

[문제 1]

[문제 1]

조건 ②에 따라, $\vec{AA}_2 = \frac{1}{5}(2\vec{OB}_1 + 2\vec{OC}_1) - \vec{OA}_1$, $\vec{BB}_2 = \frac{1}{5}(2\vec{OC}_1 - 2\vec{OA}_1) - \vec{OB}_1$.

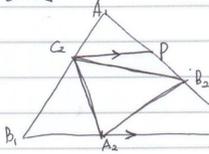
또한 $\vec{A_1B_1} = \vec{OB_1} - \vec{OA_1}$, $\vec{A_1C_1} = \vec{OC_1} - \vec{OA_1}$ 이므로,

$$\vec{AA_2} + \vec{BB_2} = -\frac{3}{5}\vec{OA_1} - \frac{3}{5}\vec{OB_1} + \vec{OC_1}, \quad a\vec{A_1B_1} + b\vec{A_1C_1} = -(a+b)\vec{OA_1} + a\vec{OB_1} + b\vec{OC_1}$$

$\vec{AA_2} + \vec{BB_2} = \vec{A_1B_1} + \vec{A_1C_1}$ 이어야 하므로 $a = -\frac{3}{5}$, $b = 1$ 이다.

$\therefore a = -\frac{3}{5}, b = 1$

[문제 2]



삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이를 살피면, 점 C_1 에서 B_1C_1 에 평행하게 그른 직선이 A_1C_1 과 만나는 점을

P 라고 하면 $A_1P : A_1C_1 = A_1C_2 : A_1B_1 = 2 : 5$ 이다. 따라서 삼각형 A_1C_1P 의 넓이는

$$625 \times \frac{4}{25} = 100 \text{이다.}$$

이와 마찬가지로 A_1C_1P 와 $A_1C_2B_2$ 는

높이가 동일하고 밑변의 길이의 비가 $2 : 3$ 이므로 삼각형 $A_1C_2B_2$ 의 넓이는 $100 \times \frac{9}{4} = 225$ 이다.

이와 마찬가지로 $A_1B_1C_1$ 의 넓이 $U = 625 = 625 \times \frac{4}{25} \times \frac{3}{2} = 75 \times 25 = 75 \times 25 = 75 \times 25 = 75 \times 25$ 이다.

$$(\text{삼각형 } A_1B_2C_2 \text{의 넓이}) = 625 - 625 \times \frac{4}{25} \times \frac{3}{2} = 625 - 625 \times \frac{6}{25} = 625 \times \frac{19}{25} \text{이다.}$$

삼각형 $A_1B_1C_1, A_1B_2C_2, A_1B_3C_3, \dots$ 에서 같은 비율로 넓이가 감소한다. 따라서 (삼각형 $A_1B_2C_2$ 의 넓이) $= 625 \times \frac{19}{25} = 475$ 이다.

$\therefore 475$

[문제 3]

삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 무게중심을 G_1 , 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 무게중심을 G_2, \dots 라고 할 때,

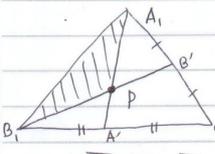
$$\vec{OG_1} = \frac{1}{3}\vec{OA_1} + \frac{1}{3}\vec{OB_1} + \frac{1}{3}\vec{OC_1} \text{ 이다.}$$

$$\vec{OG_2} = \frac{1}{3}\vec{OA_2} + \frac{1}{3}\vec{OB_2} + \frac{1}{3}\vec{OC_2} = \frac{1}{3}(\frac{2}{5}\vec{OA_1} + \frac{2}{5}\vec{OC_1}) + \frac{1}{3}(\frac{2}{5}\vec{OB_1} + \frac{2}{5}\vec{OC_1}) + \frac{1}{3}(\frac{2}{5}\vec{OA_1} + \frac{2}{5}\vec{OB_1}) = \frac{1}{3}\vec{OA_1} + \frac{1}{3}\vec{OB_1} + \frac{1}{3}\vec{OC_1} = \vec{OG_1}$$

즉 $G_1 = G_2 = \dots = G_n$ 이다. (단, $n = 1, 2, 3, \dots$) 그런데 삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 넓이는 [문제 2]에서 구한 결과와 같이 점점

작아져 오기 수렴하므로 모든 $A_nB_nC_n$ 이 공유하는 한 점인 G_n 으로 수렴한다. 즉, $P = G_n$ 이 수렴한 점 $A_nB_nC_n$ 이 수렴한 점 $A_nB_nC_n$ 이 수렴한다.

