

단국대학교 2018학년도 모의논술고사

자연계열
문제 및 가이드답안



[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하십시오. (45점)

<제시문>

(가) 현수교 케이블의 모양, 행성과 혜성의 궤도 등과 같이 생활 주변이나 자연 현상에 나타나는 여러 가지 곡선에는 포물선, 타원 등이 있다.

① 좌표평면에서 점 $F(p, 0)$ 와 직선 $x = -p$ 에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 하고, 이 포물선을 방정식으로 나타내면 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$)이다.

② 좌표평면에서 두 점 $F(-c, 0), F'(c, 0)$ 에서 거리의 합이 $2a$ 로 일정한 점들의 집합을 타원이라 하고, 이 타원을 방정식으로 나타내면 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > c > 0, b^2 = a^2 - c^2$)이다.

③ 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 기울기가 k 인 직선의 방정식은 $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$ 이다.

(나) 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 합성함수 $g \circ f(x)$ 의 증가와 감소에 대한 다음 성질을 갖는다.

- $g(x)$ 가 증가함수일 때, $f(x)$ 가 증가하면 $g \circ f(x)$ 는 증가하고 $f(x)$ 가 감소하면 $g \circ f(x)$ 도 감소한다.
- $g(x)$ 가 감소함수일 때, $f(x)$ 가 증가하면 $g \circ f(x)$ 는 감소하고 $f(x)$ 가 감소하면 $g \circ f(x)$ 는 증가한다.

(다) 좌표평면에서 곡선 위의 점을 매개변수로 나타내면 편리하다. 매개변수 방정식

$$x = a \cos t, y = b \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

는 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 를 매개변수 t 를 사용하여 나타낸 것이다.

[문제 1] 좌표평면 위를 움직이는 점 P와 점 Q의 시각 t에서의 위치를 각각

$$(\sqrt{2} \cos t, \sin t), (\sqrt{2} \cos 2t, \sin 2t)$$

라 하자. $t(0 < t < \pi)$ 에서 두 점 P와 Q사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, 함수 $f(t)$ 가 극댓값을 갖게 하는 t의 값을 구하십시오. (15점)

[문제 2] 좌표평면에서 포물선 $8(x + 2) = y^2$ 의 초점을 F라 하자. 초점 F와 이 포물선 위의 점 $C(x, y)$ ($-2 < x < 0$)를 지나는 직선 ℓ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 D의 집합을 A라 하자.

D는 중심이 $C(x, y)$ 이고 y축에 접하는 원과 ℓ 의 교점 중 원점으로부터 먼 거리에 있는 2사분면의 점이다.

원점 O와 점 B(-4, 0)에 대하여 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DO} = 8$ 을 만족시키는 집합 A의 원소 D의 좌표를 구하십시오. (15점)

[문제 3] 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점 D에서 타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 일 때, 점 D의 좌표를 구하십시오. (단, 점 D는 2사분면에 있다) (15점)

[문제2] 다음 <제시문>을 읽고 질문에 답하십시오. (55점)

<제시문>

(가) 별의 밝기, 소리의 크기, 지진의 규모 등과 같은 자연 현상을 해석할 때 로그를 사용하면 편리하다. 일반적으로 $a > 0, a \neq 1$ 일 때, 양수 x 에 대하여 $a^y = x$ 을 만족시키는 실수 y 를 $y = \log_a x$ 로 나타내고 a 를 밑으로 하는 x 의 로그라고 한다. 이와 같이 양의 실수 전체의 집합에서 로그함수 $y = \log_a x$ 를 정의할 수 있다. 특히, $a = 10, e$ 인 경우의 로그함수를 각각 $y = \log x, y = \ln x$ 로 나타낸다. 로그함수의 성질

$$\textcircled{1} \log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

$$\textcircled{2} \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

를 이용하면, 함수 $f(x)$ 에 대하여 $G(x) = \ln \left| \frac{f(-x)}{f(x)} \right|$ 라 할 때 다음이 성립한다.

$$\textcircled{3} G(-x) = -G(x)$$

(나) 좌표평면에서 곡선 $y = f(x) (f(x) \geq 0)$ 과 두 직선 $x = a, x = b$ 및 x 축으로 둘러싸인 영역 S 의 넓이를 구분구적법을 사용하여 구할 수 있다. 이 개념을 음수의 항숫값을 갖는 함수까지 일반화한 것이 정적분이다. 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 자연수 n 에 대하여 구간 $[a, b]$ 를 n 등분한 각 분할점의 x 좌표를 차례로 $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ 라 하자. 이때, 극한값

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \frac{b-a}{n}$$

를 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분이라 하고, 이를 $\int_a^b f(x)dx$ 로 나타낸다.

