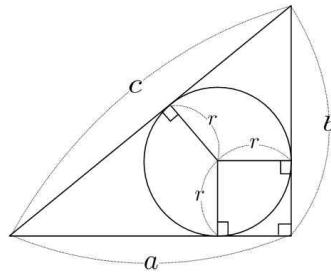


2012학년도 수시2차 논술고사
(자연계열)

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

피타고라스 정리는 직각삼각형에서 세 변의 길이의 관계, 즉 a, b, c 가 직각삼각형의 세 변의 길이일 때, 관계 $a^2 + b^2 = c^2$ 이 성립함을 나타낸 것이다. 피타고라스 정리는 그 내용이 간단하면서도 활용 범위가 넓어서 오래전부터 사람들의 관심사였고 많은 연구가 진행되어 왔다. 예를 들면 1940년 루미스(Elisha S. Loomis)는 피타고라스 정리에 대해 무려 367가지에 달하는 증명 방법을 모아 책으로 발간하는 등 많은 사람들이 다양한 방법으로 피타고라스 정리를 증명하였다.



피타고라스 정리에 대한 연구 중 하나인 피타고라스 삼중쌍은 $a^2 + b^2 = c^2$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 의 집합 $\{a, b, c\}$ 를 의미한다.

피타고라스 삼중쌍 $\{a, b, c\}$ 에 대하여 위의 그림과 같이 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형을 $T(a, b, c)$ 로 나타내자.

[문제 1] 직각삼각형의 세 변의 길이 x, y, z 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 유한 수열 x, y, z 의 공비를 구하시오. (단, x, y, z 는 실수이다.) (10점)

[문제 2] 직각삼각형 $T(a, b, c)$ 의 둘레의 길이와 넓이가 서로 같도록 하는 피타고라스 삼중쌍 $\{a, b, c\}$ 를 모두 구하시오. (10점)

[문제 3] 자연수 n 에 대하여 $T(a_n, b_n, c_n)$ 의 내접원의 반지름이 n 이 되는 피타고라스 삼중쌍을 $\{a_n, b_n, c_n\}$ 라 하자. 수열 $\{c_n\}$ 이

$$c_1 = 5, c_2 = 13, c_3 = 25, c_4 = 41, c_5 = 61, c_6 = 85, \dots$$

일 때, 피타고라스 삼중쌍 $\{a_n, b_n, c_n\}$ 을 구하시오. (10점)

<출제의도>

[문제 1]

등비수열의 의미를 정확하게 이해하는지를 평가

[문제 2]

피타고라스 정리와 주어진 조건을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[문제 3]

수열의 일반항을 이해하고 도형의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

<자료출처>

고등학교 수학 교과서 (중앙교육진흥연구소)

고등학교 수학 교과서 (더텍스트)

<예시답안>

[문제 1] (배점 10점)

직각삼각형의 세 변 x, y, z 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 r 을 공비라고 하면, $y = xr, z = xr^2$ 이다. x, xr, xr^2 는 삼각형의 세변의 길이이므로 $x > 0, xr > 0, xr^2 > 0$ 이다. 따라서 $r > 0$ 이다. $r > 1$ 인 경우는 세변의 길이는 $x < xr < xr^2$ 이고, $0 < r < 1$ 인 경우는 $x > xr > xr^2$ 이다. ($r = 1$ 인 경우는 피타고라스 정리를 만족하지 못한다.)

x, xr, xr^2 은 직각삼각형의 세 변의 길이이므로 피타고라스 정리에 의해 다음 ①, ② 중 하나를 만족한다.

$$x^2 + (xr)^2 = (xr^2)^2 \text{에서 } r^4 - r^2 - 1 = 0 \dots\dots ①$$

$$(xr)^2 + (xr^2)^2 = x^2 \text{에서 } r^4 + r^2 - 1 = 0 \dots\dots ②$$

위의 r 에 관한 방정식 ①, ②에서 $r > 0$ 인 실수 r 의 해를 구하면

$$①\text{에서 } r = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}, \quad ②\text{에서 } r = \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{2} \text{이다.}$$

