2012학년도 신입생 수시 1차 모집 논술우수자전형(I) 논술고사

모범답안 예시

【문제 1】

(1-1) 거리와 속도의 관계에 의해

$$x=\int v_x(t)dt= v_0 t\cos\theta = 10t\cos\theta,\quad y=\int v_y(t)dt = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 = 10t\sin\theta - 5t^2.$$

(1-2) $10t\cos\theta = 5\sqrt{2}$ 로부터 $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,t}$ 이고 피타고라스의 정리를 이용하면

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2t^2-1}}{\sqrt{2}\,t}$ 이다. 이 식을 $5\sqrt{2}-5 = 10t\sin\theta - 5t^2$ 에 대입하면

$5\sqrt{2}(\sqrt{2t^2-1}) - 5t^2 = 5\sqrt{2}-5$ …… ①

①에서 $t = \pm 1$, $t>0$이므로 $t=1$일 때 $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

따라서 45° 의 각도로 새를 날리면 1초 후에 $P_1(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}-5)$ 의 위치에 있는 돼지를 맞출 수 있다.

(여기까지 맞은 경우 15%의 점수 부여)

①을 풀면 $t=\pm 1$ 이외의 다른 해 $t=\pm\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ 가 있다.

이 경우에도 $t>0$이므로 $t=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ 이고 $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}$

따라서 $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}$ 가 되는 각이 하나 더 있다.

($t=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}$ 를 찾아낸 경우 점수 15%의 점수 부여)

※ $\theta = 61.3^\circ$ 인데 이 각을 계산하는 것을 불가능하다.

(1-3) 새가 최대 높이에 도달했을 때 $v_y = 0$이므로 $10\sin\theta - 10t = 0$에서 $t=\sin\theta$ 이다. 이를 x, y 식에 대입하면 $x = 10\cos\theta\sin\theta$이고 $y = 10\sin^2\theta - 5\sin^2\theta = 5\sin^2\theta$이다. 따라서 θ의 값에 관계없이 항상 $\sin^2\theta \leqq 1$이므로 $y=5$를 만족하는 $\theta = \dfrac{\pi}{2} = 90^\circ$ 이지만 이 때 $x=0$이므로 $P_2(4,5)$의 위치에 있는 돼지를 맞추는 것은 불가능하다.

(1-4) $P_3(5\sqrt{3}, 0)$에서 $10t\cos\theta = 5\sqrt{3}$ 로부터 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2t}$ 이고 피타고라스의 정리를 이용하면 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{4t^2-3}}{2t}$ 이다. 이를 $10t\sin\theta - 5t^2 = 0$에 대입하면 $5\sqrt{4t^2-3} - 5t^2 = 0$ 이므로 이 식을 정리하여 풀면 $t^4 - 4t^2 + 3 = 0$이다. 따라서 $(t^2-3)(t^2-1) = 0$이므로 $t = \pm 1$, $\pm\sqrt{3}$ 이 되

는데 $t>0$이어야 하므로 $t=1$ 또는 $\sqrt{3}$이 된다. 따라서 $t=1$일 때 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\theta=30^\circ$가 되고 $t=\sqrt{3}$일 때 $\cos\theta=\frac{1}{2}$이므로 $\theta=60^\circ$가 된다.

