단국대학교 2019학년도 수시 논술전형 모의고사(자연)

[문제1-1]

ID 성명

$f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$ 에 의해 $f(1)=2, f(2)=4, f(3)=8, f(4)=16 \cdots f(n)=2^n$ 인 것을 알 수 있다

$g(mn)=g(m)+g(n)$ 에 의해 $g(1)=0, g(2)=2, g(3)=0, g(4)=4, g(8)=6 \cdots g(2^n)=2n$ 인 것을 알 수 있다. 따라서, $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2^x)=2x$ 이다. …㉠

$$\sum_{k=1}^{30}(g\circ f)(a+k)=\sum_{k=1}^{30}g(f(a+k))=\sum_{k=1}^{30}2(a+k) \quad (\because ㉠)$$

$$\sum_{k=1}^{30}2(a+k)=60a+2\cdot\frac{30\cdot 31}{2}=60a+930$$

$60a+930=1470$. $60a=540$

$\therefore a=9$.

[문제1-2]

$f'(x)=\dfrac{e^x(a+\sin x-\cos x)}{(a+\sin x)^2}$ 이고 $\sin x-\cos x$의 범위는 $-\sqrt{2}\le \sin x-\cos x\le\sqrt{2}$ ($\because (\sin x,\cos x)\cdot(1,-1)$ 값의 최댓값 $\sqrt{2}$, 최솟값 : $-\sqrt{2}$) 이다. a가 $\sqrt{2}$일 때는 접하므로 제시문 (나) 에서의 극값을 가질조건에 만족하지 못한다. 따라서, 함수 f가 극댓값과 극솟값을 갖도록하는 a의 범위는 $1<a<\sqrt{2}$ 이다.

$x=\alpha$에서 극댓값을 가지므로 $f'(\alpha)=0$ 이다.

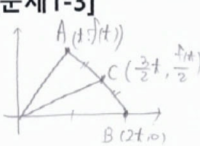
$a+\sin\alpha-\cos\alpha=0$. $a+\sin\alpha=\cos\alpha$, $\sin^2\alpha+2a\sin\alpha+a^2=1-\sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha+a\sin\alpha+\dfrac{a^2-1}{2}=0$

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{-a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$, $\sin\beta=\dfrac{-a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$ (위 과정을 반복해주면 된다)

$f(\alpha)>f(\beta)$ 이므로 $\dfrac{e^\alpha}{a+\sin\alpha}>\dfrac{e^\beta}{a+\sin\beta}$ 이다. $e^\alpha<e^\beta$ ($\because \alpha<\beta$, e^x 증가함수) 이므로 $a+\sin\alpha<a+\sin\beta$ 이다. $\therefore \sin\alpha<\sin\beta$ 이다.

그러므로 $\sin\alpha=\dfrac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}$, $\sin\beta=\dfrac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2}$ 이다.

[문제1-3]



그림과 같이 점 C 의 좌표는 $(\frac{3}{2}t, \frac{f(t)}{2})$ 이다. $\frac{3}{2}t=x$, $\frac{f(t)}{2}=y$ 의 식을 풀어주면 $y=\frac{1}{2}f(\frac{2}{3}x)$ 이다 $\frac{1}{2}f(\frac{2}{3}x)=g(x)$ 이다.

$G(x)=\int_0^x g(t)dt$, $G(0)=0$, $G'(x)=g(x)$ 이다.

$$aG(1)+\int_0^{G(1)}\sin\left(\tfrac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx=a\cdot\int_0^1 g(t)dt+\int_0^{G(1)}\sin\left(\tfrac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx$$

$\int_0^{G(1)}\sin(\frac{2}{3}G^{-1}(x))dx$ 에서 제시문 (다)에 의해 $\frac{2}{3}G^{-1}(x)=\frac{2}{3}y$로 치환하면 $x=G(y)$ 이므로 $dx=G'(y)dy=g(y)dy$ 이고 $G(1)=G(y)$ 에서 $y=1$. $0=G(y)$ 에서 $y=0$ 이다. 그러므로. $a\int_0^1 g(y)dy+\int_0^1\sin(\frac{2}{3}y)\cdot g(y)dy$ 이다

식을 정리하면 $\int_0^1(\sin(\frac{2}{3}y)+a)\cdot\frac{1}{2}f(\frac{2}{3}y)dy=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 e^{\frac{2}{3}y}dy=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}y}\right]_0^1=\frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}$ 이다.

문제	등급	첨삭
문제1	A	이 답안은 1번 문항을 만점 받은 답안임. 1-1: 평가기준에서 요구한 중간 단계를 적지는 않았지만 식의 전개 과정에서 이를 보여주고 있음. 1-2: a 값의 범위를 잘 이해하고 있으며 alpha와 beta사의의 관계도 문항에서 요구하는 수준의 내용을 잘 서술하고 있음. 1-3: 답안의 전개 과정에서 평가기준에서 제시한 요소를 명확히 서술하고 있음.