[문제 2] (배점 10점)

직각삼각형 $T(a, b, c)$ 의 넓이와 둘레의 길이가 같으므로

$$a + b + c = \frac{1}{2}ab \dots\dots ①$$

이고, 피타고라스 정리에 의해

$$a^2 + b^2 = c^2 \dots\dots ②$$

이다. ①로부터 얻은 $c = \frac{1}{2}ab - a - b$ 를 ②에 대입하면

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}ab - a - b\right)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 + a^2 + b^2 - a^2b - ab^2 + 2ab \text{ 에서}$$

$$0 = ab\left(\frac{1}{4}ab - a - b + 2\right) \text{ 이다. } ab > 0 \text{ 이므로}$$

$$0 = ab - 4a - 4b + 8 \text{ 즉,}$$

$$(a - 4)(b - 4) = 8 = 2^3 \dots\dots ③$$

이다. a, b 가 모두 자연수이므로 방정식 ③을 만족하는 경우는

$$(a = 5, b = 12 \text{ 또는 } a = 6, b = 8) \text{ 이거나 } (a = 12, b = 5 \text{ 또는 } a = 8, b = 6)$$

뿐이다. 따라서 구하는 피타고라스 삼중쌍은 $\{6, 8, 10\}, \{5, 12, 13\}$ 이다.

[문제 3] (배점 10점)

주어진 조건 $c_1 = 5, c_2 = 13, c_3 = 25, c_4 = 41, c_5 = 61, c_6 = 85, \dots$ 에서

$$(c_6 - c_5) - (c_5 - c_4) = (c_5 - c_4) - (c_4 - c_3) = \dots = (c_3 - c_2) - (c_2 - c_1) = 4$$

이므로 수열 $\{c_n\}$ 의 계차수열은 공차가 4인 등차수열이다. 따라서 수열 $\{c_n\}$ 의

일반항은 $c_n = 5 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k + 4) = 2n^2 + 2n + 1$ 이다.

$T(a_n, b_n, c_n)$ 의 내접원의 반지름이 n 이므로 직각삼각형의 내접원 성질에 의해

$$c_n = (a_n - n) + (b_n - n) \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } n = \frac{1}{2}(a_n + b_n - c_n), \text{ 즉 } a_n + b_n = 2n^2 + 4n + 1 \dots\dots ①$$

이다. $T(a_n, b_n, c_n)$ 의 넓이가 $\frac{1}{2}a_nb_n = \frac{1}{2}n(a_n + b_n + c_n)$ 이므로

$$a_nb_n = 2n(n+1)(2n+1) \dots\dots ② \text{이다. } ① \text{과 } ② \text{로부터}$$

$$a_n = 2n + 1, b_n = 2n(n+1) \text{ 이거나 } a_n = 2n(n+1), b_n = 2n + 1$$

이다. 따라서 구하는 피타고라스 삼중쌍은 $\{2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1\}$ 이다.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

올해 길동은 맛이 좋은 배추를 구매하여 김장을 하려고 한다. 이를 위해 길동은 서로 다른 맛의 배추를 판매하는 n 군데 가게를 선택하였다.(단, n 은 $n \geq 2$ 인 정수이다.) 이들 가게를 각각 한 번씩 방문할 순서를 임의로 설정하고, 순서대로 가게에 들러 배추 맛을 본 후, 배추를 구매할 지 여부를 결정하려고 한다. 이 때 길동은 $2 \leq m \leq n$ 인 정수 m 에 대해 다음과 같은 규칙- m 에 따라 구매 여부를 결정하려고 한다.

- (1) 첫 번째부터 $(m-1)$ 번째까지 방문한 가게에서는 배추를 구매하지 않는다.
- (2) 이 후 방문한 가게의 배추 맛이 앞서 방문한 가게의 배추 맛에 비해 좋으면 구매한다.
- (3) 일단 배추를 구매하면 더 이상 가게를 방문하지 않는다.

