

2018학년도 신입학 수시모집 논술고사 문제지 (자연계열-오후)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며,
시험 종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수험번호		성명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

- 시험시간은 2시간(120분)입니다.
- 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 “검정색 볼펜”으로 정확히 기재하고 진하게 마킹하기 바랍니다.
- 답안 작성란은 “검정색 볼펜” 또는 “검정색 연필(샤프)”로 작성하십시오.
 ※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
 ※ 지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능
- 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.
- 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.
- 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.



광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 모든 정수의 집합을 \mathbb{Z} , 모든 유리수의 집합을 \mathbb{Q} , 모든 실수의 집합을 \mathbb{R} 로 나타낸다.
2. 원소가 유한개인 집합을 유한집합이라고 한다.
3. 내용이 참인지 거짓인지를 분명히 판별할 수 있는 문장이나 식을 명제라고 한다.
4. p, q 가 문장이나 식일 때, ‘ p 이면 q 이다.’ 꼴의 명제에서 p 를 가정, q 를 결론이라 하고, 명제 ‘ p 이면 q 이다.’를 기호 $p \rightarrow q$ 로 나타낸다.
5. 변수를 포함하는 문장이나 식이 변수의 값에 따라 참, 거짓이 정해질 때, 그 문장이나 식을 조건이라고 한다.
6. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 가 성립할 때, 이 함수 f 를 일대일함수라고 한다.

[1] 두 집합 $A = \{t, 3\}$, $B = \{t+1, 2t^2 - t - 4\}$ 에 대하여 $A = B$ 를 만족시키는 상수 t 의 값을 구하시오. [8점]

[2] 다음 두 조건을 만족시키는 유한집합 A 를 모두 구하시오. [16점]

- (i) $A \subset \mathbb{Z}$ 이고 $A \neq \emptyset$ (ii) $a \in A \rightarrow a^2 \in A$

[3] 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (1) 집합 X 에서 X 로의 일대일함수의 개수를 구하시오. [7점]
- (2) 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일함수이고 조건 $f(1) = 3$ 과 $f(2) = 1$ 을 만족시킬 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(2)$ 를 구하시오. [6점]
- (3) 함수 $g: X \rightarrow X$ 는 일대일함수이고 $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = c$ 이다. 함수 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때 $b - ac$ 의 값을 구하시오. [13점]

<다음 장 계속>

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 좌표가 $x=f(t)$ 일 때, 점 P의 시각 t 에서의 속도 v 는 $v(t) = \frac{dx}{dt} = f'(t)$ 이다.

2. 좌극한과 우극한

x 의 값이 a 보다 작으면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 p 에 한없이 가까워지면 p 를 $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 좌극한이라 하고, 기호로 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = p$ 와 같이 나타낸다. 또 x 의 값이 a 보다 큰 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 q 에 한없이 가까워지면 q 를 $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 우극한이라 하고, 기호로 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = q$ 와 같이 나타낸다.

3. 함수의 연속

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이라고 한다.

- (1) 함수값 $f(a)$ 가 정의되어 있다.
- (2) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 이다.

4. 함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = q$ (p, q 는 실수)일 때, a 에 가까운 모든 x 의 값에 대하여 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고 $p = q$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = p$ 이다.

5. 미분 가능한 정의

함수 $y=f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+h$ 까지 변할 때, x 의 증분은 $\Delta x = (a+h) - a = h$ 이다. 이때 y 의 증분은 $\Delta y = f(a+h) - f(a)$ 이므로 이 함수의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

이다. 여기서 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.

6. 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 구간 (a, b) 에서 미분가능하며, 구간 (a, b) 의 모든 x 에 대하여 $f'(x) = 0$ 이면 $f(x)$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 상수함수이다.

<다음 장 계속>

[1] 좌표가 0인 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표가 $x = -t^3 + 15t^2$ 이다. 점 P의 운동 방향이 처음으로 바뀌는 시각을 구하여라. ($t > 0$) [6점]

[2] 구간 $(0, \infty)$ 에서 정의된 다음 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다. 이때 a와 b의 값을 구하시오. (a, b는 상수이고 $b \neq 0$) [10점]

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+3} - x^2 + x + b}{x^n + 1} & (x \neq 1) \\ \frac{a}{b} & (x = 1) \end{cases}$$

[3] 함수 $f(x) = |2x - k|$ 의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$ 라고 하자. $S\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값과 $S(k)$ 의 최솟값을 구하시오. ($0 \leq k \leq 2$) [14점]

[4] 함수 $f(x)$ 에 대한 다음 두 조건 p, q에 대하여 p는 q이기 위한 필요충분조건이다. p가 q이기 위한 충분조건임을 다음 순서에 따라 증명할 때, 물음에 답하시오.

p: 모든 실수 x, y 에 대하여, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 이고 $|f(x)| \leq x^2$ 이다.
 q: 모든 실수 x 에 대하여, $f(x) = 0$ 이다.