단국대학교

2019학년도 수시 논술전형 모의고사(자연)

ID :

성명 :

[문제1-1]

$(g\circ f)(a+k)=g(f(a+k))=g(f(a)f(k))=g(f(a))+g(f(k))$

m이 자연수 $\Rightarrow f(m+1)=f(m)f(1)=2f(m)$, $f(m)=2f(m-1)=2^2f(m-2)=\cdots=2^{m-1}f(1)=2^m$

n이 자연수 $\Rightarrow g(2n)=g(n)+g(2)=g(n)+2$

$g(f(m))=g(2^m)=g(2^{m-1})+2=g(2^{m-2})+2\times2=\cdots=g(2)+(m-1)\times2=2m$,

a와 k가 자연수 $\Rightarrow g(f(a))=2a$, $g(f(k))=2k$

$\sum_{k=1}^{30}(g\circ f)(a+k)=\sum_{k=1}^{30}(2a+2k)=30\times2a+2\times\sum_{k=1}^{30}k=60a+2\times\frac{30\times31}{2}=1470$,

$60a+930=1470$, $60a=540$, $a=9$

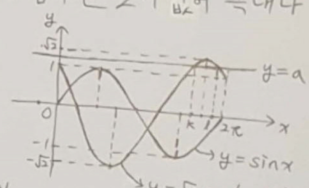
[문제1-2] $f'(x)=\frac{e^x}{a+\sin x}-\frac{e^x\cos x}{(a+\sin x)^2}=\frac{e^x(a+\sin x-\cos x)}{(a+\sin x)^2}$

$=\frac{e^x\{a-\sqrt{2}(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4})\}}{(a+\sin x)^2}=\frac{e^x\{a-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})\}}{(a+\sin x)^2}$

$a\ge\sqrt{2}$이면 $a-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})\ge0$, $f'(x)\ge0$이므로 $f'(x)$가 음수인 곳이 없어 극대나 극소가 존재할 수 없으므로 $1<a<\sqrt{2}$이어야 한다.

그림에 의해 $0<x<k$ or $l<x<2\pi$이면 $a>\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$, $f'(x)$가 양수

$k<x<l$이면 $a<\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$, $f'(x)$가 음수



$(0\le x\le2\pi)$

따라서, $x=k$일 때 극대, $x=l$일 때 극소이며,

$0<k<l<2\pi$이고, $k=\alpha$, $l=\beta$가 되며, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$임.

$f'(x)=0\Rightarrow a+\sin x-\cos x=0\Rightarrow(\cos x)^2=(a+\sin x)^2\Rightarrow1-\sin^2x=\sin^2x+2a\sin x+a^2$,

$2\sin^2x+2a\sin x+a^2-1=0$, $\sin x=\frac{-a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$, 그림에 의해 $\sin k<\sin l<0$임을 확인할 수 있고, 따라서 $\sin\alpha=\frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}$, $\sin\beta=\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2}$임.

[문제1-3] 선분 OC가 $\triangle OAB$를 이등분 $\Rightarrow\triangle OAC=\triangle OBC\Rightarrow$ 점O와 $\overline{AB}$ 사이의 거리가 높이가 되도록 하면 밑변길이가 같음. $\Rightarrow\overline{AC}=\overline{BC}\Rightarrow$ 점C가 $\overline{AB}$의 중점

점C가 $\overline{AB}$의 중점 $\Rightarrow C\left(\frac{t+2t}{2},\frac{f(t)+0}{2}\right)=C\left(\frac{3}{2}t,\frac{f(t)}{2}\right)$,

$g(\frac{3}{2}t)=\frac{1}{2}f(t)$, $g(x)=\frac{1}{2}f(\frac{2}{3}x)$, $G'(x)=g(x)$, $(G^{-1})'(x)=\frac{1}{G'(G^{-1}(x))}=\frac{1}{g(G^{-1}(x))}$,

$A=\int_0^{G(1)}\sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{2}{3}}\{f(u)\sin u\}du$, $B=aG(1)=a\int_0^1g(t)dt=\frac{3}{2}a\int_0^{\frac{2}{3}}g(\frac{3}{2}u)du$