예를 들어 $n=4$ 일 때 규칙-3을 사용한다고 하자. 길동은 우선 네 가게를 방문할 순서를 정한다. 그리고 첫 번째와 두 번째 방문한 가게에서는 배추 맛을 보지만 구매는 하지 않는다. 세 번째 가게의 배추 맛이 첫 번째와 두 번째 가게의 배추 맛에 비해 좋으면 길동은 세 번째 가게에서 배추를 구매하고 더 이상 가게를 방문하지 않는다. 그렇지 않으면 길동은 구매를 하지 않고 네 번째 가게를 방문한다. 만약 네 번째 가게의 배추 맛이 첫 번째부터 세 번째까지 방문한 가게의 배추 맛에 비해 좋으면 길동은 네 번째 가게에서 배추를 구매한다. 그렇지 않으면 길동은 배추를 구매하지 않고 (가게는 네 군데 뿐이므로) 결국 아무 배추도 구매하지 못하게 된다.

[문제 1] 가게의 수 $n=4$ 이고 규칙-2를 사용한다고 하자. 첫째, 길동이 세 번째 방문한 가게에서 가장 맛이 좋은 배추를 판매할 확률을 구하시오. 둘째, 세 번째 방문한 가게에서 가장 맛이 좋은 배추를 판매할 때 세 번째 가게에서 길동이 배추를 구매할 확률을 구하시오. 셋째, 길동이 가장 맛이 좋은 배추를 구매할 확률을 구하시오. (10점)

[문제 2] $n \geq 2$ 인 정수 n 과 $2 \leq m \leq n$ 인 정수 m 에 대해 규칙- m 을 사용할 때 길동이 결국 아무 배추도 구매하지 못할 확률 $q(m)$ 을 구하시오. (5점)

[문제 3] $n \geq 2$ 인 정수 n 과 $2 \leq m \leq n$ 인 정수 m 에 대해 규칙- m 을 사용할 때 길동이 가장 맛이 좋은 배추를 구매할 확률 $p(m)$ 을 구하시오. (15점)

<출제의도>

[문제 1]

문제 파악 능력과 경우의 수, 확률, 조건부 확률 등의 이해 정도를 평가

[문제 2]

문제 파악 능력과 순열, 확률 등의 이해 정도를 평가

[문제 3]

문제 파악 능력과 순열, 조합, 확률, 조건부 확률 등의 이해 정도를 평가

<자료출처>

고등학교 수학 I (더텍스트)

고등학교 미적분과 통계 기본 (미래엔컬처그룹)

고등학교 적분과 통계 (교학사)

<예시답안>

[문제 1] (배점 10점)

첫째, 네 군데 가게를 방문하는 순서의 가짓수는 $4! = 24$ 이다. 또한 가장 맛이 좋은 배추를 판매하는 가게를 세 번째에 방문하는 순서의 가짓수는 $3! = 6$ 이다. 따라서 세 번째 가게에서 가장 맛이 좋은 배추를 판매할 확률은 $\frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$ 이다.

둘째, 세 번째 가게에서 가장 맛이 좋은 배추를 판매할 때 길동이 세 번째 가게에서 배추를 구매하기 위해, 첫 번째 가게의 배추 맛이 두 번째 가게의 배추 맛 보다 좋아야 한다. 가장 맛이 좋은 배추를 판매하는 가게를 제외한 세 가게 중 서로 다른 두 가게를 선택하는 방법은 모두 세 가지이다. 또한 선택한 두 가게를 길동이 첫 번째와 두 번째에 방문하는 순서의 가짓수는 2이다. 한편 선택한 두 가게 중 맛이 더 좋은 배추를 판매하는 가게를 길동이 첫 번째에 방문하고 그렇지 않은 가게를 길동이 두 번째에 방문하는 순서의 가짓수는 1이다. 그러므로 세 번째 방문한 가게에서 가장 맛이 좋은 배추를 판매할 때 길동이 세 번째 가게에서 배추를 구매할 확률은 $\frac{3 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{2}$ 이다.