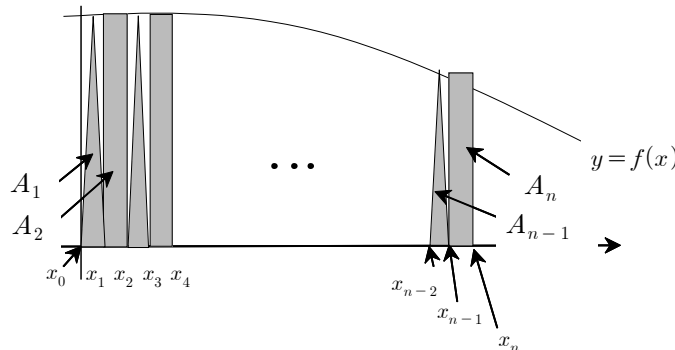
(다) 구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 구간 $[0, 1]$ 을 n 등분한 양 끝점과 분할점을 차례로

$$0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = 1$$

이라 하고, $m_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ 라 하자. $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 를

- i 가 홀수일 때, 세 점 $(x_{i-1}, 0), (x_i, 0), (m_i, f(x_{i-1}))$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형,
- i 가 짝수일 때, 네 점 $(x_{i-1}, 0), (x_i, 0), (x_{i-1}, f(x_{i-2})), (x_i, f(x_{i-2}))$ 를 꼭짓점으로 하는 직사각형

이라 하자. $n (= 2m)$ 이 짝수인 경우일 때 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 는 다음과 같다.



[문제 1] 10개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수를 a_1, a_2, \dots, a_{10} 이라 할 때,

$$\sum_{i=1}^{10} \log a_i$$

의 값이 자연수일 경우의 수를 구하시오. (15점)

[문제 2] <제시문> (다)에서 함수 $f(x) = \cos \sqrt{x}$ 이고 A_i 의 넓이를 b_i 라 할 때,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2m} b_i \text{의 값을 구하시오. (15점)}$$

[문제 3] 다음 조건

(1) $\int_0^1 \sqrt{t} f(x\sqrt{t}) dt = \frac{2}{3} e^{g(x)}$

(2) $\int_0^1 g(x\sqrt{t}) dt = \ln \left| \frac{h(-x)}{h(x)} \right| + x^{f(0)}$

(3) $g(x), h(x)$ 는 이계도함수를 갖고 $g'(3) = 0$ 이다.

를 만족시키는 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$ 에 대하여

$$f(3) + f(-3)$$

의 최솟값을 구하시오. (25점)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[문제 1] 미분법을 활용하여 거리에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[문제 2] 이차곡선의 성질을 활용하여 기하학적 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[문제 3] 삼각함수의 성질을 활용하여 이차곡선의 접선을 구하는 계산능력을 평가

□ 자료출처

- 신항균 외 (2015), 수학 II, 188-207쪽
- 류희찬 외 (2015), 기하와 벡터, 14-21쪽, 41-44쪽
- 신항균 외 (2015), 미적분 I, 118-124쪽
- 김창동 외 (2015), 미적분 II, 83-89쪽

[문제 1 평가기준]

- $f(t)$ 또는 $f(t)^2$ 을 제시 : 5점
- $t = \frac{\pi}{2}$ 임을 제시 : 10점

[문제 2 평가기준]

- A 가 원의 일부임을 제시: 8점
- $D(-2, 2\sqrt{3})$ 을 제시: 7점

[문제 3 평가기준]

- 근과 계수의 관계: $k_1 + k_2 = \frac{2ab}{a^2 - 2}$, $k_1 k_2 = \frac{b^2 - 1}{a^2 - 2}$ 를 제시: 5점
- $\tan(\alpha - \beta)$ 의 공식으로부터 $\left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = 1$ 임을 제시: 5점
- $D(-\sqrt{7}, \sqrt{2})$ 를 제시: 5점

□ 예시 답안

[문제1] 두 점 사이의 거리 \overline{PQ} 는 \overline{PQ}^2 과 같은 증가 감소의 경향을 보이므로 \overline{PQ}^2 의 극댓값을 찾는다.

