2014학년도 신입생 수시 2차 모집 논술우수자전형 논술고사

모범답안 예시 <자연계>

【문제 1】 해답 1안.

(1-1) 피타고라스 정리에 의해 $D(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}$ 이다.

(1-2) 경찰차와 스포츠카는 각각 x축과 y축의 음의 방향으로 움직이고 있으므로,

$$\frac{dx}{dt}=x'(t)=-80\,(km/h) \text{ 이고, } \frac{dy}{dt}=y'(t)=-100\,(km/h)$$

이다.

$$D(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}=\left(x(t)^2+y(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

의 양변을 t에 관해 미분하면 연쇄법칙에 의해

$$\begin{aligned} D'(t) &= \frac{1}{2}\left(x(t)^2+y(t)^2\right)^{-\frac{1}{2}}2\{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)\} \\ &= \frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}} \end{aligned}$$

이다. 여기에

$x(t)=0.3\,(km)$, $x'(t)=-80\,(km/h)$, $y(t)=0.4\,(km)$, $y'(t)=-100\,(km/h)$

을 대입하면,

$$D'(t)=\frac{(0.3)(-80)+(0.4)(-100)}{\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{4}{10}\right)^2}}=(-64)(2)=-128\,(km/h)$$

이다. 그러므로 경찰의 스피드건에 측정된 속력은 $128\,km/h$이다.

(1-3) 경찰차가 정지한 상태라면 문제 (1-2)에서 $x'(t)=0$ 이므로,

$$D'(t)=(-40)(2)=-80\ (km/h)$$

이다. 그래서 이 경우에는 측정된 속력이 $80\,km/h$이다.

(1-4) 정면에서 정지한 경찰차에서 달리는 스포츠카의 속력을 측정하면, 정확한 속력 $100\,km/h$가 스피드건에 기록될 것이다. 문제 (1-2)에서와 같이 경찰차가 움직이는 상태에서 사선방향으로 스포츠카의 속력을 측정하면, $128\,km/h$와 같은 부정확한 값이 스피드 건에 기록된다. 한편, 문제 (1-3)과 같이 경찰차가 정지한 상태라고 하더라도 사선방향에서 스포츠카의 속력을 측정하면, $80\,km/h$와 같이 실제보다 느린 속력이 스피드건에 기록된다. 그러므로 과속을 단속할 때는 달리는 자동차의 정면에서 정지한 상태로 속력을 측정해야 정확한 값을 얻는다.

【문제 1】 해답 2안.

(1-1) $x(t)=0.3-80t$, $y(t)=0.4-100t$ 라고 하면, 피타고라스 정리에 의해

$$D(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}=\sqrt{(0.3-80t)^2+(0.4-100t)^2}\,.$$

(1-2) $D(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}=\{(0.3-80t)^2+(0.4-100t)^2\}^{\frac{1}{2}}$ 의 양변을 t 에 관해 미분하면, 연쇄법칙에 의해

$$\begin{aligned}D'(t)&=\frac{d}{dt}\{(0.3-80t)^2+(0.4-100t)^2\}^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{-160(0.3-80t)-200(0.4-100t)}{2\sqrt{(0.3-80t)^2+(0.4-100t)^2}}\\&=-\frac{80(0.3-80t)+100(0.4-100t)}{\sqrt{(0.3-80t)^2+(0.4-100t)^2}}\end{aligned}$$

이다. 여기에 $t=0$을 대입하면

$$D'(0)=-\frac{24+40}{\sqrt{0.3^2+0.4^2}}=-128\,(km/h)$$

이다. 그러므로 경찰의 스피드건에 기록된 스포츠카의 속력은 $128\,km/h$ 이다.

(1-3) 경찰차가 정지한 상태라면 문제 (1-1)에서 $x(t)=0.3$, $y(t)=0.4-100t$ 이므로

$$D(t)=\sqrt{0.3^2+(0.4-100t)^2}$$

이다. $D(t)$의 양변을 t 에 관해 미분하면, 연쇄법칙에 의해

$$D'(t)=-\frac{200(0.4-100t)}{2\sqrt{0.3^2+(0.4-100t)^2}}$$

이므로, 여기에 $t=0$을 대입하면 $D'(0)=-80(km/h)$이다. 그러므로 경찰의 스피드건에 기록된 스포츠카의 속력은 $80\,km/h$ 이다.

