문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 내적의 개념을 이해하여 공간도형의 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 확률의 개념을 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 3] 도함수의 개념을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이강섭 외(2016), 기하와 벡터, 159-163쪽, 184-185쪽
○ 김창동 외(2015), 기하와 벡터, 154-155쪽, 169-171쪽
○ 정상권 외(2015), 확률과 통계, 75-78쪽
○ 김원경 외(2015), 확률과 통계, 57-59쪽
○ 우정호 외(2015), 미적분 II, 160-162쪽
○ 신항균 외(2015), 미적분 II, 138-140쪽

[논제 1 평가기준]
- 직선의 방정식 $x_0 = t_0$, $y_0 = 2t_0$, $z_0 = t_0 + a$를 제시 : 5점
- $t_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}a$를 제시 : 5점
- $a = \sqrt{6}$을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- 집합 B의 원소의 개수를 제시 : 6점
- $m+k \le 14$인 B의 원소의 개수를 제시 : 6점
- a의 최솟값은 15을 제시 : 3점

[논제 3 평가기준]
- 영역의 넓이 $s(t)$를 제시 : 7점
- $s(t)$의 도함수 제시 : 5점
- $t=1$를 제시 : 3점

□ 예시 답안

[논제 1] 점 B의 좌표를 (x_0, y_0, z_0)라 하면, $B'(0, y_0, 0)$이고 $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BB'} = 10+4\sqrt{3}$ 로부터

$$x_0^2 + z_0^2 = 10+4\sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

을 얻는다. 점 B가 직선 l 위의 점이므로

$$x_0 = t_0,\ \ y_0 = 2t_0,\ \ z_0 = t_0 + a$$

로 나타낼 수 있다. 또한, 점 B가 구 $x^2+y^2+(z-a)^2 = 2a^2$ 위의 점이므로 $t_0^2 = \frac{1}{3}a^2$이다. 점 B의 z좌표에 대한 조건으로부터 $t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}a$이고, 따라서

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}a,\ \ z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}a + a$$

를 ①에 대입하면, $a = \sqrt{6}$이다.

[논제 2] 집합 B의 원소를 나열하면 다음과 같다.

$(1,1)$

$(1,2), (2,1)$

$(1,3), (2,2), (3,1)$

$(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$

$\vdots$

$(1,18), (2,17), (3,16), \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, (18,1)$

$(1,19), (2,18), (3,17), \cdots, (10,10)$

따라서 $2 \le n \le 19$인 자연수 n에 대하여 A_n의 원소의 개수는 각각 $n-1$이고, 이에 따라 집합 B의 원소의 개수는 다음과 같다.

$$\left(\sum_{i=1}^{18} i\right) + 10 = 171 + 10 = 181$$

한편, $m+k \le 14$인 B의 원소의 개수는 $\sum_{i=1}^{13} i = 91$이므로 $m+k \ge 15$인 집합 B의 원소의 개수는 90이다. 따라서 $P_{15} = \frac{90}{181}\left(< \frac{1}{2}\right)$이고 $P_{14} > \frac{1}{2}$이므로 구하는 a의 최솟값은 15이다.

[논제 3] 영역의 넓이 $s(t)$는

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t [f(t)-f(x)]dx + \int_t^2 [f(x)-f(t)]dx \\ &= \int_0^t f(t)dx - \int_0^t f(x)dx - \int_2^t f(x)dx - \int_t^2 f(t)dx \\ &= tf(t) - \int_0^t f(x)dx - \int_2^t f(x)dx - (2-t)f(t) \end{aligned}$$

이고 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}(t) &= f(t)+tf'(t)-f(t)-f(t)+f(t)+(t-2)f'(t)\\ &= 2(t-1)f'(t)\end{aligned}$$

$f'(t)>0$이므로 $s(t)$의 증감을 조사하면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$s'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$s(t)$		↘	극소(최소)	↗	

구간 $[0,2]$에서 $t=1$일 때 $s(t)$가 최소가 된다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 이차곡선의 접선과 준선을 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 이차곡선의 접선과 초점을 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 3] 곡선의 접선의 의미를 이해하고 정적분 값을 구할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 황선욱 외(2017), 미적분 II, 76쪽, 109-115쪽, 141-147쪽
○ 류희찬 외(2015), 미적분 II, 165-173쪽
○ 정상권 외(2015), 기하와 벡터, 12-15쪽

[논제 1 평가기준]

- 접선의 방정식 $y=\dfrac{1}{\sqrt{a}}x+\sqrt{a}$을 제시 : 3점
- $a=\dfrac{1}{3}$을 제시 : 7점
- $(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- $\beta=2\alpha$을 제시 : 10점
- $\beta=86^\circ$ 을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]

