2019학년도 신입학 수시모집
논술고사 문제지 (자연계열-오후)

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색볼펜**"으로 정확히 기재 및 마킹(진하게)바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 두 함수 $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$의 합성함수는 $g \circ f: X \to Z,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$이다.
2. 다항식 $P(x)$를 $x - \alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면 $P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R$가 성립한다.
3. 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha) = 0$이면, $P(x)$는 일차식 $x - \alpha$로 나누어떨어진다.
4. p, q가 문장이나 식일 때, 'p이면 q이다.' 꼴의 명제에서 p를 가정, q를 결론이라 하고, 명제 'p이면 q이다.'를 기호 $p \to q$로 나타낸다.

[1] 함수 f를 다음과 같이 정의할 때, 물음에 답하시오.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & (x \geq 0) \\ 2x + 1 & (x < 0) \end{cases}$$

(1) $(f \circ f)(x)$를 구하시오. [7점]

(2) 곡선 $y = (f \circ f)(x)$와 세 직선 $x = 0,\ y = 0,\ y = 1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. [4점]

[2] 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$과 $g(x) = x^2 - x + 5$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) 부등식 $|2[f(x)] - 5| \leq [g(x)] + 3$의 해를 구하시오. [10점]

(2) $0 < a < \sqrt{3}$일 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{2[g(x) + x]}{[f(x) + x] + 5}$가 존재하는 a의 범위를 모두 구하시오. [15점]

[3] 다항식 $P(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 다항식 $P(x)$를 $2x - 5$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하자. $(x+1)P(x)$를 $2x - 5$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. [4점]

(2) 명제 "다항식 $P(x)$가 삼차식이면 $P(\alpha) \neq 0$인 α가 구간 $[0, 3]$에 존재한다."의 참 또는 거짓을 판정하고, 이를 증명하시오. [10점]

<다음 장 계속>

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 도형의 대칭이동
방정식 $f(x,y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,x)=0$

2. 입체도형의 부피
닫힌 구간 $[a,b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)\,dx \quad \text{(단, } S(x)\text{는 닫힌 구간 } [a,b]\text{에서 연속)}$$

3. 함수의 극대와 극소 판정
a를 포함하는 어떤 열린 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 x의 값이 a보다 작은 값에서 a보다 큰 값으로 바뀔 때, $f'(x)$의 부호가
(1) 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가진다.
(2) 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가진다.

4. 함수의 증가와 감소
함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 구간 (a,b)에서 미분가능할 때
(1) 구간 (a,b)에서 $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 증가한다.
(2) 구간 (a,b)에서 $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 감소한다.

5. 사이값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$사이의 임의의 k에 대하여

$$f(c)=k \quad (a<c<b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

[1] 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 곡선 $y=\log_3 x$위를 움직이는 점 $P_n(n,\log_3 n)$이 있다. 점 P_n을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=3^x$과 만나는 점을 Q_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 Q_n의 좌표를 구하시오. [2점]

(2) 삼각형 OP_nQ_n의 넓이를 a_n이라고 할 때, a_n을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [8점]

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{2a_k+(\log_3 k)^2\right\}$을 구하시오. [2점]

<다음 장 계속>

[2] 좌표평면에서 $x^2-4y+4=0$이 나타내는 도형 A에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 도형 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형을 B라고 할 때, A와 B가 한 점에서 만남을 보이시오.[2점]

(2) 도형 A와 세 직선 $x=0$, $x=1$, $y=x$로 둘러싸인 영역을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 닫힌 구간 $[0,1]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 이 입체도형을 자른 단면의 모양이 정삼각형이다. 이 정삼각형들이 이루는 입체도형의 부피를 구하시오. [8점]

[3] 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+x-1$이 $x=\cos\theta$와 $x=\sec\theta$에서 극값을 가질 수 있게 하는 b의 범위를 구하고, 극대와 극소를 판정하시오.$\left(단,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [14점]

[4] $0<x<\frac{\pi}{6}$에 대하여 부등식 $\tan 3x>ax$를 만족하는 a의 최댓값을 구하시오. [14점]

<끝>

2019학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-오후1번]

▣ 출제의도

[1] (1) 구간별로 정의되는 함수의 합성함수에 대한 이해력을 평가한다.
(2) 구간별로 정의되는 함수의 합성함수의 그래프에 대한 이해력과 제한된 영역의 면적을 구하는 계산력을 평가한다.
[2] (1) 이차부등식의 해를 구하는 계산력을 평가한다.
(2) 함수의 극한값을 구하는 이해력 및 계산력을 평가한다.
[3] (1) 나머지 정리와 인수정리에 대한 이해력을 평가한다.
(2) 명제의 이해력과 명제의 참, 거짓을 판정하는 논리력을 평가한다.