그런데 A_1P, B_1P, C_1P 의 길이가 모두 0으로 수렴하므로 A_n, B_n, C_n 은 모두 점 P 로 수렴한다. 즉, $P = G_n$, $\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{OA_1} + \frac{1}{3}\vec{OB_1} + \frac{1}{3}\vec{OC_1}$ 이다.



A_1C_1 의 중점과 B_1C_1 의 중점을 각각 B', A' 이라고 하면, $\vec{OA'} = \frac{1}{2}\vec{OB_1} + \frac{1}{2}\vec{OC_1}$, $\vec{OB'} = \frac{1}{2}\vec{OA_1} + \frac{1}{2}\vec{OC_1}$ 이다.

$$\vec{OA'} = \frac{1}{2}\vec{OB_1} + \frac{1}{2}\vec{OC_1}, \quad \vec{OB'} = \frac{1}{2}\vec{OA_1} + \frac{1}{2}\vec{OC_1}$$

$$\vec{B_1P} = a\vec{B_1A'} + b\vec{B_1B'}, \quad \vec{A_1P} = b\vec{A_1A'} + a\vec{A_1B'}$$

$$\vec{B_1P} = \frac{1}{2}a\vec{OA_1} - \frac{1}{2}a\vec{OB_1} + \frac{1}{2}a\vec{OC_1}, \quad \vec{A_1P} = -\frac{1}{2}b\vec{OA_1} + \frac{1}{2}b\vec{OB_1} + \frac{1}{2}b\vec{OC_1}$$

따라서 $A_1P : PA' = B_1P : PB' = 2 : 1$ 이다. 또한 $\vec{BA'} = \vec{A'B'}$ 이므로 A' 은 B_1C_1 의 중점이다.

$$\therefore (\text{삼각형 } PA_1B_1 \text{의 넓이}) = 625 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 625 \times \frac{1}{3} \text{이다.}$$

$\therefore \frac{625}{3}$

문제	등급	평가
문제1	A	모든 과정에서 논리적인 방법으로 바른 답안을 도출하였음.

[문제 1]

[문제] $\vec{A_1A_2} = \frac{3}{5}\vec{A_1B_1} + \frac{2}{5}\vec{A_1C_1}$, $\vec{B_1B_2} = \frac{3}{5}\vec{B_1C_1} + \frac{2}{5}\vec{B_1A_1}$, $(\vec{B_1C_1} = \vec{A_1C_1} - \vec{A_1B_1})$

$$\begin{aligned} \vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} &= \frac{3}{5}\vec{A_1B_1} + \frac{2}{5}\vec{A_1C_1} + \frac{3}{5}\vec{B_1C_1} + \frac{2}{5}\vec{B_1A_1} \\ &= \left(\frac{1}{5}\vec{A_1B_1} + \frac{2}{5}\vec{A_1C_1} + \frac{3}{5}(\vec{A_1C_1} - \vec{A_1B_1})\right) \\ &= -\frac{2}{5}\vec{A_1B_1} + \vec{A_1C_1} \end{aligned} \quad \therefore a = -\frac{2}{5}, b = 1$$

[문제2] $\triangle A_1B_1C_1 = 625$, $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ 은 모두 삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 일정한 내분점들이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$ 과 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 넓이와 삼각형 $A_2B_2C_2$ 와 삼각형 $A_3B_3C_3$ 의 넓이와는 일정하다.

