단국대학교 2018학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제 및 답안 (오전)

단국대학교

전형유형	논술우수자
수험번호	
성　　명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a와 같지 않으면서 a에 한없이 가까워 질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 $x \to a$일 때의 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

함수의 극한을 이용하여 다음과 같이 함수의 연속성, 함수의 미분가능성 등을 정의한다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하며, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$일 때 $f(x)$는 $x=a$에서 연속

(2) 극한값 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이 존재할 때 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능

특히, (2)의 경우 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$로 나타내고, 이를 $x=a$에서 $f(x)$의 미분계수라 한다.

미분계수는 접선의 방정식을 구하는데 유용하다. 즉, 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a) = f'(a)(x-a)$$

(나) 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 정적분의 값을 정의를 이용하여 구하는 것은 쉽지 않지만, 다음 미적분의 기본 정리를 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

[미적분의 기본 정리] 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

[논제 1] 열린 구간 $(-1, \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음을 만족시킬 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. (15점)

$$x\ln(x+1)f(x) = -ax\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+b \ \ (x \neq 0), \ \ f(0) = -1$$

[논제 2] 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(\pi, 0)$에서 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수 $A(x)$를 $A(x) = |\sin x - g(x)|$라 할 때, 실수 전체에서 $A(x)$의 미분가능성을 조사하시오. (15점)

[논제 3] 함수 $h(x)$를

$$h(x) = \frac{a}{3}\sin(bx)+3$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 (a,b)를 모두 구하시오. (15점)

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} h(x)dx = \frac{3}{2}\pi$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (h(x)-3)dx = 1$

(iii) a, b는 자연수이고, $a+b \le 100$

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 수 L에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

특히, 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_n = ar^{n-1}$$

이고, 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 등비급수는 $|r| < 1$일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

(나) 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(-c,0)$, $\mathrm{F}'(c,0)$에서 거리의 합이 $2a$로 일정한 점들의 집합을 타원이라 하고, 이 타원을 방정식으로 나타내면 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>c>0$, $b^2=a^2-c^2)$이다.

좌표평면 위에 원점 O와 세 점 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(1,1)$, $\mathrm{C}(0,1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 실수 $r\,(0<r<1)$과 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{Q}_n(a_n, b_n)$을 다음과 같은 규칙으로 정의하고,

(1) Q_1은 원점이다.

(2) Q_{n+1}은 점 Q_n에서 정사각형 OABC의 변을 따라 시계 반대 방향으로 r^n 만큼 이동한 점이다.

$\lim_{n\to\infty} a_n$을 x좌표, $\lim_{n\to\infty} b_n$을 y좌표로 하는 점을 P_r라 하자. 예를 들면, $r=\frac{3}{5}$이면 $\mathrm{Q}_3\left(\frac{24}{25}, 0\right)$이고, $\mathrm{P}_{\frac{3}{5}}$의 좌표는 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$이다.

[논제 1] 집합 $T=\left\{r \,\middle|\, 0<r<1 \text{ 이고, } \mathrm{P}_r \text{의 좌표가 } \left(\frac{1}{3}, 1\right) \text{이다}\right\}$를 구하시오. (15점)

[논제 2] P_r의 x좌표를 $f(r)$라 할 때, 함수 $f(r)$가 미분가능하지 않은 r의 값을 모두 구하시오. (15점)

[논제 3] 점 $\mathrm{A}'(-1,0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 r의 최솟값을 구하시오. (25점)

(i) r, s는 실수이고, $r<s\le\frac{3}{4}$

(ii) $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}_r}-\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}_s}=\overline{\mathrm{AP}_s}-\overline{\mathrm{AP}_r}$