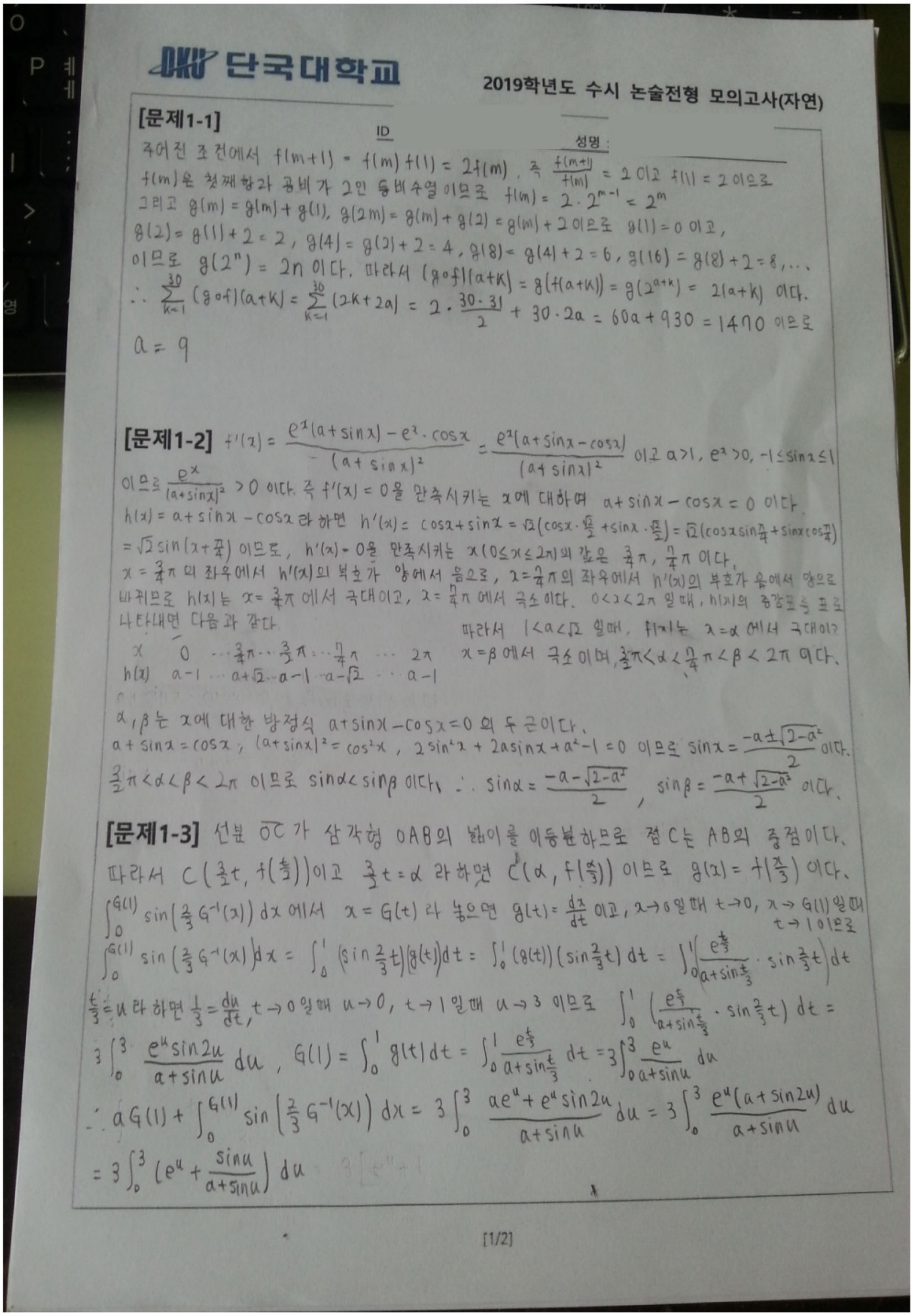
$\left\{\begin{array}{l}u=\frac{2}{3}G^{-1}(x)\quad\frac{du}{dx}=\frac{\frac{2}{3}}{g(G^{-1}(x))}=\frac{2}{3g(\frac{3}{2}u)}=\frac{2}{3\times\frac{1}{2}f(u)}=\frac{4}{3f(u)}\\\frac{2}{3}G^{-1}(0)=\frac{2}{3}\times0=0,\ \frac{2}{3}G^{-1}(G(1))=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}\end{array}\right\}$

$\left\{\begin{array}{l}u=\frac{2}{3}t,\ \frac{du}{dt}=\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\times0=0,\ \frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}\end{array}\right\}$ $=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{2}{3}}af(u)du$

$\int_0^{G(1)}\sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx+aG(1)=A+B=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{2}{3}}\{f(u)\sin u+af(u)\}du=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{e^u}{a+\sin u}(a+\sin u)\right\}du$

$=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{2}{3}}e^udu=\frac{3}{4}[e^u]_0^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}(e^{\frac{2}{3}}-1)$

문제	등급	첨삭
문제1	A	문제1의 논제1: 서술이 잘되있음 논제2: 문제에 알파, 베타로 지정되어 있는 기호대신 k, l이라는 새로운 기호를 사용하여 논리적 혼동이 있음.그러나 논리적으로 맞는 결론을 이끌어내었음 논제3: 맞는 결론을 이끌었으나 서술능력이 조금 아쉬움