셋째, 세 번째 가게에서 가장 맛이 좋은 배추를 판매하고 길동이 세 번째 가게에서 배추를 구매할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ 이다. 유사하게 두 번째 가게에서 가장 맛이 좋은 배추를 판매하고 길동이 두 번째 가게에서 배추를 구매할 확률은 $1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ 이고, 네 번째 가게에서 가장 맛이 좋은 배추를 판매하고 길동이 네 번째 가게에서 배추를 구매할 확률은 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ 이다. 길동이 가장 맛이 좋은 배추를 구매할 확률은 위

세 가지 확률의 합이고 따라서 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}$ 이다.

[문제 2] (배점 5점)

규칙- m 을 사용할 때 길동이 결국 아무 배추도 구매하지 못할 확률은 가장 맛이 좋은 배추를 첫 번째부터 $(m-1)$ 번째까지 방문한 가게 중 하나에서 판매할 확률과 같다. $1 \leq j \leq m-1$ 인 정수 j 에 대해 가장 맛이 좋은 배추를 판매하는 가게를 j 번째 방문하는 순서의 가짓수는 $(n-1)!$ 이다. 그러므로

$$q(m) = \frac{(n-1)!(m-1)}{n!} = \frac{m-1}{n}$$

[문제 3] (배점 15점)

$n \geq 2$ 인 정수 n 과 $2 \leq m \leq k \leq n$ 인 정수 m 과 k 에 대해 길동이 k 번째 방문하는 가게에서 가장 맛이 좋은 배추를 판매하는 사건을 A_k , 길동이 k 번째 방문하는 가게에서 배추를 구매하는 사건을 B_k 라고 하자. 그러면 길동이 가장 맛이 좋은 배추를 구매할 확률은 다음과 같다.

$$p(m) = \sum_{k=m}^n P(B_k \cap A_k) = \sum_{k=m}^n P(B_k | A_k) P(A_k)$$

우선 길동이 n 군데 가게를 방문하는 순서의 가짓수는 $n!$ 이다. 또한 가장 맛이 좋은 배추를 판매하는 가게를 길동이 k 번째 방문하는 순서의 가짓수는 $(n-1)!$ 이다. 그러므로

$$P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

다음 $P(B_k | A_k)$ 는 길동이 k 번째 방문하는 가게에서 판매하는 배추가 가장 맛이 좋은 배추일 때, 첫 번째부터 $(k-1)$ 번째까지 방문하는 가게의 배추 중 가장 맛이 좋은 배추를 판매하는 가게가 첫 번째부터 $(m-1)$ 번째까지 방문하는 가게 중 하나일 확률과 같다. 가장 맛이 좋은 배추를 판매하는 가게를 제외한 $(n-1)$ 개의 가게 중 서로 다른 $(k-1)$ 개의 가게를 선택하는 방법은 모두 ${}_{n-1}C_{k-1}$ 가지이다. 또한 길동이 선택한 $(k-1)$ 개의 가게를 방문하는 순서의 가짓수는 $(k-1)!$ 이다. 한편 $1 \leq j \leq m-1$ 인 정수 j 에 대해 선택한 $(k-1)$ 개의 가게에서 판매하는 배추 중 가장 맛이 좋은 배추를 판매하는 가게를 j 번째에 방문하는 순서의 가짓수는 $(k-2)!$ 이다. 그러므로

$$P(B_k | A_k) = \frac{{}_{n-1}C_{k-1} (k-2)! (m-1)}{{}_{n-1}C_{k-1} (k-1)!} = \frac{m-1}{k-1}$$

마지막으로 $2 \leq m \leq n$ 인 정수 m 에 대해 길동이 가장 맛이 좋은 배추를 구매할 확률은 다음과 같다.

$$p(m) = \sum_{k=m}^n \frac{1}{n} \frac{m-1}{k-1}$$

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (40점)