(1-4) 정면에서 정지한 경찰차에서 달리는 스포츠카의 속력을 측정하면, 정확한 속력 $100\,km/h$ 가 스피드건에 기록될 것이다. 문제 (1-2)에서와 같이 경찰차가 움직이는 상태에서 사선방향으로 스포츠카의 속력을 측정하면, $128\,km/h$ 와 같은 부정확한 값이 스피드 건에 기록된다. 한편, 문제 (1-3)과 같이 경찰차가 정지한 상태라고 하더라도 사선방향에서 스포츠카의 속력을 측정하면, $80\,km/h$ 와 같이 실제보다 느린 속력이 스피드건에 기록된다. 그러므로 과속을 단속할 때는 달리는 자동차의 정면에서 정지한 상태로 속력을 측정해야 정확한 값을 얻는다.

【문제 2】

(2-1) 19는 26과 서로소이므로 제시문의 ㉡에 의해 역원이 존재한다. ㉡에 의해 26과 서로소가 아닌 원소의 역원은 존재하지 않으므로, 그 원소는 19의 역원이 될 수 없다. 따라서 26과 서로소인 원소의 집합 $\{1,3,5,7,9,11,15,17,19,21,23,25\}$의 각 원소 α에 대하여 $19 \cdot \alpha$의 값을 26으로 나누었을 때 나머지가 1이 되는지 검사한다. 검사결과 $19 \cdot 11 = 26 \cdot 8 + 1$이므로 $19^{-1} = 11$이다.

(2-2) 암호화 과정으로부터 K에 대한 6개의 관계식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix}5 & 8\\6 & 7\end{pmatrix}K=\begin{pmatrix}21 & 25\\7 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}6 & 7\\19 & 8\end{pmatrix}K=\begin{pmatrix}7 & 4\\5 & 3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}19 & 8\\13 & 6\end{pmatrix}K=\begin{pmatrix}5 & 3\\1 & 7\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}5 & 8\\19 & 8\end{pmatrix}K=\begin{pmatrix}21 & 25\\5 & 3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}5 & 8\\13 & 6\end{pmatrix}K=\begin{pmatrix}21 & 25\\1 & 7\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}6 & 7\\13 & 6\end{pmatrix}K=\begin{pmatrix}7 & 4\\1 & 7\end{pmatrix}.$$

첫째 줄 두 번째와 둘째 줄 세 번째 식을 제외한 관계식들은 모두 K 앞에 곱해지는 행렬에 대한 역행렬이 존재하지 않으므로, 이들 관계식은 K를 찾는 데 사용할 수 없다.

첫째 줄 두 번째 관계식 $\begin{pmatrix}6 & 7\\19 & 8\end{pmatrix}K=\begin{pmatrix}7 & 4\\5 & 3\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}6 & 7\\19 & 8\end{pmatrix}$의 역행렬은 문제 (2-1)에서 $19^{-1} = 11$이므로

$$19^{-1}\begin{pmatrix}8 & -7\\-19 & 6\end{pmatrix}=11\begin{pmatrix}8 & -7\\-19 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 1\\-1 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 1\\25 & 14\end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $K=\begin{pmatrix}10 & 1\\25 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 4\\5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 17\\11 & 12\end{pmatrix}$이다.

한편, 둘째 줄 세 번째 관계식 $\begin{pmatrix}6 & 7\\13 & 6\end{pmatrix}K=\begin{pmatrix}7 & 4\\1 & 7\end{pmatrix}$을 이용해도 $K=\begin{pmatrix}23 & 17\\11 & 12\end{pmatrix}$이다.

(2-3) 문제 (2-2)에서 $K=\begin{pmatrix}23 & 17\\11 & 12\end{pmatrix}$이고 $11^{-1} = 19$이므로

$$K^{-1} = 11^{-1}\begin{pmatrix}12 & -17\\-11 & 23\end{pmatrix}=19\begin{pmatrix}12 & 9\\15 & 23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 15\\25 & 21\end{pmatrix}$$

이다. 암호문 "qdjqec"는 “$(16,3),(9,16),(4,2)$”이므로

$$(16,3)\begin{pmatrix}20 & 15\\25 & 21\end{pmatrix}=(5,17),\quad (9,16)\begin{pmatrix}20 & 15\\25 & 21\end{pmatrix}=(8,3),\quad (4,2)\begin{pmatrix}20 & 15\\25 & 21\end{pmatrix}=(0,24)$$

에 의해 결과 값이 “$(5,17),(8,3),(0,24)$”이므로 원래 메시지는 "friday"이다.

【문제 3】

(3-1) 정상적인 $N-m$ 개의 안테나를 "0"으로 나타내고, 불량인 m 개의 안테나를 "|"으로 나타낸다. 불량인 안테나가 연속으로 배치되지 않게 하기 위해서는

$$\wedge 0 \wedge 0 \wedge 0 \wedge \cdots \wedge 0 \wedge 0 \wedge$$

과 같이 정상적인 안테나를 의미하는 $N-m$ 개의 "0"을 일렬로 배치한 후, 처음과 마지막을 포함한 $N-m+1$ 개의 "$\wedge$"자리 중에서 m 자리를 선택하여 "|"를 하나씩 놓아야 한다. 그러므로 $N-m+1$ 개에서 m 개를 선택하는 조합의 수 ${}_{N-m+1}C_m$ 이다.