2019학년도 수시 논술전형 모의고사(자연)

[문제1-1]

ID

성명 :

주어진 조건에서 $f(m+1) = f(m)f(1) = 2f(m)$, 즉 $\frac{f(m+1)}{f(m)} = 2$이고 $f(1) = 2$이므로 $f(m)$은 첫째항과 공비가 2인 등비수열이므로 $f(m) = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$

그리고 $g(m) = g(m) + g(1)$, $g(2m) = g(m) + g(2) = g(m) + 2$이므로 $g(1) = 0$이고, $g(2) = g(1) + 2 = 2$, $g(4) = g(2) + 2 = 4$, $g(8) = g(4) + 2 = 6$, $g(16) = g(8) + 2 = 8, \ldots$ 이므로 $g(2^n) = 2n$이다. 따라서 $(g \circ f)(a+k) = g(f(a+k)) = g(2^{a+k}) = 2(a+k)$이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{30} (g \circ f)(a+k) = \sum_{k=1}^{30} (2k+2a) = 2 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} + 30 \cdot 2a = 60a + 930 = 1470$이므로

$a = 9$

[문제1-2] $f'(x) = \frac{e^x(a+\sin x) - e^x \cdot \cos x}{(a+\sin x)^2} = \frac{e^x(a+\sin x - \cos x)}{(a+\sin x)^2}$이고 $a>1$, $e^x>0$, $-1 \le \sin x \le 1$이므로 $\frac{e^x}{(a+\sin x)^2} > 0$이다. 즉 $f'(x) = 0$을 만족시키는 x에 대하여 $a + \sin x - \cos x = 0$이다.

$h(x) = a + \sin x - \cos x$라 하면 $h'(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2}(\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos x \sin\frac{\pi}{4} + \sin x \cos\frac{\pi}{4})$ $= \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$이므로, $h'(x) = 0$을 만족시키는 $x(0 \le x \le 2\pi)$의 값은 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이다.

$x = \frac{3}{4}\pi$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양에서 음으로, $x = \frac{7}{4}\pi$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $h(x)$는 $x = \frac{3}{4}\pi$에서 극대이고, $x = \frac{7}{4}\pi$에서 극소이다. $0 < x < 2\pi$일 때, $h(x)$의 증감표를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$h(x)$	$a-1$	$\cdots$	$a+\sqrt{2}$	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$	$a-\sqrt{2}$	$\cdots$	$a-1$

따라서 $1 < a < \sqrt{2}$일 때, $f(x)$는 $x = \alpha$에서 극대이고 $x = \beta$에서 극소이며, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < \frac{7}{4}\pi < \beta < 2\pi$이다.

α, β는 x에 대한 방정식 $a + \sin x - \cos x = 0$의 두 근이다.

$a + \sin x = \cos x$, $(a+\sin x)^2 = \cos^2 x$, $2\sin^2 x + 2a\sin x + a^2 - 1 = 0$이므로 $\sin x = \frac{-a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}$이다.

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < \beta < 2\pi$이므로 $\sin\alpha < \sin\beta$이다. $\therefore \sin\alpha = \frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}$, $\sin\beta = \frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2}$이다.

[문제1-3] 선분 $\overline{OC}$가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하므로 점 C는 AB의 중점이다. 따라서 $C(\frac{3}{2}t, f(\frac{t}{2}))$이고 $\frac{3}{2}t = \alpha$라 하면 $C(\alpha, f(\frac{\alpha}{3}))$이므로 $g(x) = f(\frac{x}{3})$이다.

$\int_0^{G(1)} \sin(\frac{2}{3}G^{-1}(x))\,dx$에서 $x = G(t)$라 놓으면 $g(t) = \frac{dx}{dt}$이고, $x \to 0$일 때 $t \to 0$, $x \to G(1)$일 때 $t \to 1$이므로

$\int_0^{G(1)} \sin(\frac{2}{3}G^{-1}(x))\,dx = \int_0^1 (\sin\frac{2}{3}t)(g(t))\,dt = \int_0^1 (g(t))(\sin\frac{2}{3}t)\,dt = \int_0^1 (\frac{e^{\frac{t}{3}}}{a+\sin\frac{t}{3}} \cdot \sin\frac{2}{3}t)\,dt$

$\frac{t}{3} = u$라 하면 $\frac{1}{3} = \frac{du}{dt}$, $t \to 0$일 때 $u \to 0$, $t \to 1$일 때 $u \to 3$이므로 $\int_0^1 (\frac{e^{\frac{t}{3}}}{a+\sin\frac{t}{3}} \cdot \sin\frac{2}{3}t)\,dt =$