<제시문>

- (가) ①인류가 식량 자원을 확보하기 위해 제한된 종을 다량으로 생산하는 것은 생태계의 몇몇 종만을 포함하는 단순한 생태계로 변화시킬 수 있기 때문에, 건강한 생태계를 위협할 수 있다. 하지만 식량 문제를 해결하는 것은 인류의 생존과 직결되므로 포기할 수 없는 일이다. 건강한 생태계를 유지하는 것과 식량을 생산하는 일 모두가 인류의 생존을 위해 필요한 일이라면 두 가지를 조화시키는 방법을 찾아내야 한다.
- (나) 농경과 목축을 시작한 이래 인류는 작물이나 가축의 양과 질을 높이기 위해 품종을 개량해 왔는데, 이것을 육종이라고 한다. 전통적인 육종의 경우 우수한 품질의 개체들을 골라 선택적으로 교배한 후, 그 중에서 원하는 형질을 가진 자손을 여러 대에 걸쳐 자가 수분시키는 방법을 사용하여 품종을 개량한다. 병에는 강하나 품질이 낮은 벼의 품종과 병에는 약하나 품질이 좋은 벼의 품종을 교배시켜 병에 강하면서 품질도 좋은 품종으로 개량하는 것이 그 대표적인 예이다.
- (다) 오늘날 생명 공학이 빠르게 발달하면서 과학자들은 전통적인 육종법과는 달리 작물이나 가축의 품종 개량에 유전자를 이용할 수 있음을 알게 되었다. 즉, 필요한 유전자를 DNA 수준에서 조합하여 원하는 형질을 가진 새로운 생물체를 만드는 것이다. 이와 같이 유전자 재조합 기술을 통해 새로운 유전자가 삽입되어 만들어진 생물체를 유전자 변형 생물(GMO: Genetically Modified Organism)이라고 한다.
- (라) 유전자를 삽입하여 만들어진 GMO는 식량 생산의 증대뿐만 아니라 특정 영양소의 강화 및 의약품으로서의 효용성이 크지만, 안전성에 대한 문제 때문에 논란의 대상이 되고 있다. 실제로 단백질 함량을 높이기 위해서 브라질 견과류에서 얻은 유전자를 도입한 콩이 개발되었으나 일부 사람에게 알레르기를 일으켜 폐기된 일이 있다.

[문제 1] 제시문 (가)의 밑줄친 ①과 관련하여, 미래의 식량자원을 지속적으로 확보하기 위한 조건을 ‘생물 다양성’ 측면을 중심으로 논술하시오. (단, 생물 다양성을 설명할 때, ‘생물종의 다양성, 생물이 지닌 유전자의 다양성, 생물이 서식하는 생태계의 다양성’을 포함시키도록 한다.) (500자 내외) (20점)

[문제 2] 제시문 (나), (다), (라)에 근거하여, GMO 식품의 생산과 소비에 대해 찬성 또는 반대 중 하나를 선택하고, 찬반 선택에 대한 이유를 ‘사회성(식량 문제), 식품 안정성, 생태계와 환경, 윤리성’을 고려하여 논술하시오. (500자 내외) (20점)

<출제의도>

[문제 1]

미래 식량자원을 생태계에서 지속적으로 확보하기 위해서는 생태계의 생물 다양성이 유지되어야 함을 이해하고, 이를 생물종의 다양성, 생물이 지닌 유전자의 다양성, 생물이 서식하는 생태계의 다양성 측면과 관련지어 자신의 생각을 논리적으로 표현할 수 있는 능력을 평가

[문제 2]

사회성, 안정성, 윤리성과 생태계 측면에서 GMO 식품의 생산 및 소비가 인류와 환경에 미치는 영향을 이해하고, 이를 바탕으로 찬성 또는 반대에 대한 자신의 의사결정 이유를 논리적으로 표현할 수 있는 능력을 평가

<자료출처>

고등학교 과학 교과서 (교학사, 금성출판사, 더텍스트, 상상아카데미, 천재교육1, 천재교육2)

<예시답안>

[문제 1] (배점 20점)

