단국대학교 2018학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제 및 답안 (오후)

전형유형	논술우수자
수험번호	
성 명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$일 때, $\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 기호로 $\vec{a} \cdot \vec{b}$와 같이 나타낸다. 즉, $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$$ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$일 때, 다음 식이 성립한다. $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
(나) 표본공간 S에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 확률은 $$\frac{n(A)}{n(S)}$$
(다) 연속함수는 여러 가지 좋은 성질을 가지고 있다. 예를 들면, (1) 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 $f(x)$는 항상 최댓값과 최솟값을 가진다. (2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $$\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert\,dx$$

[논제 1] 좌표공간에서 점 $\mathrm{C}(0, 0, a)$를 중심으로 하고 점 $\mathrm{A}(a, 0, 0)$을 지나는 구가 직선

$$l : x = t,\ \ y = 2t,\ \ z = t + a$$

와 만나는 두 점 중에서 z좌표의 값이 큰 점을 B라 하자. B에서 y축에 내린 수선의 발을 B'라 할 때,

$$\overrightarrow{\mathrm{BO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BB}'} = 10 + 4\sqrt{3}$$

를 만족시킨다. 이때 a의 값을 구하시오.(단, $a > 0$이고, O는 원점이다) (15점)

[논제 2] 자연수 $n\,(n = 2, 3, 4, \cdots, 20)$에 대하여 집합 A_n, A, B를 다음과 같이 정의하자.

$A_n = \{(m, k) \mid m + k = n,\ m,\ k\text{는 자연수}\}$

$A = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_{20}$

$B = A - \{(m, k) \in A_{20} \mid m > k\}$

집합 B에서 한 개의 원소 (m, k)를 택할 때, $m + k \ge a\,(a = 2, 3, 4, \cdots, 20)$일 확률을 P_a라 하자. 이때 $\mathrm{P}_a < \frac{1}{2}$이 되는 a의 최솟값을 구하시오. (15점)

[논제 3] 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이다. 실수 $t\,(0 \le t \le 2)$에 대하여 직선 $y = f(t)$, 곡선 $y = f(x)$ 및 두 직선 $x = 0$, $x = 2$로 둘러싸인 영역의 넓이를 $s(t)$라 하자. 함수 $s(t)$가 최소가 되는 t의 값을 구하시오. (15점)

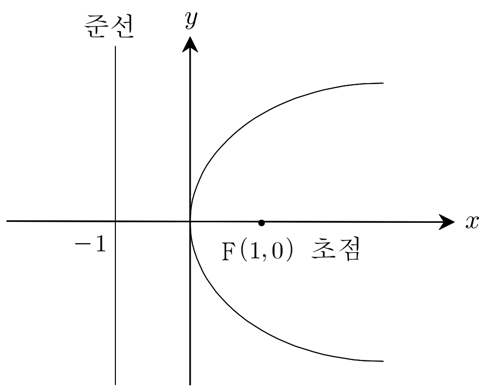
[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4px \quad (p \neq 0)$$

이고, 포물선 $y^2 = 4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(나) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

이고, 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α라 할 때

$$f'(a) = \tan\alpha$$

이다.

(다) 함수 $y = \tan x$는 아래와 같은 성질을 갖는다.

(1) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, 특히 $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(2) $\tan x$는 주기가 π인 주기함수이다

(3) $\displaystyle\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$ (단, C는 적분상수)

(라) 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때 다음이 성립한다.

(1) [치환적분법]

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

(2) [부분적분법]

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

[논제 1] 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B, 준선과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$일 때, A의 좌표를 구하시오.(단, $b>0$) (15점)

[논제 2] 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 D에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 43°라 하자. 포물선의 초점 F와 점 D를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하시오. (15점)

[논제 3] 실수 $x(x \neq 0)$에 대하여 $0 < f'(x) < 1$이고 $f'(0) = 0$인 함수 $f(x)$가 있다.

실수 $a\left(0 < a \leq \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$에서의 접선 m과 점 A를 지나는 두 직선 ℓ_1, ℓ_2는 다음 조건을 만족시킨다.

(i) ℓ_1의 기울기가 1이다.

(ii) m과 ℓ_1이 이루는 각의 크기와 m과 ℓ_2가 이루는 각의 크기가 서로 같다.

(iii) ℓ_1이 x축과 만나는 점을 $\mathrm{B}(b, 0)$, ℓ_2가 x축과 만나는 점을 $\mathrm{C}(c, 0)$라 할 때

$$\overline{\mathrm{BC}} = \frac{2f(a)}{1 - \tan(\sin a)} \quad (\text{단, } b < a < c)$$

이때 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\, dx$을 구하시오.(단, $f(0) = 0$) (25점)