▣ 문항별 배점

[1] (1) 7점 (2) 4점
[2] (1) 10점 (2) 15점
[3] (1) 4점 (2) 10점

▣ 참고자료

[1] 수학 I, 이준열 외, 천재교육, 2016
[2] 수학 I, 류희찬 외, 천재교과서, 2016
[3] 수학 II, 이준열 외, 천재교육, 2016
[4] 수학 II, 류희찬 외, 천재교과서, 2016

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$x \ge 0$일때 $(f \circ f)(x) = f(e^x) = e^{e^x}$를 구했으면	2
	$-\frac{1}{2} \le x < 0$일때 $(f \circ f)(x) = f(2x+1) = e^{2x+1}$를 구했으면	3
	$x < -\frac{1}{2}$일 때 $(f \circ f)(x) = f(2x+1) = 4x+3$를 구했으면	2
1-2	영역의 넓이 $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$를 구했으면	4
2-1	부등식 $-[x^2-x]-8 \le 2[x^2-x]-11 \le [x^2-x]+8$를 구했으면	2
	$x \le \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$를 구했으면	3
	$-4 < x < 5$를 구했으면	3
	$-4 < x \le \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \le x < 5$를 구했으면	2
2-2	$\lim_{x \to a} \frac{2[g(x)+x]}{[f(x)+x]+5} = \lim_{x \to a} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2}$를 구했으면	2
	$0 < a < 1$일 때 $\lim_{x \to a} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = 5$를 구했으면	2
	$a = 1$일 때 $\lim_{x \to a-} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = 5$이고 $\lim_{x \to a+} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = 4$이므로 $\lim_{x \to a} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2}$이 존재하지 않음을 보였으면	2
	$1 < a < \sqrt{2}$일 때 $\lim_{x \to a} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = 4$를 구했으면	2
	$a = \sqrt{2}$일 때 $\lim_{x \to a-} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = 4$이고 $\lim_{x \to a+} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = \frac{7}{2}$이므로 $\lim_{x \to a} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2}$이 존재하지 않음을 보였으면	2
	$\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$일 때 $\lim_{x \to a} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = \frac{7}{2}$를 구했으면	2
	$0 < a < 1$, $1 < a < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$ 를 모두 구했으면 (구간 1개에 1점씩)	3

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$(x+1)P(x)=(2x-5)\left\{(x+1)Q(x)+\frac{R}{2}\right\}+\frac{7}{2}R$를 구했으면	2
	나머지 $\frac{7}{2}R$를 구했으면	2
3-2	“참” 이라는 답을 했으면	2
	$[0,3]$에 속하는 모든 α에 대하여 $P(\alpha)=0$이라고 가정했으면	2
	$P(0)=P(1)=P(2)=P(3)=0$임을 구했으면 ($[0,3]$에 속하는 서로 다른 실수 a,b,c,d에 대해서 $P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=0$임을 구했으면)	2
	$P(x)$는 $x,\ x-1,\ x-2,\ x-3$으로 나누어떨어진다는 것을 설명하였으면 ($P(x)$는 $x-a,\ x-b,\ x-c,\ x-d$로 나누어떨어진다는 것을 설명하였으면)	2
	$P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)$인 다항식 $Q(x)$가 존재한다는 것을 설명하였으면 ($P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Q(x)$인 다항식 $Q(x)$가 존재한다는 것을 설명하였으면)	2

▣ 모범답안

[1] (1) (i) $x \geq 0$이면 $f(x)=e^x$이고 $e^x \geq 0$이므로 $(f \circ f)(x)=f(e^x)=e^{e^x}$이다.

(ii) $-\frac{1}{2} \leq x < 0$이면 $f(x)=2x+1 \geq 0$이므로 $(f \circ f)(x)=f(2x+1)=e^{2x+1}$이다.

(iii) $x < -\frac{1}{2}$이면 $f(x)=2x+1<0$이므로

$(f \circ f)(x)=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$이다.

따라서 $(f \circ f)(x)=\begin{cases} e^{e^x} & (x \geq 0) \\ e^{2x+1} & \left(-\frac{1}{2} \leq x < 0\right) \\ 4x+3 & \left(x < -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$ 이다.

(2) 주어진 영역은 윗변의 길이가 $\frac{1}{2}$, 아랫변의 길이가 $\frac{3}{4}$, 높이가 1인 사다리꼴이다.