$3\int_0^3 \frac{e^u \sin 2u}{a+\sin u}\,du$, $G(1) = \int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 \frac{e^{\frac{t}{3}}}{a+\sin\frac{t}{3}}\,dt = 3\int_0^3 \frac{e^u}{a+\sin u}\,du$

$\therefore aG(1) + \int_0^{G(1)} \sin(\frac{2}{3}G^{-1}(x))\,dx = 3\int_0^3 \frac{ae^u + e^u\sin 2u}{a+\sin u}\,du = 3\int_0^3 \frac{e^u(a+\sin 2u)}{a+\sin u}\,du$

$= 3\int_0^3 (e^u + \frac{\sin u}{a+\sin u})\,du$

[1/2]

문제	등급	첨삭
문제1	A	우수논술자 추천: 문제 1-1과 1-2는 출제의도와 정확하게 일치하게 풀이를 제시하였으며 논리적인 전개도 우수한 편이라고 판단됨. 문제 1-3에서는 응시학생이 모두 아는것으로 판단됨. 그러나 계산과정 앞부분에서 상수차이의 실수로 인하여 문제 후반부에 계산과정이 매우 복잡해짐. 정확하게 풀이하였으면, 후반부 풀이과정도 깔끔하게 풀이되었을 것으로 판단됨. 그러나 전체적인 풀이과정은 매우 우수하며, 논리적인 전개 과정도 좋아보임.

단국대학교 2019학년도 수시 논술전형 모의고사(자연)

[문제1-1]

ID : 성명 :

함수 f는 모든 자연수 m, n에 대하여 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$을 만족하므로 $m=1, n=1$ 대입하면 $f(2)=4$ 이고, $m=1, n=2$를 대입하면 $f(3)=f(1)\cdot f(2)=2\cdot 4=8$ 이다. 만약 $f(n)=2^n$ 이라고 가정하면, $f(1)=2^1=2$로 성립하고, $f(n+1)=f(n)\times f(1)=2^n\times 2=2^{n+1}$ 이므로 가정에 대해 성립한다. 그로 수학적 귀납법에 의해 $f(n)=2^n$은 참이다.

함수 g는 모든 자연수 m, n에 대하여 $g(mn)=g(m)+g(n)$을 만족하므로 $m=2, n=2$ 대입하면 $g(4)=4$이고, $m=2, n=4$ 대입하면 $g(8)=6$ 이다. 만약 $g(2^n)=2n$ 이라고 가정하면, $g(2^1)=2\cdot 1=2$ (조건에 제시됨)로 성립하고, $g(2^n\times 2)=g(2^n)+g(2)=2n+2=2(n+1)$ 이므로 가정에 대해 성립한다. 그로 수학적 귀납법에 의해 $g(2^n)=2n$은 참이다.

이때, $\sum_{k=1}^{30}(g\circ f)(a+k)=g(f(a+1))+g(f(a+2))+\cdots+g(f(a+30))$ 이다. 위에서 구한 $f(n)=2^n$, $g(2^n)=2n$을 이용하면 $g(f(a+1))+g(f(a+2))+\cdots+g(f(a+30))=g(2^{a+1})+g(2^{a+2})+\cdots+g(2^{a+30})=2\times(a+1+a+2+\cdots a+30)$ $=2\times(30a+465)=60a+930$ 이다. $\sum_{k=1}^{30}(g\circ f)(a+k)=1470$ 이므로 $60a+930=1470$ 이다.

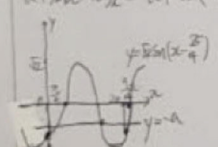
$60a=540$이고 $a=9$ 이다.

$\therefore a=9$

[문제1-2]

제시문 (나)에 따르면, 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$일때 극대, 극소를 가진다. 문제에서 주어진 함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{a+\sin x}$는 e^x는 미분가능하고, $a+\sin x$도 미분가능하므로 $a+\sin x\neq 0$ 일때 $f(x)$는 미분가능하다. 그러면 $f'(x)=\dfrac{e^x(a+\sin x)-e^x\cos x}{(a+\sin x)^2}$ $(a+\sin x\neq 0)$ 이다. 이때 제시문 (나)에 따르면 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀔때 극대이고, 음에서 양으로 바뀔때 극소 이므로, $f'(x)$의 부호변화를 고려해본다면, $(a+\sin x)^2>0$ 이고 $e^x>0$ 이므로 $(a+\sin x-\cos x)$의 부호만 고려해보자.

$a+\sin x-\cos x=a+\sqrt{2}(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4})=a+\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 이다. $a+\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=0$ 을 그래프로 나타내보면,



이렇게 그릴수 있다. 이때 $0<\alpha,\beta<2\pi$인 α,β에서 극대, 극소를 가져야 하므로, $1<a<\sqrt{2}$ 일때 양에서 음, 음에서 양으로의 변화가 $(0,2\pi)$ 구간에서 있으므로, a의 범위는 $1<a<\sqrt{2}$ 가 된다.

