문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 함수의 극한과 연속의 성질을 이해할 수 있는지를 평가

[논제 2] 미분가능성의 개념을 이해하고 주어진 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는지를 평가

[논제 3] 정적분의 개념과 삼각함수의 주기성을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이준열외 (2015), 미적분 I, 130-132쪽
○ 김창동외 (2015), 미적분 I, 52-77쪽, 163-164쪽
○ 류희찬외 (2015), 미적분 II, 69-71쪽
○ 김원경외 (2015), 미적분 I, 162-172쪽

[논제 1 평가기준]

- 삼각함수의 성질을 이용하여 $f(x)=\dfrac{ax\sin x+b}{x\ln(x+1)}$ 임을 제시 : 5점
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax\sin x}{x\ln(x+1)}=a$를 제시 : 5점
- a,b 의 값을 모두 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- 접선의 방정식을 제시 : 5점
- $A(x)=\begin{cases}-x+\pi-\sin x & (x<\pi)\\ \sin x+x-\pi & (x\ge\pi)\end{cases}$ 을 제시 : 5점
- $A(x)$가 모든 점에서 미분가능함을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]

- $\cos\left(\dfrac{b}{4}\pi\right)+\cos(b\pi)-\cos\left(\dfrac{3b}{4}\pi\right)=1$ 을 이용하여 b가 짝수임을 제시 : 4점
- $1=-\dfrac{a}{3b}(\cos(b\pi/3)-1)=\begin{cases}\dfrac{a}{2b}, & b=6k-2 \text{ 또는 } 6k-4\\ 0, & b=6k\end{cases}$를 이용하여 $a=2b$임을 제시 : 5점
- 순서쌍을 모두 제시 : 6점

□ 예시 답안

[논제 1] $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로 0이 아닌 실수 $x\in(-1,\infty)$에 대하여,

$$f(x)=\frac{-ax\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+b}{x\ln(x+1)}=\frac{ax\sin x+b}{x\ln(x+1)}$$

이다. $x\to 0$일 때, (분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다. 따라서 $b=0$이다.
또한 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x}{x\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a\sin x}{x}}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=a=f(0)=-1$$

이므로 구하는 값은 $a=-1,\ b=0$이다.

[논제 2] $f(x)=\sin x$라 하면 $f'(x)=\cos x$이므로 점 $\mathrm{P}(\pi,0)$에서 접선의 방정식은

$$g(x)=f'(\pi)(x-\pi)=-x+\pi$$

이다. 곡선 $f(x)=\sin x$와 접선 $g(x)=-x+\pi$의 교점은 $\mathrm{P}(\pi,0)$뿐이므로 $A(x)$는 다음과 같다.

$$A(x)=|f(x)-g(x)|=\begin{cases}-x+\pi-\sin x, & (x<\pi)\\ \sin x+x-\pi, & (x\ge\pi)\end{cases}$$

구간 $(-\infty,\pi)$와 (π,∞)에서 $A(x)$는 미분가능하므로 $x=\pi$에서 미분가능성을 조사하면 된다.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{A(\pi+h)-A(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h-\sin(\pi+h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\left(-1+\frac{\sin h}{h}\right)=0,$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{A(\pi+h)-A(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sin(\pi+h)+h}{h}=\lim_{h\to 0+}\left(-\frac{\sin h}{h}+1\right)=0$$

이므로 $A(x)$는 $x=\pi$에서 미분가능하다. 따라서 함수 $A(x)$는 모든 실수에서 미분가능하다.

[논제 3] 조건 (i)로부터

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\pi&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}h(x)dx+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}h(x)dx\\&=\left[-\frac{a}{3b}\ \cos(bx)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{3}{4}\pi+\left[-\frac{a}{3b}\ \cos(bx)\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}+\frac{3}{4}\pi\\&=-\frac{a}{3b}\left(\cos\left(\frac{b\pi}{4}\right)-1\right)-\frac{a}{3b}\left(\cos(b\pi)-\cos\left(\frac{3b\pi}{4}\right)\right)+\frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

이므로

$$0=-\frac{a}{3b}\left(\cos\left(\frac{b\pi}{4}\right)-1\right)-\frac{a}{3b}\left(\cos(b\pi)-\cos\left(\frac{3b\pi}{4}\right)\right)$$