따라서 영역의 넓이는 $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$이다.

[2] (1) $-[g(x)]-3 \leq 2[f(x)]-5 \leq [g(x)]+3$이다.

$[f(x)]=[x^2-x]-3$이고 $[g(x)]=[x^2-x]+5$이므로

$-[x^2-x]-8 \leq 2[x^2-x]-11 \leq [x^2-x]+8$이다.

따라서 $-[x^2-x]-8 \leq 2[x^2-x]-11$이고 $2[x^2-x]-11 \leq [x^2-x]+8$이다.

부등식 $-[x^2-x]-8 \leq 2[x^2-x]-11$로부터 $[x^2-x] \geq 1$이고 $x^2-x \geq 1$이므로

$x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

부등식 $2[x^2-x]-11 \leq [x^2-x]+8$로부터 $[x^2-x] \leq 19$이고 $x^2-x < 20$이므로

$-4 < x < 5$이다.

따라서 부등식의 해는 $-4 < x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq x < 5$이다.

(2) $\lim_{x \to a} \frac{2[g(x)+x]}{[f(x)+x]+5} = \lim_{x \to a} \frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2}$ 이다.

(i) $0 < a < 1$이면 $\lim_{x \to a}[x^2]=0$이므로 $\lim_{x \to a}\frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2}=5$이다.

(ii) $a=1$이면 $\lim_{x \to a-}[x^2]=0$이고 $\lim_{x \to a+}[x^2]=1$이다. 따라서 $\lim_{x \to a-}\frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2}=5$이고

$\lim_{x \to a+}\frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2}=4$이므로 $\lim_{x \to a}\frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2}$이 존재하지 않는다.

(iii) $1 < a < \sqrt{2}$ 이면 $\lim_{x\to a}[x^2] = 1$이므로 $\lim_{x\to a}\frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = 4$이다.

(iv) $a = \sqrt{2}$ 이면 $\lim_{x\to a-}[x^2] = 1$이고 $\lim_{x\to a+}[x^2] = 2$이다. 따라서 $\lim_{x\to a-}\frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = 4$이고

$\lim_{x\to a+}\frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = \frac{7}{2}$ 이므로 $\lim_{x\to a}\frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2}$ 이 존재하지 않는다.

(v) $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$ 이면 $\lim_{x\to a}[x^2] = 2$이므로 $\lim_{x\to a}\frac{2[x^2]+10}{[x^2]+2} = \frac{7}{2}$이다.

따라서 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{2[g(x)+x]}{[f(x)+x]+5}$ 가 존재하는 모든 a의 범위는 $0 < a < 1$, $1 < a < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$ 이다.

[3] (1) $P(x) = (2x-5)Q(x) + R$인 다항식 $Q(x)$가 존재한다.

$(x+1)P(x) = (x+1)(2x-5)Q(x) + (x+1)R = (2x-5)\left\{(x+1)Q(x) + \frac{R}{2}\right\} + \frac{7}{2}R$이므로

$(x+1)P(x)$를 $2x-5$로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{7}{2}R$이다.

(2) 참이다.

구간 $[0, 3]$에 속하는 모든 α에 대하여 $P(\alpha) = 0$이라고 가정하면

$P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$이다.

그러므로 $P(x)$는 $x, x-1, x-2, x-3$로 나누어떨어진다.

따라서 $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)$인 다항식 $Q(x)$가 존재한다.

이는 다항식 $P(x)$가 삼차식이라는 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

2019학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-오후2번]

▣ 출제의도

[1] (1) 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.
(2) 좌표공간에서 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.
(3) 간단한 수열의 합을 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[2] (1) 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.
(2) 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[3] 다항함수의 극대와 극소를 판정할 수 있는지 평가하는 문제이다.
[4] 도함수를 부등식에 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

▣ 문항별 배점

[1] (1) 2 (2) 8 (3) 2
[2] (1) 2 (2) 8
[3] 14
[4] 14

▣ 참고자료

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	김창동 외	㈜교학사	2016	177
	수학 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2016	122
	미적분 I	김원경 외	비상교육	2016	69
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2016	198