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= (\sqrt{2} \cos t - \sqrt{2} \cos 2t)^2 + (\sin t - \sin 2t)^2 \\ &= (\cos^2 t + \cos^2 2t) - 2(2 \cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t) + 2 \end{aligned}$$

이고, $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, $\sin 2t = 2\sin t \cos t$ 를 대입하면,

$$\overline{PQ}^2 = \{ \cos^2 t + (2\cos^2 t - 1)^2 \} - 2\{ 2\cos t(2\cos^2 t - 1) + \sin t(2\sin t \cos t) \} + 2$$

이다. $u = \cos t$ 로 치환하면 $0 < t < \pi$ 로부터 $-1 < u < 1$ 이고,

$$\overline{PQ}^2 = 4u^4 - 4u^3 - 3u^2 + 3$$

을 얻는다. 따라서 $F(u) = 4u^4 - 4u^3 - 3u^2 + 3$ 라 하면

$$\frac{d}{du}F(u) = 16u^3 - 12u^2 - 6u = 0$$

이려면 $u = 0$ 또는 $u = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{8}$ 이어야 한다. $-1 < u < 1$ 이므로 $u = \cos t = 0, \frac{3 - \sqrt{33}}{8}$ 을 얻는다.

$\cos t_0 = \frac{3 - \sqrt{33}}{8}$, ($0 < t_0 < \pi$)이라 하면 함수 $y = \cos t$ 는 구간 $(0, \pi)$ 에서 감소함수이고 삼차함수 $F(u)$ 의 증감은 다음과 같다.

u	-1		$\frac{3 - \sqrt{33}}{8}$		0		1
$F(u)$		↘		↗		↘	

따라서 <제시문> (나)에 의하여 함수 $f(t)^2 = F(\cos t)$ 의 증감은 다음과 같다.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		t_0		π
$F(\cos t)$		↗		↘		↗	

그러므로 $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때 함수 $f(t)$ 는 극대이다. 답: $t = \frac{\pi}{2}$

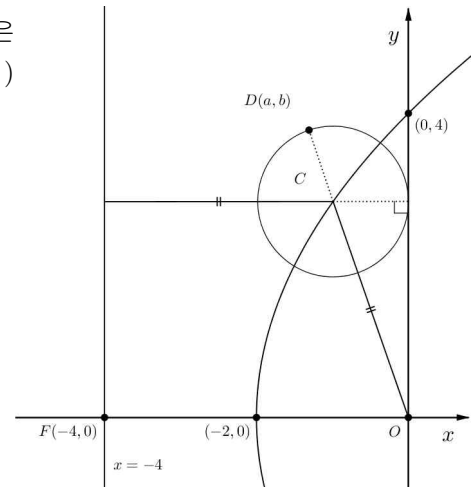
[문제2] 주어진 포물선 $8(x + 2) = y^2$ 의 초점은 원점 O 이고 준선은 $x = -4$ 이다. 따라서 포물선의 정의에 의하여, 원점 O 와 점 $D(a, b)$ 사이의 거리 d 는

$$\begin{aligned} d &= \overline{OC} + (\text{원의 반지름의 길이}) \\ &= (\text{C에서 직선 } x = -4 \text{까지의 거리}) + (\text{원의 반지름의 길이}) \\ &= (\text{C에서 직선 } x = -4 \text{까지의 거리}) + (\text{C에서 직선 } x = 0 \text{까지의 거리}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

이므로 A 에 속하는 $D(a, b)$ 는

$$a^2 + b^2 = 16, \quad (-4 < a < 0, \quad 0 < b < 4)$$

를 만족시킨다.



또한 $\overrightarrow{DB} = (-4-a, -b)$, $\overrightarrow{DO} = (-a, -b)$ 이므로

$$8 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DO} = a(a+4) + b^2$$

을 만족시키려면 $a = -2$, $b^2 = 12$ 이어야 한다. 그러므로 구하는 2사분면의 점 D의 좌표는 $(-2, 2\sqrt{3})$ 이다. 답: D $(-2, 2\sqrt{3})$