- $\angle \mathrm{A'AC}=2\alpha+\dfrac{\pi}{4}$임을 제시 : 5점
- $f'(a)=\tan\left(\dfrac{\sin a}{2}\right)$임을 유도 : 10점
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\,dx$을 제시 : 5점
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx=-2\ln\cos\frac{1}{2}$임을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 점 $\mathrm{A}(a, b)$는 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점이므로 $b^2 = 4a$에서 $b = 2\sqrt{a}$ 이다.
포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, 2\sqrt{a})$에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = \frac{1}{\sqrt{a}}x + \sqrt{a}$$

이 접선과 x축이 만나는 점 B는 $(-a, 0)$이고, 준선과 만나는 점 C는 $\left(-1, \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

$$(-2a)^2 + (-2\sqrt{a})^2 = (a-1)^2 + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$

에서 $a = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서 $(a, b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$이다.

[논제 2] $\alpha = 43^\circ$ 라 하고, 포물선 $y^2 = 4x$의 초점 F와 점 $\mathrm{D}(a, b)$를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 β라 하자.

점 $\mathrm{D}(a, b)$에서 포물선 $y^2 = 4x$의 접선의 방정식은 $y = \frac{1}{\sqrt{a}}x + \sqrt{a}$ 이므로,

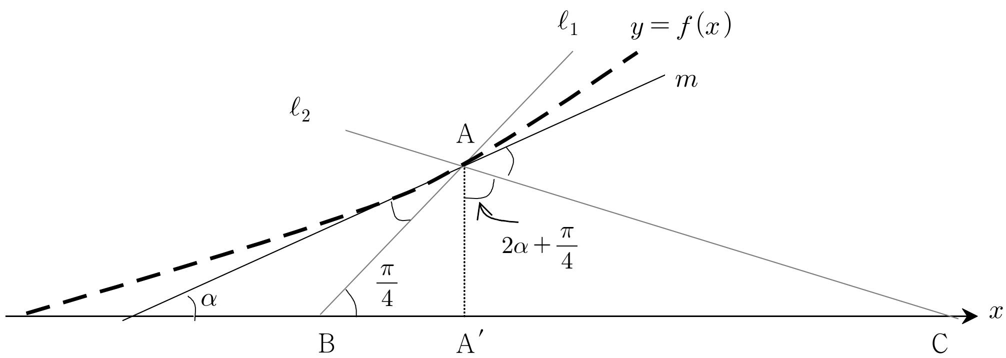
$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}, \text{ 즉 } \sqrt{a} = \frac{1}{\tan\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

이다. $\tan\beta$는 $\mathrm{F}(1, 0)$과 $\mathrm{D}(a, b)$를 지나는 직선의 기울기이므로

$$\tan\beta = \frac{b}{a-1} = \frac{2\sqrt{a}}{a-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

이다. ①을 ②에 대입하면, $\tan\beta = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha$ 이므로 $\beta = 2\alpha = 86^\circ$ 이다.

[논제 3]



점 A에서 곡선 $y = f(x)$의 접선 m이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α 라 할 때

$$f'(a) = \tan\alpha$$

이고 $0 < f'(x) < 1$이므로

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

이다. 또한 A에서 x축에 내린 수선의 발을 A′라 할 때

$$\angle \mathrm{A'AC} = 2\alpha + \frac{\pi}{4},\ \overline{\mathrm{AA'}} = \overline{\mathrm{BA'}} = f(a)$$

이고

$$\overline{\mathrm{A'C}} = f(a)\tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = f(a)\frac{1+\tan 2\alpha}{1-\tan 2\alpha}$$

이다. 조건 (iii)으로부터

$$\frac{2f(a)}{1-\tan(\sin a)} = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BA'}} + \overline{\mathrm{A'C}}$$

$$= f(a) + f(a)\frac{1+\tan 2\alpha}{1-\tan 2\alpha}$$

$$= \frac{2f(a)}{1-\tan 2\alpha}$$

가 성립하고

$$\tan(\sin a) = \tan 2\alpha$$

을 얻는다. 따라서

$$2\alpha = \sin a + k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

이다. ①로부터

$$\alpha = \frac{1}{2}\sin a$$

이므로

$$f'(a) = \tan\alpha = \tan\left(\frac{\sin a}{2}\right)$$

를 얻는다. 그러므로 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서

$$f'(x) = \tan\left(\frac{\sin x}{2}\right)$$

이다.

이제 $f(0) = 0$이므로 부분적분에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = \Big[-f(x)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\tan\left(\frac{\sin x}{2}\right)\right]\cos x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2\tan t\,dt \qquad \left(\frac{\sin x}{2} = t\text{로 치환}\right)$$

$$= -2\ln\cos\frac{1}{2}$$

이다.