(3-2) $y_i = x_i + 1\,(1 \le i \le r)$ 로 놓으면, x_i 가 0 또는 양의 정수일 때, y_i 는 반드시 양의 정수이다. 그러므로 방정식 $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = N$ 에서 0 또는 양의 정수해의 개수는 $x_i = y_i - 1$ 이므로 방정식

$$(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + \cdots + (y_r - 1) = N,$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_r = N + r$$

에서 양의 정수해 $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ 의 개수인 ${}_{N+r-1}C_{r-1}$ 이다.

(3-3) 100만 원을 기본 투자 단위로 하고 4종목까지 분산 투자하는 것이므로, 투자전략 (m_1, m_2, m_3, m_4) 의 개수는 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ 에서 0 또는 양의 정수해의 개수와 같다. 그러므로 문제 (3-2)의 결과에 $N = 20$ 과 $r = 4$ 를 대입하면

$${}_{23}C_3 = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1771$$

가지이다.

(3-4) 100만 원을 기본 투자 단위로 하고 4종목까지 투자하되, 투자하지 않고 남겨두는 100만 원 단위의 개수를 변수 x_5 로 놓는다. 이 때, 투자전략의 개수는 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ 에서 0 또는 양의 정수해의 개수가 되므로 문제 (3-2)의 결과에 $N = 20$ 과 $r = 5$ 를 대입하면

$${}_{24}C_4 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10626$$

가지이다.

【문제 4】

(4-1) ㉣과 ㉤에서 E가 첫 번째이며, $E-C-B-A-$의 순서이다.

㉣에서 D는 E보다 뒤에 있으므로 두 번째와 다섯 번째 사이에 있고, B는 세 번째 또는 네 번째이다. 이 순서관계를 그림으로 나타내면 아래와 같다.

```
E  －  C  －  B  －  A  －
   ＼     ＼     ／     ／
            D
```

B가 네 번째라면, C와 D는 두 번째와 세 번째에 있고, ㉢에 의해 C와 D는 같은 색이다. 이 때, C 또는 D가 B의 바로 앞이 되므로 ㉥에 의해 B, C, D는 빨강이다. E는 문제에 주어진 조건에서 노랑이 아니고, ㉠에 의해 파랑도 아니므로 반드시 빨강이다. B, C, D, E 4명이 모두 빨강이면 3가지 색이 모두 있을 수 없다. 그런데 ㉠과 ㉡에 의해 노랑과 파랑도 있어야 하므로 모순이다. 따라서 B는 네 번째가 아니다.

결국 B는 세 번째이고, C는 두 번째이다. ㉥에 의해 C는 B와 같은 빨강이다. ㉠과 문제에 주어진 조건에 의해 E는 파랑과 노랑이 아니므로 C와 같은 빨강이다. 그러므로 C와 E는 반드시 같은 색이다.

(4-2) 문제의 조건에 의해 네 번째와 다섯 번째가 같은 색이고, D가 다섯 번째라면 순서는 $E-C-B-A-D$ 이다.

A와 D가 파랑, C와 B가 빨강, E가 노랑이면 ㉠~㉥의 모든 조건이 만족되므로 D는 다섯 번째가 될 수 있다. 색깔이 다른 경우는 없다.

(4-3) B는 세 번째 또는 네 번째이다. B가 세 번째라면, ㉥에 의해 두 번째가 빨강이다. B가 네 번째라면, ㉥에 의해 세 번째가 빨강이고 ㉢에 의해 두 번째도 빨강이다. 따라서 두 번째는 반드시 빨강이다.

(4-4) B는 세 번째 또는 네 번째이다. B가 세 번째라면, D는 네 번째 또는 다섯 번째이고

$E-C-B-D-A$ 또는 $E-C-B-A-D$

이다. 이 때, ㉥에 의해 C는 빨강이다. 따라서 B와 C는 빨강이다.

B가 네 번째라면, 순서는

$E-C-D-B-A$ 또는 $E-D-C-B-A$

이다. ㉥에 의해 B와 D가 빨강 또는 B와 C가 빨강이다. B와 D가 빨강이면, ㉢에 의해 C는 빨강이다.

그러므로 B와 C는 반드시 빨강이다.

문제 (4-2)에서와 같이 B와 C가 빨강, E는 노랑, A와 D는 파랑이 될 수 있으므로, B와 C 이외에 A, D, E는 빨강이 아닐 수 있다. 결과적으로 반드시 빨강인 사람은 B와 C 두 사람 뿐이다.

< 끝 >