$\therefore 1<a<\sqrt{2}$

α는 $\frac{5}{4}\pi<\alpha<\frac{7}{4}\pi$에 존재하고 β는 $\frac{7}{4}\pi<\beta<2\pi$에 존재한다. 그렇다면 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=-\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$

$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})+\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha=-\frac{a}{\sqrt{2}}-\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$ $\therefore \sin\alpha=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{a^2}{4}}$

그리고 $\sin(\beta-\frac{\pi}{4})=-\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\cos(\beta-\frac{\pi}{4})=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$ $\sin(\beta-\frac{\pi}{4})+\cos(\beta-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin\beta=-\frac{a}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$

$\therefore \sin\beta=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{a^2}{4}}$

[문제1-3]

함수 t에 대해서 $A(t, f(t))$와 점 $B(2t, 0)$에서 선분 AB위에 점 C가 있다. 그리고 $\overline{OC}$가 삼각형 OAB를 이등분한다. 그로 점 C는 점 A와 점 B의 중점이므로 $C(\frac{3}{2}t, \frac{f(t)}{2})$이다. 이때 매개변수 t로 나타내면 $X=\frac{3}{2}t$, $Y=\frac{f(t)}{2}$ 이다. 그로 $g(x)=\frac{1}{2}f(\frac{2}{3}x)$ 이다.

문제	등급	첨삭
문제1	A	논제2의 서술과 결론이 명확함

DKU 단국대학교 2019학년도 수시 논술전형 모의고사(자연)

[문제2-1] ID : 성명 :

점 A, E의 중점을 M, 점 E, D의 중점을 N이라 하자.

$\angle P_1AD = 30°$ 이므로 $\angle P_1ME = \angle P_2ND = 30°$ 이다.

직선 AD를 x축으로 잡고 원점을 점 E로 잡으면

$P_1(-1, \sqrt{3})$, $P_2(3, \sqrt{3})$, $Q_1(-3, 0)$, $Q_2(-3, -2)$ 이다.

$\overrightarrow{P_1Q_1} = (-2, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{P_2Q_2} = (-6, -2-\sqrt{3})$ 이므로

$|\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{P_2Q_2}|^2 = (-8)^2 + (-2-2\sqrt{3})^2 = 64 + 4 + 12 + 8\sqrt{3} = 80 + 8\sqrt{3}$이 된다.

$\therefore 80 + 8\sqrt{3}$

[문제2-2]

$\angle P_1ME = \angle P_2ND = \theta$라 하면 $(0 \le \theta \le \pi)$

$P_1(-2+2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $P_2(2+2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $Q_1(k, 0)$ $Q_2(k, -2)$

$\overrightarrow{P_1Q_1} \cdot \overrightarrow{P_2Q_2} = (k+2-2\cos\theta, -2\sin\theta) \cdot (k-2-2\cos\theta, -2-2\sin\theta)$

$= k^2 - 4k\cos\theta + 4\sin\theta = (k-2\cos\theta)^2 + 4(\sin\theta + \frac{1}{2})^2 - 5$

$0 \le \sin\theta \le 1$ 이고 $-4 \le k \le 4$ 이므로

최솟값 : $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, $k = 2$ 일때 -4

최댓값 : $k = -4$ 일때 $k^2 - 4k\cos\theta + 4\sin\theta$

$= 16 + 16\cos\theta + 4\sin\theta \le 16 + 4\sqrt{17}$

$\therefore$ 大 : $16 + 4\sqrt{17}$, 小 : -4.

문제	등급	첨삭
문제2	A	2번 문항의 만점 답안임. 2-1: 모범답안에서 제시한 별해에 따라 적절한 좌표를 설정하여 문제를 해결하는 과정을 잘 서술함. 2-2: 모범답안에서 제시한 방법을 따라 문제를 해결하지는 않았지만 역시 좌표를 설정하는 방법으로 문제 풀이 과정을 서술함. 서술 중간에 theta에 대한 조건을 기술하지 않았지만 서술 과정 중에 학생이 충분히 인지하고 있음을 알 수 있으므로 감점을 하지 않고 만점을 부여함.