[문제3] 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점 $D(a, b)$ 를 지나고 타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 에 접하는 직선의 기울기를 k 라 하자. <제시문> (가)에 의해서 직선의 방정식은 $y = kx \pm \sqrt{2k^2 + 1}$ 이므로

$$b = ka \pm \sqrt{2k^2 + 1}$$

에서

$$(a^2 - 2)k^2 - 2abk + b^2 - 1 = 0$$

이다. 이 방정식의 두 해를 k_1, k_2 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터

$$k_1 + k_2 = \frac{2ab}{a^2 - 2}, \quad k_1 k_2 = \frac{b^2 - 1}{a^2 - 2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 한편, 기울기가 k_1 인 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 α , 기울기가 k_2 인 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 β 라 하면, $k_1 = \tan \alpha$ 이고 $k_2 = \tan \beta$ 이다. 두 직선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$1 = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이다. 식 ①을 ②에 대입하면 $a^2 + b^2 = 9$ 이므로 $b^2 = 2$ 이다. 점 (a, b) 는 제2사분면 위에 있으므로, $b = \sqrt{2}$, $a = -\sqrt{7}$ 이다. 답: D $(-\sqrt{7}, \sqrt{2})$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[문제 1] 로그의 성질을 이해하고 확률의 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[문제 2] 정적분법의 개념을 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[문제 3] 치환적분을 이용하여 정적분으로 정의된 함수에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

- 김원경 외 (2015), 확률과 통계, 28-35쪽
- 조도현 외 (2015), 수학 II, 200-219쪽
- 이강섭 외 (2015), 미적분 I, 156-175쪽
- 정상권 외 (2015), 미적분 II, 39-42, 168-174쪽

[문제 1 평가기준]

- 자연수가 되기 위해서는 a_i 가 1, 2, 4 또는 5이어야 함을 제시 : 5점
- $s + 2t = k$, $s + t \leq 10 - k$ 임을 제시: 5점
- 경우의 수 13을 제시 : 5점

[문제 2 평가기준]

- $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2m} b_i = \frac{3}{4} \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$ 임을 제시: 8점
- $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2m} b_i = \frac{3}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$ 을 제시: 7점

[문제 3 평가기준]

- (1)의 식에서 $t\sqrt{x}$ 를 치환하여 $f(x)$ 를 제시: 5점
- (2)의 식에서 $t\sqrt{x}$ 를 치환하여 $g(x)$ 를 제시: 5점
- $g(x) = -g(-x)$ 임을 제시 : 10점
- $f(3) + f(-3)$ 의 최솟값이 2임을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[문제1] $\sum_{i=1}^{10} \log a_i = k$ (k 는 자연수)라 하자. 로그의 성질에 의하여

$$\sum_{i=1}^{10} \log a_i = \log a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10}$$

이므로

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10} = 2^k \cdot 5^k \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 따라서 ①의 식이 성립하기 위해서 a_i 는 1, 2, 4 또는 5이다.

a_i 가 2인 a_i 의 개수를 s , a_i 가 4인 a_i 의 개수를 t , a_i 가 5인 a_i 의 개수를 k 라 하면

$$2^s \cdot 4^t \cdot 5^k = 2^k \cdot 5^k$$

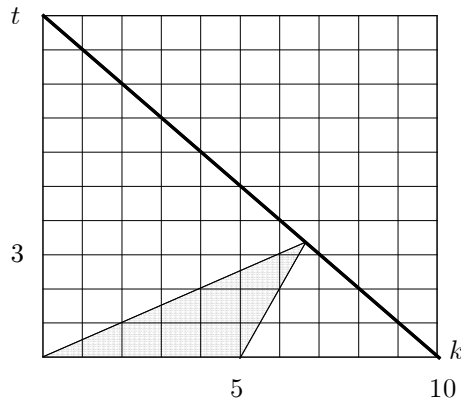
이므로

$$s + 2t = k, \quad s + t \leq 10 - k,$$

이다. $s \geq 0, t \geq 0, k \geq 0$ 이므로 s 를 소거한 부등식

$$t \geq 0, k \geq 0, k - 2t \geq 0, 10 - k - t \geq 0, t \geq 2k - 10$$

을 만족시키는 영역을 $k-t$ 평면에 나타내면 아래의 색칠한 부분이다.