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]-(1)	근거를 제시하고 Q_n의 좌표 $(\log_3 n, n)$를 올바로 구한다.	2
[1]-(2)	삼각형의 넓이 a_n을 올바로 구한다.	8
	a_n을 올바로 구하지 못한 경우, 풀이 과정 안에서 부분점수를 부여할 수 있지만 최대 4점까지로 제한한다.	
[1]-(3)	제시된 수열의 합을 올바로 구한다.	2
[2]-(1)	도형 A와 B가 한 점에서 만남을 올바로 보인다.	2
[2]-(2)	입체도형의 부피를 올바로 구한다.	8
	입체도형의 부피를 올바로 구하지 못한 경우, 풀이 과정 안에서 부분점수를 부여할 수 있지만 최대 4점까지로 제한한다.	
[3]	근과 계수의 관계를 이용해 a를 구한다.	2
	$f'(x)$가 중근을 갖는 경우 $f(x)$는 극값을 갖지 않음을 논증한다.	4
	근과 계수의 관계를 이용해 b가 양수일 수 없음을 논증한다.	4
	b의 범위를 올바로 구하고 $x=\cos\theta$에서 극댓값을 $x=\sec\theta$에서 극솟값을 갖게 됨을 논리 정연하게 보인다.	4
[4]	$a=3$일 때 부등식이 성립함을 논리 정연하게 올바로 보인다.	6
	$a>3$일 때 부등식이 만족하지 않음을 논리 정연하게 올바로 보인다.	8
	$a=3$일 때 부등식이 성립함을 보이는 데에 그림으로 설명하거나 논리가 부족한 경우 최대 2점을 부여한다. $a>3$일 때 부등식이 만족하지 않음을 보이는 데에 그림으로 설명하거나 논리가 부족한 경우 최대 2점을 부여한다. 두 경우를 합하여 부분 점수의 합은 최대 4점을 넘지 않는다.	

▣ 모범답안

[1]

(1) 두 점 P_n, Q_n은 $y=x$에 대하여 대칭이므로 Q_n의 좌표는 $(\log_3 n, n)$이다.

(2) 세 점 $A_n(n,0)$, $B_n(n,n)$, $C_n(0,n)$에 대하여 삼각형 OP_nQ_n의 넓이 a_n은 사각형 $OA_nB_nC_n$의 넓이에서 삼각형 OA_nP_n, 삼각형 OQ_nC_n, 삼각형 $P_nB_nQ_n$의 넓이를 뺀 것이다.

(사각형 $OA_nB_nC_n$의 넓이) = n^2

(삼각형 OA_nP_n의 넓이) = (삼각형 OQ_nC_n의 넓이) = $\frac{1}{2}n\log_3 n$

(삼각형 $P_nB_nQ_n$의 넓이) = $\frac{1}{2}(n-\log_3 n)^2$

따라서 $a_n = n^2 - n\log_3 n - \frac{1}{2}(n-\log_3 n)^2 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}(\log_3 n)^2$

(3) $\sum_{k=1}^{n}\left\{2a_k + (\log_3 k)^2\right\} = \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

[2]

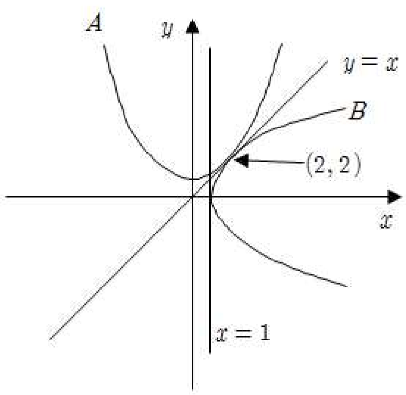
(1) 도형 A의 방정식은 $x^2-4y+4=0$, 도형 B의 방정식은 $y^2-4x+4=0$

y를 소거하여 정리하면 $x^4+8x^2-64x+80=(x-2)^2(x^2+4x+20)=0$

$x^2+4x+20=0$의 판별식 $\frac{D}{4}=4-20<0$이므로 $(x-2)^2(x^2+4x+20)=0$의 해는 $x=2$뿐이다.

그러므로 도형 A와 도형 B는 한 점 $(2,2)$에서만 만난다.

(2) 도형 A는 함수 $y=\frac{1}{4}x^2+1$의 그래프이고 이 함수의 $x=2$에서 접선의 방정식은 $y=x$이다. 닫힌 구간 $[0,1]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x)$는 한 변의 길이가 $\frac{1}{4}x^2-x+1$인 정삼각형의 넓이이므로



$$S(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x^2-2x+1\right)$$

구하는 입체의 부피 V는

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1\left(\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x^2-2x+1\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{x^5}{80}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^3}{2}-x^2+x\right]_0^1=\frac{31\sqrt{3}}{320}$$

[3] $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1 = 0$의 두 근은 $\cos\theta, \sec\theta$이다.

근과 계수의 관계에 의해 $\cos\theta\sec\theta = 1 = \dfrac{1}{3a}$. 따라서 $a = \dfrac{1}{3}$.