DKU 단국대학교

2019학년도 수시 논술전형 모의고사(자연)

[문제2-1]

ID :

성명

제시문 (가)를 활용하면 (라)에서 $\vec{AB}+\vec{AB}=\vec{AC}$ 를 $\vec{AC}-\vec{AB}=\vec{AB}$ 와 같이 뺄셈을 할 수 있다. 이를 활용하여 보면 문제의 $|\vec{P_1Q_1}+\vec{P_2Q_2}|^2 = |\vec{OQ_1}-\vec{OP_1}+\vec{OQ_2}-\vec{OP_2}|^2$ 이다. 이때, 중점의 정의에 따라서, P_1, P_2의 중점을 P_M이라하고, Q_1, Q_2의 중점을 Q_M이라하면, $2\times\frac{\vec{OQ_1}+\vec{OQ_2}}{2} = 2\times\vec{OQ_M}$, $2\times\frac{\vec{OP_1}+\vec{OP_2}}{2} = 2\times\vec{OP_M}$ 이다. 고로 $|\vec{OQ_1}-\vec{OP_1}+\vec{OQ_2}-\vec{OP_2}|^2 = |2\vec{OQ_M}-2\vec{OP_M}|^2$ 이다. 고로 구하고자하는 것은 $4|\vec{P_MQ_M}|^2$이다.

이제 그림을 좌표평면에 도입하자. 점A의 좌표를 $(0,0)$이라하고 직선 AD를 x축으로 놓는다면 점Q_M의 좌표는 $(1,-1)$이다. 그리고, 원 O_1에서 임의의 점 P_1에 대해 $\angle P_1AD = 30°$ 이므로, 원주각의 성질에 의해 호P_1E의 중심각은 $60°$이다. 고로 점P_1은 좌표가 $(2+2\cos\frac{\pi}{3}, 0+2\sin\frac{\pi}{3}) = (3, \sqrt{3})$ 이다. 그렇다면 점P_2는 점P_1을 x축 방향으로 4만큼 평행이동한 점이므로 점P_2의 좌표는 $(7, \sqrt{3})$이다 고로 점P_M의 좌표는 $(5, \sqrt{3})$ 이다.

$4|\vec{P_MQ_M}|^2 = 4\times\sqrt{(5-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}^2 = 4\times\sqrt{20+2\sqrt{3}}^2 = 4\times(20+2\sqrt{3}) = 80+8\sqrt{3}$ 이다.

$\therefore |\vec{P_1Q_1}+\vec{P_2Q_2}|^2 = 80+8\sqrt{3}$

[문제2-2]

좌표계를 도입하자. $A(0,0)$일때 $Q_1(a,0)$ $(0\le a\le 8)$이고, $Q_2(a,-2)$ $(0\le a\le 8)$이다.

$P_1(2+2\cos\theta, 2\sin\theta)$ $(0\le\theta\le\pi)$이고, $P_2(6+2\cos\theta, 2\sin\theta)$이다. 이때 $\vec{P_1Q_1}\cdot\vec{P_2Q_2}$은

$(a-2-2\cos\theta, -2\sin\theta)\cdot(a-6-2\cos\theta, -2-2\sin\theta) = (a-2)(a-6)-4\cos\theta(2a-8)+4\cos^2\theta+4\sin\theta+4\sin^2\theta$.

$= (a-4)^2 - 8\cos\theta\cdot(a-4) + 4\sin\theta$ 이다. θ의 값에 상관없이 최대가 되기위해서는 $-(a-4)$가 최대여야하므로 $a=0$ 이다 $16+8\cos\theta\times4+4\sin\theta$ 인데. 이를 $f(\theta)$라하자.

$f'(\theta) = -32\sin\theta+4\cos\theta$ 이다. $\tan\theta=\frac{1}{8}$일때 $f'(\theta)=0$ 이고, $f'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극대를 갖는다. 이때 θ는 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{65}}$ $\cos\theta=\frac{8}{\sqrt{65}}$ 이다.

고로 극댓값은 $16+32\times\frac{8}{\sqrt{65}}+4\times\frac{1}{\sqrt{65}} = 16+\frac{260}{\sqrt{65}} = 16+4\sqrt{65}$ 이다. $\therefore$ 최댓값 : $16+4\sqrt{65}$

θ에 상관없이 최소가 되려면 $-(a-4)$가 최소여야 하므로 $a=8$ 이다. $16-32\cos\theta+4\sin\theta$ 인데 이를 $g(\theta)$라하자 $g'(\theta)=32\sin\theta+4\cos\theta$ 인데 $\tan\theta=-\frac{1}{8}$ 일때 즉 θ가 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에 있을때 $g'(\theta)=0$ 인데, 이는 $g'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극대를 갖는다. 고로 경계값인 $\theta=0$ or π일때 최소인데 $g(0)=-16$ 이고 $g(\pi)=48$ 이다. 고로 최솟값은 -16이다

$\therefore$ 최솟값 : -16.