따라서 조건을 만족시키는 (k, t) 의 개수는 13이고, $s + 2t = k$ 이므로 s 는 각 (k, t) 에 의하여 유일하게 결정된다. 구하는 경우의 수는 13이다. 답: 13

[문제2] 그림 (B)의 색칠한 부분의 넓이는 (A)의 색칠한 부분의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 이다. 따라서 네 점

$$(x_{k-1}, 0), (x_k, 0), (x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_{k-1}))$$

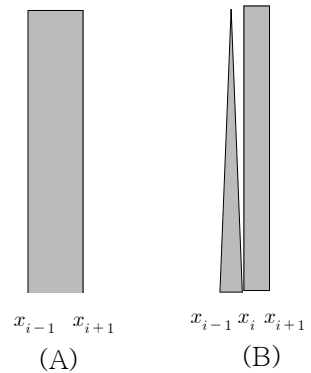
을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이를 c_k 라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k = \int_0^1 f(x) dx$$

이므로

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2m} b_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{3}{4} c_k = \frac{3}{4} \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$$

이다.



한편, $\sqrt{x} = y$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos \sqrt{x} \, dx &= \int_0^1 2y \cos y \, dy \\ &= \left[2y \sin y \right]_0^1 - \int_0^1 2 \sin y \, dy = 2 \sin 1 + 2(\cos 1 - 1) \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2m} b_i = \frac{3}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$ 이다. 답: $\frac{3}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$

[문제3] (1)의 식에서 $x\sqrt{t} = s$ 로 치환하면 $\sqrt{t} = \frac{s}{x}$, $\frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{x} ds$ 이므로

$$\int_0^1 \sqrt{t} f(x\sqrt{t}) dt = \int_0^x \frac{s}{x} f(s) \frac{2s}{x^2} ds = \frac{2}{3} e^{g(x)}$$

이고 정리하면

$$\int_0^x s^2 f(s) ds = \frac{x^3}{3} e^{g(x)}$$

이다. 양변을 x 에 관하여 미분하여 정리하면

$$f(x) = e^{g(x)} + \frac{x}{3} e^{g(x)} g'(x)$$

이다. 함수 $f(x)$ 에 $x = 3$ 을 대입하면 다음과 같다.

$$f(3) + f(-3) = [e^{g(3)} + e^{g(-3)}] + [e^{g(3)} g'(3) - e^{g(-3)} g'(-3)] \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$H(x) = \ln \left| \frac{h(-x)}{h(x)} \right|$ 라 하고, (2)로부터 위와 같은 치환적분법을 사용하면

$$\int_0^x s g(s) ds = \frac{x^2}{2} H(x) + \frac{1}{2} x^{2+f(0)}$$

이다. 양변을 x 에 관하여 미분하여 정리하면

$$g(x) = H(x) + \frac{x}{2} H'(x) + \frac{2+f(0)}{2} x^{f(0)}$$

이다. (1)의 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$\int_0^1 \sqrt{t} f(0) dt = f(0) \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} e^{g(0)}$$

에서 $f(0) = e^{g(0)}$ 이므로 $f(0) \neq 0$ 이다. 또한 (2)의 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$\int_0^1 g(0) dt = g(0) \int_0^1 dt = 0$$

이므로 $g(0) = 0$ 이고 $f(0) = 1$ 이다. 따라서

$$g(x) = H(x) + \frac{x}{2} H'(x) + \frac{3}{2} x \text{ 이고 } g(-x) = H(-x) - \frac{x}{2} H'(-x) - \frac{3}{2} x$$

이다. 한편

$$H(-x) = \ln \left| \frac{h(x)}{h(-x)} \right| = \ln \left| \frac{h(-x)}{h(x)} \right|^{-1} = -\ln \left| \frac{h(-x)}{h(x)} \right| = -H(x)$$

이고, 합성함수의 미분법에 의하여

$$H'(-x) = H'(x)$$

이다. 그러므로

$$g(-x) = -H(x) - \frac{x}{2} H'(x) - \frac{3}{2} x = -g(x)$$

이므로, 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) = -g(-x)$$

이고, 또한 모든 실수 x 에 대하여

$$g'(x) = g'(-x)$$

이므로 $g'(3) = g'(-3) = 0$ 이다. 식 ①로부터 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(3) + f(-3) = e^{g(3)} + e^{-g(3)} \geq 2\sqrt{e^{g(3)} \frac{1}{e^{g(3)}}} = 2$$

이므로 구하는 최솟값은 2이다. 답: 2

[참고] $f(x) = 1$, $g(x) = 0$, $h(x) = e^{\frac{x}{2}}$ 은 조건 (1), (2), (3)을 만족시킨다.