$\triangle A_2B_2C_2$ 의 넓이 = $625 - \text{삼각형 } A_1C_2B_2 - \text{삼각형 } B_1A_2C_2 - \text{삼각형 } A_2C_1B_2$ 이다.

$$\triangle A_1C_2B_2 = \frac{2}{5} \cdot \triangle A_1B_1C_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \times 625 = \frac{6}{25} \times 625 = 150$$

$$\triangle B_1A_2C_2 = \frac{2}{5} \cdot \triangle B_1C_1C_2 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \cdot \triangle A_1B_1C_1 = \frac{6}{25} \times 625 = 150$$

$$\triangle A_2C_1B_2 = \frac{3}{5} \cdot \triangle B_1B_2C_1 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \cdot \triangle A_1B_1C_1 = \frac{6}{25} \times 625 = 150$$

\therefore 삼각형 $A_2B_2C_2 = 175$

이 넓이는 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 $\frac{2}{5}$ 배한 값이므로 크리시 $\frac{1}{5}$ 배를 하면 $\triangle A_3B_3C_3$ 의 넓이 = $\frac{2}{5} \times 175 = 70$ 를 구할수 있다.

$\therefore A_3B_3C_3$ 의 넓이 = 70

[문제3] 조건 ㉠의 3개의 식을 모두 더하면 $\vec{OA_{n+1}} + \vec{OB_{n+1}} + \vec{OC_{n+1}} = \vec{OA_n} + \vec{OB_n} + \vec{OC_n}$ 이라는 식이 나온다.

반대하면 $\vec{A_nP} + \vec{B_nP} + \vec{C_nP} = \vec{A_nP} + \vec{B_nP} + \vec{C_nP}$ 이다. ... ㉡

$n \rightarrow \infty$ 일때, 선분의 길이 $\vec{A_nP}, \vec{B_nP}, \vec{C_nP}$ 가 0으로 수렴하므로 $n \rightarrow \infty$ 일때 $\vec{A_nP} + \vec{B_nP} + \vec{C_nP} = 0$ 이다.

그러므로 ㉡ 식에 따라 $\vec{A_nP} + \vec{B_nP} + \vec{C_nP} = 0$ 일것 알수있다.

$$\vec{A_nP} = \vec{PB_n} + \vec{PC_n}$$

$$\vec{A_nP} = \frac{1}{2}(\vec{PB_n} + \vec{PC_n}) \quad (\text{중선의 성질})$$

즉 $\vec{A_nP}$ 과 직선 $\vec{B_nC_n}$ 가 만나는점은 중점인 H가 된다.

$\vec{A_nP} = 2 \cdot \vec{PH}$ 이므로 점 P는 선분 AH를 2:1로 나눈다는 것이다.

$$\text{삼각형 } PA_1B_1 = \frac{2}{3} \cdot \triangle A_1B_1H = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \triangle A_1B_1C_1 = \frac{1}{9} \cdot 625$$

$$\therefore \frac{625}{9}$$

(1/2)

이 답안지는 모의 논술 답안지입니다. 실제 논술 답안지와 다릅니다.

문제	등급	평가
문제1	A	1번 문항은 위치벡터의 개념을 이용하여 주어진 문제를 해결하였음. 2번 문항은 n에 따른 삼각형의 넓이의 관계를 유도하여 주어진 문제를 해결하였음. 3번 문항은 무게중심의 식을 유도하고 그 성질을 이용하여 주어진 문제를 해결하였음.

[문제 2]

문제 1) 제시문이 의미하며 $\frac{d}{dx} H(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ 이므로 증감표를 그려보면.

x	...	1	...	5	...
$\frac{d}{dx} H(x)$	-	0	+	0	-
모형	↘	극소	↗	극대	↘

$x=1$ 일때 극소값을 가지고
 $x=5$ 일때 극대값을 가진다.
 따라서 $b=5$ 이다.

$H(1) = 0$ 이므로 제시문에서 하미 함수 $f(x)$ 의 부정적분을 $F(x)$ 라 하면.

$H(x) = F(g(x)) - F(a)$ 이다

$H(1) = F(g(1)) - F(a) = 0$

$F(2) - F(a) = 0$ 이므로 $a=2$ 이다.