이고, a,b가 자연수 이므로

$$\cos\left(\frac{b}{4}\pi\right)+\cos(b\pi)-\cos\left(\frac{3b}{4}\pi\right)=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad ①$$

이다. ①로부터 b는 짝수이다. 또한 조건 (ii)로부터

$$1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(h(x)-3)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{a}{3}\sin(bx)dx=\left[-\frac{a}{3b}\cos(bx)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{a}{3b}\left(\cos\left(\frac{b\pi}{3}\right)-1\right)\ \cdots\ ②$$

이다. b가 짝수이므로, 자연수 k에 대하여

$$\cos\left(\frac{b\pi}{3}\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & b=6k-2 \text{ 또는 } 6k-4\\ 1, & b=6k\end{cases}$$

이다. 식 ②로부터

$$1 = -\frac{a}{3b}\left(\cos\left(\frac{b\pi}{3}\right)-1\right)=\begin{cases}\dfrac{a}{2b}, & b=6k-2 \text{ 또는 } 6k-4\\ 0, & b=6k\end{cases}$$

이다. 따라서 조건 (i), (ii)를 만족시키는 자연수의 순서쌍 (a,b)는 다음과 같다.

$$(12k-4,\ 6k-2),\ (12k-8,\ 6k-4)\ \ (k=1,2,3,\cdots)$$

이중에서 조건 (iii)를 만족시키는 순서쌍은

$$(12k-4,\ 6k-2)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)\text{와 }(12k-8,\ 6k-4)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

이다. 이를 나열하면 다음과 같다.

$(4,2)$, $(8,4)$, $(16,8)$, $(20,10)$, $(28,14)$, $(32,16)$, $(40,20)$, $(44,22)$, $(52,26)$, $(56,28)$, $(64,32)$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 등비급수의 합을 알고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 등비급수로 정의된 함수의 미분가능성을 이해하는지를 평가

[논제 3] 타원의 성질을 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 류희찬 외(2015), 미적분 Ⅰ, 35-37쪽
○ 정상권 외(2015), 미적분 Ⅰ, 91-100쪽
○ 이강섭 외(2016), 기하와 벡터, 17-24쪽

[논제 1 평가기준]

- $\frac{r}{1-r}=4m+\frac{8}{3}$ $(m=0,1,2,3,\cdots)$을 제시 : 10점
- 집합 $T=\left\{\frac{12m+8}{12m+11} \,\middle|\, m=0,1,2,\cdots\right\}$를 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- 구간 $\left(0,\frac{4}{5}\right]$에서 $f(r)$을 제시 : 4점
- $\left(0,\frac{4}{5}\right]$ 이외의 일반적인 구간에서 $f(r)$을 제시 : 4점
- $f(r)$가 $r=\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots$에서 미분가능하지 않은 이유를 제시 : 3점
- $f(r)$이 미분가능하지 않은 r의 집합 $\left\{\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n=1,2,3,\cdots\right\}$을 제시 : 4점

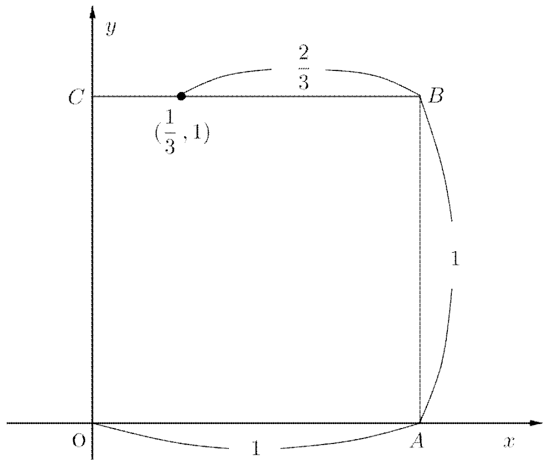
[논제 3 평가기준]

- P_r와 P_s가 두 점 A,A'을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있음을 제시 : 6점
- P_r는 선분 AB 위에 있고, P_s는 선분 BC 위에 있음을 제시 : 8점
- 타원이 점 C를 지날 때 r이 구하는 최솟값임을 제시 : 5점
- 최솟값은 $r=\frac{3+\sqrt{2}}{7}$를 제시 : 6점