만약 $f'(x) = 0$이 중근을 가지면 ($\theta = 0$ 인 경우로 $x = \cos 0 = \sec 0 = 1$)

$f'(x) = (x-1)^2 \geq 0$이다. 이 경우 $f(x)$는 증가하므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

그러므로 방정식 $f'(x) = 0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\dfrac{D}{4} = b^2 - 3a = b^2 - 1 > 0$이므로 $b > 1$ 또는 $b < -1$이다. ----------㉠

한편 근과 계수의 관계에 의해 $-2b = \cos\theta + \sec\theta$

주어진 범위 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta$와 $\sec\theta$모두 양수 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$-2b = \cos\theta + \sec\theta \geq 2\sqrt{\cos\theta\sec\theta} = 2$, 즉 $b \leq -1$ -----------㉡

㉠과 ㉡에 의해 $b < -1$

이 경우 $f'(x) = (x - \cos\theta)(x - \sec\theta)$이고 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $0 < \cos\theta \leq 1$이고 $1 \leq \sec\theta$

따라서 제시문 3에 의해 $f(x)$는 $x = \cos\theta$에서 극댓값을 $x = \sec\theta$에서 극솟값을 갖게 된다.

[4] $f(x) = \tan 3x - ax$ 라 하자.

$f'(x) = 3\sec^2 3x - a$

$f''(x) = (18\sec^2 3x)\tan 3x$

구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$에서 $f''(x) > 0$

제시문 4에 의해 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$에서 $f'(x)$는 증가한다. ----------㉠

만약 $f'(0) \geq 0$이면 (즉 $f'(0) = 3 - a \geq 0$) -----------㉡

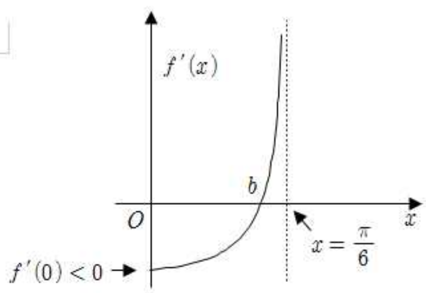
㉠에 의해 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$에서 $f'(x) > 0$이므로 제시문 4에 의해 $f(x)$는 증가한다.

그런데 $f(0) = 0$이므로 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$에서 $f(x) > 0$이 되어 조건 $\tan 3x > ax$을 만족한다.

만약 $f'(0) < 0$이면 (즉 $f'(0) = 3 - a < 0$)

어떤 b에 대해 구간 $(0, b)$에서 $f(x) < 0$ 즉 $\tan 3x < ax$이 되어 조건을 만족하지 않는다.

왜냐하면 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{6}+} f'(x) = \infty$ 인데,



$f'(x)$는 연속함수이고 $f'(0) < 0$이므로

사이값 정리에 의해 $f'(b) = 0$인 $b \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$가 존재한다.

그러면 구간 $(0, b)$에서 $f'(x) < 0$이므로

제시문 4에 의해 그 구간에서 $f(x)$는 감소한다.

$f(0) = 0$이므로 구간 $(0, b)$에서 $f(x) < 0$.

그러므로 ㉡에 의해 a의 최댓값은 3

[4] 별해

$f(x)=\dfrac{\tan 3x}{x}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{6}\right)$라 하자.

$$f'(x)=\frac{3x\sec^2 3x-\tan 3x}{x^2}=\frac{\dfrac{3x}{\cos^2 3x}-\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x^2}$$

$$=\frac{3x-\dfrac{1}{2}2\sin 3x\cos 3x}{x^2\cos^2 3x}=\frac{6x-\sin 6x}{2x^2\cos^2 3x}$$

이때 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$에서 분모는 양수이고 ----------㉠

분자도 양수임을 보이기 위해 $g(x)=6x-\sin 6x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{6}\right)$라 하자.

$g'(x)=6(1-\cos 6x)>0$이므로 제시문 4에 의해 $g(x)$는 증가한다.

$\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=0$이므로 $g(x)>0\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{6}\right)$ ----------㉡

㉠과 ㉡에 의해 $f'(x)>0\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{6}\right)$ 이므로 제시문 4에 의해 $f(x)$는 증가한다.----------㉢

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin 3x}{3x}\dfrac{3}{\cos 3x}=3$ ----------㉣

㉢과 ㉣으로부터 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$에서 $\dfrac{\tan 3x}{x}>a$인 a의 최댓값은 3

즉 (양변에 x를 곱하면) 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$에서 $\tan 3x>ax$인 a의 최댓값은 3