미래의 식량 자원 확보와 개발을 위해서는 생태계의 생물 다양성을 보존해야 하는데, 이를 위해서는 생물종, 유전자, 생태계의 다양성이 유지되어야 한다. 생물종 다양성은 생태계에 얼마나 많은 생물종이 사는지의 여부로 판단할 수 있다. 식량 자원 확보를 위한 새로운 품종을 개발하기 위해서는 다른 종과의 교배가 중요하므로 다양한 생물종의 보존이 필요하다. 생물이 지닌 유전자의 다양성은 같은 종이라도 유전적으로 얼마나 다양한가를 의미한다. 어떤 종의 개체수가 많다고 해도 유전적 다양성이 풍부하지 못하면 치명적인 전염병에 의해 그 종 전체가 멸종될 수 있다. 따라서 유전자의 다양성은 생물종을 유지하는데 중요한 역할을 한다. 생태계 다양성은 열대우림, 습지, 산림 생태계 등 생물이 서식하는 환경이 얼마나 다양한가를 의미한다. 만약 생태계 파괴에 의한 생물 다양성의 감소가 지속되면 우리에게 유용한 미래의 식량자원도 그만큼 소실되는 것이다. 따라서 생물 다양성의 중요성과 가치를 이해하고 보존하도록 노력해야 한다.

[논제 2] (배점 20점)

<찬성>을 선택한 경우

GMO 식품 생산과 소비는 인류와 환경에 이로운 영향을 주기 때문에 찬성을 선택하였다. 병충해에 강하고 수확량을 늘릴 수 있는 유전자를 조합한 GMO를 개발하면, 식량 생산 비용을 줄일 수 있다. 또한 농지 감소를 극복하기 위해 기후 조건이 좋지 않은 곳에서도 재배가 가능한 GMO를 개발하면, 인류의 식량 문제를 해결하는데 도움이 된다. 이러한 GMO 식품이 인체에 미치는 영향에 대해 사전 연구와 안정성 검사를 철저하게 하고, 그 결과를 제품에 의무적으로 표기하도록 한다면, 식품 안정성을 높일 수 있을 것이다. 그리고 병충해와 잡초에 강한 내성을 지닌 종자를 개발하여 농약 사용량을 줄이면 환경 오염을 크게 감소시킬 수 있으며, 철저하게 격리된 환경에서 GMO를 재배한다면 다른 생명체의 유전자와 결합되어 생길 수 있는 생태계 파괴의 위험을 줄일 수 있다. 또한 새로운 품종 개발을 위해 기존의 식량 자원을 개량하거나 새롭게 만든다는 측면에서, GMO 개발은 전통적 육종법과 같은 목적을 가지므로 윤리적으로 문제가 되지 않는다.

<반대>를 선택한 경우

GMO 식품의 생산과 소비는 인류와 환경에 해로운 영향을 주기 때문에 반대를 선택하였다. 기아 문제는 선진국과 개발도상국 간 식량 분배의 문제이지, 생산량 자체의 문제가 아니다. 또한 유전자 변형 작물을 개발하는 데는 막대한 비용이 들며, 거대 기업은 특허권을 이용하여 폭리를 취하게 되고, 정작 빈곤한 사람들을 위한 식량 분배의 문제는 해결되지 않을 것이다. 그리고 GMO 식품을 섭취하였을 때, 과학적으로 예측하지 못하는 각종 부작용들이 몸속에서 일어날 수도 있다. GMO 식품이 상업화되기 전에 사전 연구를 철저히 하더라도, 10년 이상 오랜 기간이 지난 후에 나타나는 부작용에 대해서는 검증이 불가능하므로, 식품 안전성에 문제가 있다. 생태계와 환경 측면에서는 강력한 제초제에 내성을 갖는 슈퍼 잡초가 생길 수 있으며, 다른 종의 유전자와 결합하여 생태계 평형을 파괴하는 심각한 문제를 초래할 수 있다. 무엇보다도, 생명체를 사람이 임의로 조작하는 일은 생명 윤리에 대한 논란에서 벗어나기 어렵다.