문제 2) $A(x) = \int_0^1 |e^t - x| dt$ 인데 x 값에 따라 정답값 안의 부호가 변하므로 범위를 나눠서

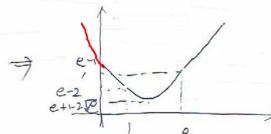
1) $x < 1$ 일때 $A(x) = \int_0^1 (e^t - x) dt = [e^t - xt]_0^1 = e - x - 1$

2) $1 \leq x < e$ 일때 $A(x) = \int_0^x (x - e^t) dt + \int_x^1 (e^t - x) dt = [xt - e^t]_0^x + [e^t - xt]_x^1 = x \ln x - x + 1 + e - x + x \ln x = 2x \ln x - 2x + 1 + e$

3) $e \leq x$ 일때 $A(x) = \int_0^1 (x - e^t) dt = [xt - e^t]_0^1 = x - e + 1$

$\therefore A(x) = \begin{cases} x - e + 1 & (x < 1) \\ 2x \ln x - 2x + 1 + e & (1 \leq x < e) \\ x - e + 1 & (e \leq x) \end{cases}$ $A'(x) = \begin{cases} 1 & (x < 1) \\ 2 \ln x - 2 & (1 \leq x < e) \\ 1 & (e \leq x) \end{cases}$ 극소점 $x=2$

x	1	...	e^2	...	e
$A'(x)$	-		0		+
$A(x)$	$e-2$...	$e+1-2\sqrt{e}$...	1



이므로 $A(x)$ 의 최솟값은 $e+1-2\sqrt{e}$ 이다

문제 3)

$x-t$ 를 m 로 치환하면 $m = x-t \Rightarrow t = x-m$
 $dm = -dt$
 $\therefore F(x) = \int_0^x \frac{e^{x-t}}{f(x-t)} dt = \int_x^0 \frac{e^{x+m}}{f(m)} (-dm) = \int_0^x \frac{e^{x-m}}{f(m)} dm = e^x \int_0^x \frac{1}{f(m)e^m} dm$

$F(1) = e^2 \int_0^1 \frac{1}{f(m)e^m} dm = -2$
 $F'(x) = 2e^{2x} \int_0^x \frac{1}{f(m)e^m} dm + e^{2x} \times \frac{1}{f(x)e^x}$
 $= 2e^{2x} \int_0^x \frac{1}{f(m)e^m} dm + \frac{e^x}{f(x)}$
 $F'(1) = 2e^2 \int_0^1 \frac{1}{f(m)e^m} dm + \frac{e}{f(1)}$
 $= 2 \times (-2) + \frac{e}{f(1)}$
 $= -4 + \frac{e}{f(1)} = 0 \therefore f(1) = \frac{e}{4}$

(2/2) 이 답안지는 모의 논술 답안지입니다. 실제 논술 답안지와 다릅니다.

문제	등급	평가
문제2	A	모든 문제의 풀이에 있어서 논리적인 답안임.

[문제 2]

1. 미분가능한 함수 $f(x) : (0, 6) \rightarrow [0, 5]$ 에 대하여 함수 $H(x) = \int_a^{f(x)} f(t) dt$ 는 구간 $(0, 6)$ 에서
 미분가능하고 $\frac{d}{dx} H(x) = f(f(x)) \cdot f'(x)$ 라 할 수 있다.
 $\frac{d}{dx} H(x) = 0$ 이거나 $f(f(x)) = 0$ 이거나 $f'(x) = 0$ 이므로 $x=1$ 이거나 $x=5$.
 $\frac{d}{dx} H(x) = f(f(x)) \cdot f'(x) = f'(x) \cdot f(x)$
 $\frac{d}{dx} H(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$ ($\because f'(x) = 0, f(x) = f(x) > 0, f'(x)$ 은 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 $x=5$ 이므로
 $f'(x) > 0$ 이다. $\frac{d}{dx} H(x) > 0$ 이므로 함수 $H(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소값을 갖는다.
 $\frac{d}{dx} H(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x) = 2f'(x) \cdot f(x) = f'(x) \cdot f(x)^2$ ($\because f(x) = 0, f'(x)$ 은 함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 감소하므로
 $f'(x) < 0, f(x) > 0$ 이므로 $\frac{d}{dx} H(x) < 0$ 이다. 따라서 함수 $H(x)$ 는 $x=5$ 에서 극대값을 갖는다.
 따라서 $a=5$ 라 할 수 있다