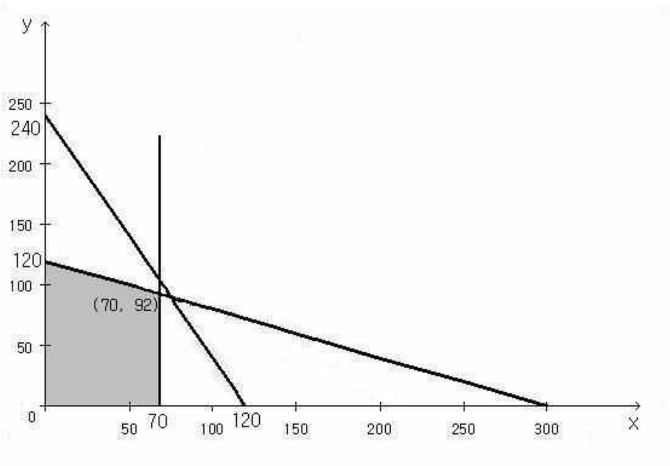
【문제 2】

(2-1) S엔진 대당 공헌이익: 24만원 또는 240,000원 (=80만원 - 56만원)
B엔진 대당 공헌이익: 38만원 또는 380,000원 (=100만원 - 62만원)

(2-2) $t=240{,}000x+380{,}000y$

(2-3) 조립라인 가동시간 제약조건: $2x+5y\le 600$
검사라인 가동시간 제약조건: $x+0.5y\le 120$
S엔진 판매량 제약조건: $x\le 70$

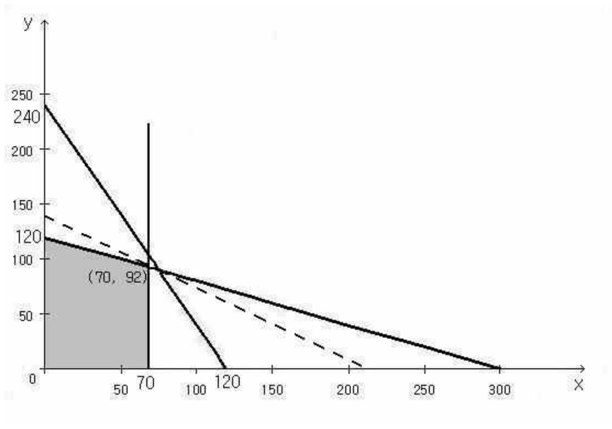
(2-4) 빗금친 부분은 S엔진과 B엔진의 판매가능한 생산대수의 조합을 의미한다. 이 영역을 벗어난 부분은 생산이 불가능하거나 생산은 가능하지만 판매가 불가능하다.



(2-5) 세 제약식을 만족하는 교점은 (70, 92)이다. 이점은 그래프에서 보듯이 판매 가능한 생산량 영역 안에서 월간 공헌이익 목적함수가 가장 큰 점 즉 원점에서 가장 먼 점이며, 최대 공헌이익을 얻을 수 있는 생산량이다.

* 월간 공헌이익: $240{,}000\times 70+380{,}000\times 92=51{,}760{,}000$

답) S엔진 70대, B엔진 92대 생산할 때 월간 최대 공헌이익 51,760,000원을 얻을 수 있다.



【문제 3】

(3-1)
높이가 h인 이진트리의 최대 노드 개수
= level 0 에서의 최대 노드 개수 + level 1 에서의 최대 노드 개수 + ⋯
+ level h 에서의 최대 노드 개수 = $2^0+2^1+\cdots+2^h=2^{h+1}-1$ 이다.

(3-2)
레벨 i의 단말 노드는 레벨 $i+1$에 0 개의 자식 노드를 생성하고, 레벨 i의 내부 노드는 레벨 $i+1$에 $2N_i$ 개의 자식 노드를 생성하므로,

레벨 $i+1$의 노드 개수 = (레벨 i의 <u>내부 노드</u>가 생성하는 자식 노드 수) +
(레벨 i의 <u>단말 노드</u>가 생성하는 자식 노드 수)
= $2N_i$

이다.

(3-3)
문제 (3-2)에 의해 레벨 $i+1$은 정확히 $2N_i$개의 노드를 가져야 한다.
그러나 레벨 $i+1$에서의 총 노드 개수는 $N_{i+1}+L_{i+1}$ 으로 나타낼 수 있으므로 $2N_i=N_{i+1}+L_{i+1}$ 이 되어 $N_i=\dfrac{N_{i+1}+L_{i+1}}{2}$ 식을 얻는다.