- (1) $f(0) = 0$ 임을 보이시오. [3점]
- (2) $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분 가능함을 보이시오. [8점]
- (3) $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 미분 가능함을 보이시오. [6점]
- (4) $f(x) = 0$ 임을 보이시오. [3점]

<끝>

[문제 1]

▣ 출제의도

- [1] 원소의 개수가 2인 두 집합의 등식에 대한 이해력과 계산능력을 평가한다.
- [2] 명제를 이해하는 이해력과 명제의 진리집합을 구체적으로 구하는 논리력을 평가한다.
- [3] (1) 일대일함수에 대한 이해력을 평가한다.
 (2) 일대일함수, 역함수, 합성함수에 대한 이해력을 평가한다.
 (3) 함수에 대한 이해력 및 이차함수의 그래프 개형에 대한 이해력 및 계산능력을 평가한다.

▣ 문항별 배점

- [1] 8점
- [2] 16점
- [3] (1) 7점 (2) 6점 (3) 13점

▣ 참고자료

- [1] 수학 II, 이준열 외, 천재교육, 2016
- [2] 수학 II, 류희찬 외, 천재교과서, 2016
- [3] 수학 II, 신항균 외, 지학사, 2016
- [4] 수학 II, 황선욱 외, 좋은책 신사고, 2016

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$t = 2t^2 - t - 4$ 인 이유를 설명했으면	4
	$t = 2$ 를 구했으면	4
1-2	$A \subset \{-1, 0, 1\}$ 인 이유를 설명했으면	8
	$A = \{0\}, A = \{1\}, A = \{0, 1\}, A = \{-1, 1\}, A = \{-1, 0, 1\}$ 임을 구했으면 (각각의 경우에 2점씩 감점)	8
1-3-1	개수만(6개) 구했으면	3
	$f(1) = 1$ 일 때 2가지, $f(1) = 2$ 일 때 2가지, $f(1) = 3$ 일 때 2가지임을 설명했으면 (세 경우 모두 설명하지 않았으면 한 경우에 1점씩 감점)	4
1-3-2	$f^{-1}(2) = 3$ 이고 $f^{-1}(3) = 1$ 을 구했으면 (한 경우만 구했으면 1점 감점)	3
	$(f^{-1} \circ f^{-1})(2) = 1$ 을 구했으면	3
1-3-3	$b^2 - 4ac > 0$ 인 이유를 설명했으면	4

$a = 1, b = 3, c = 2$ 또는 $a = 2, b = 3, c = 1$ 을 구했으면 (한 경우만 구했으면 3점 감점)	6
$b - ac = 1$ 을 구했으면	3

▣ 모범답안

[1] $t \neq t+1$ 이므로 $t = 2t^2 - t - 4$ 이다. 따라서 $t = -1$ 또는 $t = 2$ 이다. $t = -1$ 이면 $3 = t+1$ 를 만족하지 않으므로 $t = 2$ 이다. 또한 $t = 2$ 는 $3 = t+1$ 를 만족시킨다. 그러므로 $t = 2$ 이다.

[2] $a \in A$ 이라고 하자. 만일 $a \notin \{-1, 0, 1\}$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여 $a^{2^{n-1}} \in A$ 이고 $a^{2^n} - a^{2^{n-1}} = a^{2^{n-1}}(a^{2^{n-1}} - 1) > 0$ 이므로 $a^{2^{n-1}} < a^{2^n}$ 이다. 따라서 A 가 유한집합이 아니므로 가정에 모순이다. 그러므로 $A \subset \{-1, 0, 1\}$ 이다. 그런데 집합 $\{-1, 0, 1\}$ 의 부분집합은 모두 8개이고 그 중 $\emptyset, \{-1\}, \{-1, 0\}$ 등 3가지 경우는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 이 경우들을 제외한 다음과 같은 5가지의 경우가 주어진 명제를 만족시키는 집합 A 이다.