① $H(x) = \int_a^2 f(t) dt = 0$ 이거나 $0 \leq x \leq 2$ 이거나 $f(x) > 0$ 이므로 $a=2$ 이다. $a=2, b=5$.

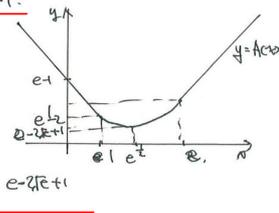
2. $e^x - x = u$ 라 하자 $e^x = \frac{du}{dx}$ 이라 $e^x = \frac{1}{\ln u}$ 이다 $\frac{dx}{du} = \frac{1}{\ln u}$ 이다 $\frac{dx}{du} = \frac{1}{\ln u}$ 이다 $u = 1-x, x=1$ 이거나 $u = e-x$.

$A(x) = \int_0^1 |e^x - x| dx = \int_0^1 (e^x - x) dx = [e^x - \frac{x^2}{2}]_0^1 = e - \frac{1}{2}$
 첫째, $x \geq e$ 이거나 $\int_{1-x}^{e-x} \frac{-u+x}{x+u} du = [-u + x \ln(x+u)]_{1-x}^{e-x} = x+1-e$.

둘째, $1 < x < e$ 이거나 $\int_{1-x}^{e-x} \frac{u+x-x}{x+u} du + \int_{e-x}^1 \frac{-u+x}{x+u} du = [u - x \ln(u+x)]_0^{e-x} + [-u + x \ln(u+x)]_{e-x}^1$
 $= 2x \ln x - 3x + e + 1$ ($e \leq x < e$)

$h(x) = 2x \ln x - 3x + e + 1$ 라 하자
 $h'(x) = 2 \ln x - 1, h'(e^{\frac{1}{2}}) = 0$
 $h''(x) = \frac{2}{x}, h''(e^{\frac{1}{2}}) > 0$

$\frac{dx}{du}$	$\frac{1}{\ln u}$	$\frac{1}{\ln e}$	$\frac{1}{\ln 1}$
$\frac{du}{dx}$	$\ln u$	$\ln e$	$\ln 1$
$\frac{d^2x}{du^2}$	$-\frac{1}{u \ln^2 u}$	$-\frac{1}{e \ln^2 e}$	$-\frac{1}{1 \ln^2 1}$



셋째, $x < 1$
 $\int_{1-x}^{e-x} \frac{u+x-x}{x+u} du = [u - x \ln(x+u)]_{1-x}^{e-x} = -x + e - 1$
 극소값 $e - 2e^{1/2} + 1$

3. $x - \ln x = u$ 라 하자 $-1 = \frac{du}{dx}, \frac{dx}{du} = -1$ 이거나 $u = x, \frac{dx}{du} = 1$ 이거나 $u = 0$.
 $F(x) = \int_0^x \frac{e^{2x-u}}{f(u)} du = e^{2x} \int_0^x \frac{e^{-u}}{f(u)} du \Rightarrow F'(x) = 2e^{2x} \int_0^x \frac{e^{-u}}{f(u)} du + e^{2x} \frac{e^{-x}}{f(x)}$
 $\hookrightarrow F(1) = -2 = \int_0^1 \frac{e^{-u}}{f(u)} du \quad F'(1) = 2 \int_0^1 \frac{e^{-u}}{f(u)} du + \frac{e^{-1}}{f(1)} = -4 + \frac{e}{f(1)} = 0$
 $\therefore f(1) = \frac{e}{4}$

(2/2)

이 답안지는 모의 논술 답안지입니다. 실제 논술 답안지와 다릅니다.

