right]dt=\frac{3}{4}\int_0^{2/3}f(t)\,dt=\int_0^1\frac{1}{2}f\left(\frac{2}{3}u\right)du=G(1)$$

이므로

$$aG(1)+\int_0^{G(1)}\sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx=aG(1)+\frac{3}{4}\int_0^{2/3}e^t\,dt-aG(1)$$

$$=\frac{3}{4}\left(e^{\frac{2}{3}}-1\right)$$

이다. 답 : $\underline{\dfrac{3}{4}\left(e^{\frac{2}{3}}-1\right)}$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 평면벡터의 성질을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 내적의 의미와 성질을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김창동 외 (2014), 기하와 벡터, 54-89쪽
○ 류희찬 외 (2014), 기하와 벡터, 58-92쪽
○ 김원경 외 (2014), 기하와 벡터, 53-93쪽

[논제 1 평가기준]

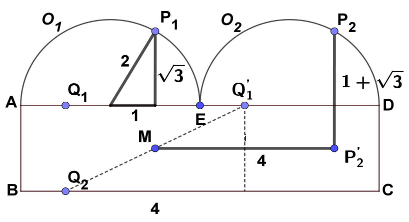
- $\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}+\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|^2$를 분석하여 계산이 가능하도록 변형함 (예:$4\left\{\left(\overline{\mathrm{MP_2}'}\right)^2+\left(\overline{\mathrm{P_2P_2}'}\right)^2\right\}$) : 10점
- 답 $80+8\sqrt{3}$을 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]

- $\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}$를 분석하여 계산이 가능하도록 변형함 (예: $\left|\overrightarrow{\mathrm{MP_2}}\right|^2-5$) : 10점
- $\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}$의 최솟값 -4를 제시 : 5점
- $\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}$의 최댓값 $16+4\sqrt{17}$를 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1] 점 $\mathrm{Q_1}$을 선분 AD방향으로 4만큼 이동시킨 점을 $\mathrm{Q_1}'$이라 하고, 선분 $\mathrm{Q_1}'\mathrm{Q_2}$의 중점을 M이라 하자. 점 M을 지나고 직선 AD와 평행인 직선에 내린 점 $\mathrm{P_2}$의 수선의 발을 $\mathrm{P_2}'$이라 하면



$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}+\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_1}'}+\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|^2\\ &= \left|2\overrightarrow{\mathrm{P_2M}}\right|^2\\ &= 4\left\{\left(\overline{\mathrm{MP_2}'}\right)^2+\left(\overline{\mathrm{P_2P_2}'}\right)^2\right\}\\ &= 80+8\sqrt{3}\end{aligned}$$

이다(그림 참조). 답 : $\underline{80+8\sqrt{3}}$

-

(별해) 점 B를 원점으로 하는 좌표평면을 생각하면

$$P_1(3,2+\sqrt{3}),\ P_2(7,2+\sqrt{3}),\ Q_1(1,2),\ Q_2(1,0)$$

이므로

$$\overrightarrow{P_1Q_1}=(-2,-\sqrt{3}),\ \overrightarrow{P_2Q_2}=(-6,-2-\sqrt{3})$$

이다. 따라서 $\overrightarrow{P_1Q_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}=(-8,-2-2\sqrt{3})$ 이고

$$\left|\overrightarrow{P_1Q_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2=64+4(4+2\sqrt{3})=80+8\sqrt{3}$$

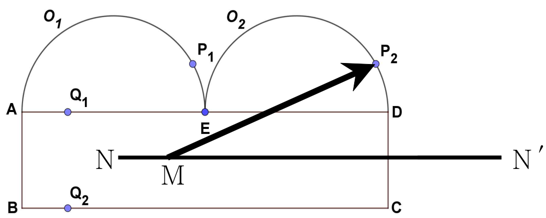
이다.

[논제 2] 점 Q_1을 선분 AD방향으로 4만큼 이동시킨 점을 Q_1'이라 하고, 선분 $Q_1'Q_2$의 중점을 M이라 하자. 점 M을 지나고 직선 AD와 평행인 직선에 내린 점 P_2의 수선의 발을 P_2'이라 하면

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{P_1Q_1}\cdot\overrightarrow{P_2Q_2}\\&=\overrightarrow{P_2Q_1'}\cdot\overrightarrow{P_2Q_2}\\&=\left(\overrightarrow{MQ_1'}-\overrightarrow{MP_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MQ_2}-\overrightarrow{MP_2}\right)\\&=\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2-\left|\overrightarrow{MQ_2}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2-5\end{aligned}$$

이다.

점 Q_1이 선분 AD 위를 움직일 때, 점 M은 선분 BE의 중점 N과 점 N을 $\overrightarrow{AD}$ 방향으로 8만큼 이동한 점 N′을 끝점으로 하는 선분 위를 움직인다(그림 참조). 따라서



(1) $\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2$의 최솟값: M이 선분 CD의 중점($Q_1$이 선분 ED의 중점)이고 P_2가 점 D이거나, M이 EF의 중점(Q_1이 선분 AE의 중점)이고 P_2가 점 E인 경우이며, 이 때 $\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2=1$ 이다(단, F는 E에서 선분 BC로 내린 수선의 발이다).

(2) $\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2$의 최댓값: M이 점 N($Q_1$이 점 A)이고 선분 P_2N 위에 반원 O_2의 중심이 있는 경우이거나 M이 점 N′(Q_1이 점 D)이고 선분 P_2N' 위에 반원 O_2의 중심이 있는 경우이며, 이 때 $\left|\overrightarrow{MP_2}\right|^2=(2+\sqrt{17})^2=21+4\sqrt{17}$이다.

답 : 최솟값은 -4, 최댓값은 $16+4\sqrt{17}$