(3-4)
이진트리의 루트 노드를 제외한 모든 노드는 왼쪽 또는 오른쪽 이진 부분트리의 루트 노드이므로 반드시 하나의 부모 노드와 변으로 연결되어야 한다. 따라서 루트 노드를 제외하면 $n-1$ 개의 노드가 있으므로 정확히 $n-1$ 개의 변이 필요하다.

(3-5)
s를 이진트리에 있는 내부 노드 개수라 하자.
이진트리의 모든 내부 노드는 2개의 자식 노드를 가지므로 이진트리에 있는 모든 변의 개수는 $2s$ 이다.
이진트리의 총 노드 개수는 $n+s$ 이므로 문제 (3-4)에 의해 이진트리에 있는 변의 개수는 $n+s-1$ 이다.
따라서, $2s=n+s-1$, 즉 $s=n-1$ 이다.

(3-6)
문제 (3-5)로부터 n개의 단말 노드를 가지는 이진트리는 총 $2n-1$개의 노드를 갖는 것을 알 수 있다. 루트 노드 하나만 있는 레벨 0 외에는 모든 레벨이 최소 2개의 노드를 가져야 한다. 따라서 $2n-2$개의 노드로 만들 수 있는 최대 개수의 레벨은 $n-1$개이므로, n개의 단말 노드를 가지는 이진트리는 최대 $(n-1)+1=n$개의 레벨, 즉 최대 $n-1$의 높이를 가질 수 있다.

【문제 4】

(4-1) 조사결과를 보면 1992년 5월부터 9월까지 4개월 동안에 4배로 증가하였고,
1992년 9월부터 1993년 3월까지 6개월 동안에 8배로 증가하였다.
계속 같은 증가율로 증가한다고 하였으므로 4개월 동안에 4배로 증가하고 2개월 동안에 2배로 증가하여 6개월 동안에 8배로 증가하였다는 것을 알 수 있다.
토끼의 수가 2개월마다 2배로 증가하므로 2개월 전마다 1/2로 감소한다.
토끼의 수는 자연수이므로 2개월 전마다 500→250→125→63→32→16→8→4로 감소한다.
그러므로 두 쌍을 처음 풀어놓은 것은 1992년 5월부터 2개월씩 7번 즉 14개월 전인 1991년 3월이다.

(4-2) 1992년 5월을 $t=t_0$라 하고 시간 t를 2개월 단위로 생각하면
1992년 9월은 $t=t_0+2$, 1993년 3월은 $t=t_0+5$이므로
$R(t)=ka^t$에서

$$ka^{t_0}=500 \quad \cdots ①$$
$$ka^{t_0+2}=2000 \quad \cdots ②$$
$$ka^{t_0+5}=16000 \cdots ③$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면
②÷①에서 $a^2=4$, $a=2$
$t=0$일 때 토끼 두 쌍(4마리)으로 시작되었으므로 $k2^0=k=4$
$R(t)=4\times 2^t$

(4-3) 문제 (4-2)의 모델을 계속 적용하면 2개월 마다 2배씩 증가하므로 1년에 6번, 10년에 60번, 20년에는 120번 2배씩 증가한다.
따라서 $t=120$을 대입하면 $R(120)=4\times 2^{120}$=$4\times(2^{10})^{12}=4\times 10^{36}$
4×10^{36}마리의 토끼들을 정사각형 모양으로 가로와 세로로 줄을 맞추어 정렬시킨다고 하면

한 줄에 2×10^{18}마리씩 2×10^{18}줄이 된다.

지구의 적도에서 북극까지의 거리가 10000km=10^4km=10^7m=10^9cm이므로 그렇게 많은 토끼들이 지구상에 존재할 수 없다.

따라서 모델 $R(t)=ka^t$이 현재까지 계속 적용될 수는 없다.

< 끝 >