문제	등급	평가
문제2	A	문제1은 문제에서 주어진 조건을 모두 사용하여 논리적으로 문제를 해결하였음. 문제2는 적분으로 표현된 함수의 그래프를 그리기 위해 그래프를 파악할 수 있는 조건을 모두 사용하여 논리적으로 문제를 해결하였음. 문제3은 치환적분을 정확히 사용하여 문제를 해결하였음.

제 2]

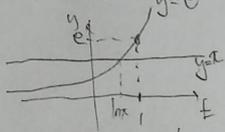
[문제 1] $H(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ 이고, $x = \frac{1}{2}$ 에서 $f(g(x)) = f(\frac{1}{2}) = 0$ 이다.
 $x = \frac{1}{2}$ 를 지날 때 $g(x)$ 는 4-에서 4+로 변한다.
 $\therefore f(g(x))g'(x)$ 는 양에서 음으로 변하므로 $x = \frac{1}{2}$ 에서 $H(x)$ 는 극댓값을 가진다
 $\therefore b = \frac{1}{2}$

또한 $x = 1$ 일 때 $g(x)$ 는 최솟값이므로 $g'(1) = 0$ 이다.
 $x = 1$ 에서 $H(x)$ 는 음에서 양으로 변하므로 $H(x)$ 는 1에서 극솟값을 가진다.
 $\therefore H(1) = \int_a^2 f(t)dt = 0$ 이므로 $a = 2$.

[문제 2] i) $x < 0$. $e^x - x > 0$

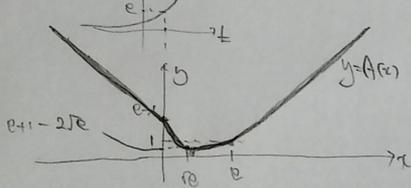
$\therefore H(x) = \int_0^x e^t - x dt = [e^t - xt]_0^x = \underline{-x + e - 1}$

ii) $0 < x < e$



$\therefore H(x) = \int_0^{hx} x \cdot e^t dt + \int_{hx}^x e^t - x dt$
 $= [xt \cdot e^t]_0^{hx} + [e^t - xt]_{hx}^x = \underline{2x \ln x - 2x + e + 1}$

iii) $x \geq e$



$\therefore H(x) = \int_0^x x \cdot e^t dt = \underline{x \cdot e + 1}$

$0 < x < e$, $H(x) = 2x \ln x - 2x + e + 1$
 $H'(x) = 2 \ln x + 2 - 2$
 $\therefore x = \sqrt{e}$ 에서 극솟값 $-2\sqrt{e} + e + 1$
 $H''(x) = \frac{2}{x} \geq 0$ (이차함수 볼록) \checkmark

\therefore 최솟값: $e + 1 - 2\sqrt{e}$

[문제 3]

주어진 방정식에서 $F(x) = -2$, $F'(x) = 0$ 임을 알 수 있다.
 $x = t = k$ 라 하면, $F(x) = \int_0^x \frac{e^{2k}}{F(k)} dk = e^{2x} \int_0^x \frac{1}{F(k)} dk$
 $F'(x) = 2e^{2x} \int_0^x \frac{1}{F(k)} dk + \frac{e^{2x}}{F(x)}$, $F'(x) = 2e^{2x} \int_0^x \frac{1}{F(k)} dk + \frac{e}{F(x)}$
 $F(x) = e^2 \int_0^x \frac{1}{F(k)} dk = -2$ $\therefore \int_0^x \frac{1}{F(k)} dk = -\frac{2}{e^2}$
 $\therefore F(x) = -4 + \frac{e}{F(x)} = 0$ $\therefore F(x) = \frac{e}{4}$

(2/2)

이 답안지는 모의 논술 답안지입니다. 실제 논술 답안지의 다릅니다.

문제	등급	평가
문제2	A	문제1은 주어진 조건을 이용하여 논리적으로 해결하였음. 문제2는 그래프의 개형을 그리기 위한 조건을 정확히 사용하여 문제를 해결하였음. 문제3은 치환적분을 이용하여 문제를 정확히 해결하였음.