문제	등급	첨삭
문제2	A	문제2의 논제1은 좌표를 도입하여 해결하였음 논제2의 최소값을 바르게 구하였음

DKU 단국대학교

2019학년도 수시 논술전형 모의고사(자연)

[문제2-1] ID : 성명

제시문 (가)를 활용하면 (나)에서 $\vec{AB}+\vec{AB}=\vec{AC}$를 $\vec{AC}-\vec{AB}=\vec{AB}$와 같이 뺄셈을 할 수 있다. 이를 활용하여 보면. 문제의 $|\vec{P_1Q_1}+\vec{P_2Q_2}|^2 = |\vec{OQ_1}-\vec{OP_1}+\vec{OQ_2}-\vec{OP_2}|^2$이다. 이때, 중점의 정의에 따라서, P_1, P_2의 중점을 P_M이라 하고, Q_1, Q_2의 중점을 Q_M이라 하면, $2\times\frac{\vec{OQ_1}+\vec{OQ_2}}{2} = 2\times\vec{OQ_M}$, $2\times\frac{\vec{OP_1}+\vec{OP_2}}{2} = 2\times\vec{OP_M}$이다. 고로 $|\vec{OQ_1}-\vec{OP_1}+\vec{OQ_2}-\vec{OP_2}|^2 = |2\vec{OQ_M}-2\vec{OP_M}|^2$이다. 고로 구하고자 하는 것은 $4|\vec{P_MQ_M}|^2$이다.

이제 그림을 좌표평면에 도입하자. 점A의 좌표를 $(0,0)$이라 하고 직선 AD를 x축으로 놓는다면 점Q_M의 좌표는 $(1,-1)$이다. 그리고, 원 O_1에서 임의의 점 P_1에 대해 $\angle P_1AD = 30°$이므로, 원주각의 성질에 의해 호P_1E의 중심각은 $60°$이다. 고로 점P_1은 좌표가 $(2+2\cos\frac{\pi}{3}, 0+2\sin\frac{\pi}{3}) = (3, \sqrt{3})$이다. 그렇다면 점$P_2$는 점$P_1$을 x축 방향으로 4만큼 평행이동한 점이므로 점P_2의 좌표는 $(7, \sqrt{3})$이다. 고로 점P_M의 좌표는 $(5, \sqrt{3})$이다.

$4|\vec{P_MQ_M}|^2 = 4\times\sqrt{(5-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}^2 = 4\times\sqrt{20+2\sqrt{3}}^2 = 4\times(20+2\sqrt{3}) = 80+8\sqrt{3}$이다.

$\therefore |\vec{P_1Q_1}+\vec{P_2Q_2}|^2 = 80+8\sqrt{3}$

[문제2-2]

좌표계를 도입하자. $A(0,0)$일 때 $Q_1(a,0)$ $(0\le a\le 8)$이고, $Q_2(a,-2)$ $(0\le a\le 8)$이다.

$P_1(2+2\cos\theta, 2\sin\theta)$ $(0\le\theta\le\pi)$이고, $P_2(6+2\cos\theta, 2\sin\theta)$이다. 이때 $\vec{P_1Q_1}\cdot\vec{P_2Q_2}$은

$(a-2-2\cos\theta, -2\sin\theta)\cdot(a-6-2\cos\theta, -2-2\sin\theta) = (a-2)(a-6)-4\cos\theta(2a-8)+4\cos^2\theta+4\sin\theta+4\sin^2\theta$

$= (a-4)^2 - 8\cos\theta\cdot(a-4) + 4\sin\theta$ 이다. θ의 값에 상관없이 최대가 되기 위해서는 $-(a-4)$가 최대여야 하므로 $a=0$이다. $16+8\cos\theta\times4+4\sin\theta$인데. 이를 $f(\theta)$라 하자.

$f'(\theta) = -32\sin\theta+4\cos\theta$이다. $\tan\theta=\frac{1}{8}$일 때 $f'(\theta)=0$이고, $f'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극대를 갖는다. 이때 θ는 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{65}}$, $\cos\theta=\frac{8}{\sqrt{65}}$이다.

고로 극댓값은 $16+32\times\frac{8}{\sqrt{65}}+4\times\frac{1}{\sqrt{65}} = 16+\frac{260}{\sqrt{65}} = 16+4\sqrt{65}$이다. $\therefore$ 최댓값 : $16+4\sqrt{65}$

θ에 상관없이 최소가 되려면 $-(a-4)$가 최소여야 하므로 $a=8$이다. $16-32\cos\theta+4\sin\theta$인데 이를 $g(\theta)$라 하자. $g'(\theta)=32\sin\theta+4\cos\theta$인데 $\tan\theta=-\frac{1}{8}$일 때 즉 θ가 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에 있을 때 $g'(\theta)=0$인데, 이는 $g'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극대를 갖는다. 고로 경계값인 $\theta=0$ or π일 때 최소인데 $g(0)=-16$이고 $g(\pi)=48$이다. 고로 최솟값은 -16이다

$\therefore$ 최솟값 : -16.

문제	등급	첨삭
문제2	A	문제2의 논제1은 좌표를 도입하여 해결하였음 논제2의 최소값을 바르게 구하였음