□ 예시 답안

[논제 1] 아래 그림에서 P_r가 점 $\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$이려면, $\frac{r}{1-r}=4m+\frac{8}{3}$ $(m=0,1,2,\cdots)$이므로 구하는 집합 T는 다음과 같다.

$$T=\left\{\frac{12m+8}{12m+11}\ \middle|\ m=0,1,2,\cdots\right\}$$



[논제 2] 먼저 구간 $\left(0,\ \frac{4}{5}\right]$에서 $f(r)$를 구하면 다음과 같다.

$$f(r)=\begin{cases}\frac{r}{1-r}, & 0<r<\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}\le r\le\frac{2}{3}\\ 3-\frac{r}{1-r}, & \frac{2}{3}<r<\frac{3}{4}\\ 0, & \frac{3}{4}\le r\le\frac{4}{5}\end{cases}$$

같은 방법으로, 구간 $\left(\frac{4m+4}{4m+5},\ \frac{4(m+1)+4}{4(m+1)+5}\right]$ $(m=0,1,2,\cdots)$에서 $f(r)$을 구하면 다음과 같다.

$$f(r)=\begin{cases}\frac{r}{1-r}-4(m+1), & \frac{4m+4}{4m+5}<r<\frac{4m+5}{4m+6}\\ 1, & \frac{4m+5}{4m+6}\le r\le\frac{4m+6}{4m+7}\\ 4(m+1)+3-\frac{r}{1-r}, & \frac{4m+6}{4m+7}<r<\frac{4m+7}{4m+8}\\ 0, & \frac{4m+7}{4m+8}\le r\le\frac{4m+8}{4m+9}\end{cases}$$

이다. 함수 $f(r)$는 유리함수와 상수함수가 만나는 점에서 미분가능하지 않고, 그 r의 값을 차례로 나열하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{4m+1}{4m+2},\ \frac{4m+2}{4m+3},\ \frac{4m+3}{4m+4},\ \frac{4m+4}{4m+5},\cdots$$

그러므로 함수 $f(r)$가 미분가능하지 않은 r의 집합은 다음과 같다.

$$\left\{\frac{n}{n+1}\ \middle|\ n=1,2,3,\cdots\right\}$$

[논제 3] 조건 (ii)로부터

$$\overline{A'P_r}+\overline{AP_r}=\overline{A'P_s}+\overline{AP_s}$$

이므로 P_r와 P_s는 두 점 A, A′을 초점으로 하는 타원

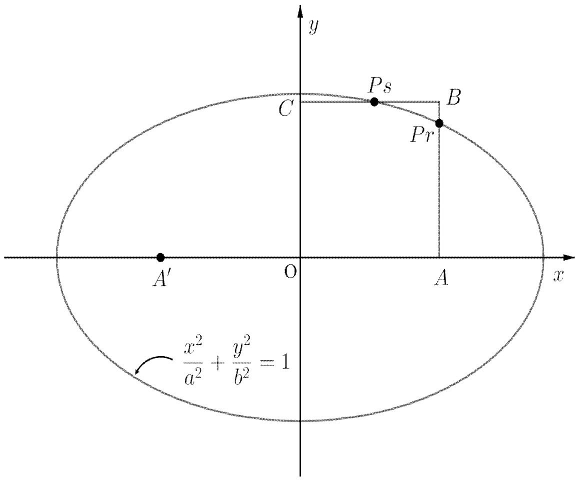
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

위에 있다. 여기서

$$\overline{A'P_r}+\overline{AP_r}=\overline{A'P_s}+\overline{AP_s}=2a,$$

$$b^2=a^2-1$$

이다. 한편, 두 초점이 $(-1,0)$, $(1,0)$이고, 조건 (i)로부터 P_r는 선분 AB 위에 있고, P_s는 선분 BC 위에 있다. 따라서 타원이 점 C를 지날 때 r이 구하는 최솟값이다. 점 C를 지나는 타원의 방정식은



$$\frac{x^2}{2}+y^2=1$$

이고, 점 P_r의 y좌표는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. P_r의 y좌표는 $\frac{r}{1-r}-1$이므로

$$\frac{r}{1-r}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

에서 구하는 최솟값은 $r=\frac{3+\sqrt{2}}{7}$이다.