$$A = \{0\}, A = \{1\}, A = \{0, 1\}, A = \{-1, 1\}, A = \{-1, 0, 1\}$$

[3] (1) 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일함수이면
 (i) $f(1) = 1$ 일 때 $f(2) = 2$ 또는 $f(2) = 3$ 이고 각각의 경우에 $f(3)$ 는 유일하게 결정되므로 2가지 존재한다.
 (ii) $f(1) = 2$ 일 때 $f(2) = 1$ 또는 $f(2) = 3$ 이고 각각의 경우에 $f(3)$ 는 유일하게 결정되므로 2가지 존재한다.
 (iii) $f(1) = 3$ 일 때 $f(2) = 1$ 또는 $f(2) = 2$ 이고 각각의 경우에 $f(3)$ 는 유일하게 결정되므로 2가지 존재한다.
 그러므로 집합 X 에서 X 로의 일대일함수는 모두 6개 존재한다.

(2) $f(1) = 3$ 이고 $f(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 2$ 이다. 따라서 $f^{-1}(2) = 3$ 이고 $f^{-1}(3) = 1$ 이다. 그러므로 $(f^{-1} \circ f^{-1})(2) = f^{-1}(f^{-1}(2)) = f^{-1}(3) = 1$ 이다. 따라서 $(f^{-1} \circ f^{-1})(2) = 1$ 이다.

(3) 함수 $h(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $b^2 - 4ac > 0$ 이다. 그런데 a, b, c 는 각각 1 또는 2 또는 3이므로 이 부등식을 만족시키는 a, b, c 의 값은 다음과 같다.
 $a = 1, b = 3, c = 2$ 또는 $a = 2, b = 3, c = 1$
 두 가지 경우 모두 $b = 3, ac = 2$ 이므로 $b - ac = 1$ 이다.

[문제 2]

■ 출제의도

본 문제는 함수의 연속과 미분에 관한 정의를 엄밀히 이해하고 주어진 문제에 해당 개념을 적용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 한다.

- [1] 미분의 개념을 활용하여 속도에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다.
- [2] 좌극한과 우극한을 각각 계산하여 함수의 연속을 판별할 수 있는지 평가하는 문제이다.
- [3] 적분 구간에 대한 정적분의 성질을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다.
- [4] 주어진 조건을 올바르게 활용하여 미분 가능함을 보일 수 있는지 평가하는 문제이다.

■ 문항별 배점

- [1] 6점
- [2] 10점
- [3] 14점
- [4] (1) 3점 (2) 8점 (3) 6점 (4) 3점

■ 참고자료

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미분법 I	김창동 외	교학사	2014	73-140
	미분법 I	정상권 외	금성출판사	2014	94-193
	미분법 I	신항균 외	지학사	2014	55-68
	미분법 I	김원경 외	비상교육	2014	80-171

■ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	속도 $\frac{dx}{dt} = -3t^2 + 30t$ 를 올바르게 구한다.	4
	속도를 인수분해하여 정답 $t = 10$ 을 얻는다.	2
[2]	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b$ 을 얻는다.	3
	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$ 을 얻는다.	4
	연속인 조건을 활용하여 $a = 1, b = 1$ 을 얻는다.	3
[3]	$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$ 을 얻는다.	5

	$S(k) = \int_0^{\frac{k}{2}} (k-2x) dx + \int_{\frac{k}{2}}^1 (2x-k) dx$ 을 얻는다.	3
	정적분의 계산을 통해 $S(k) = \frac{k^2}{2} - k + 1$ 을 얻는다.	3
	$k = 1$ ($0 \leq k \leq 2$)일 때 $S(k)$ 의 최솟값 $\frac{1}{2}$ 을 얻는다.	3
[4]-(1)	$f(0) = f(0) + f(0)$ 또는 $ f(0) \leq 0$ 을 통해 $f(0) = 0$ 임을 보인다.	3
	제시문 4를 활용하여 $- h \leq \frac{f(h)}{h} \leq h $ 을 얻는다.	4
[4]-(2)	$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 0에서 미분가능하다는 결론을 도출한다.	4
	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0) = 0$ 임을 얻는다.	4
[4]-(3)	$f'(x)$ 가 존재하므로 모든 실수 x 에 대해 미분가능하다고 결론짓는다.	2
[4]-(4)	모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = 0$ 이므로 제시문 6을 활용하여 $f(x) = 0$ 임을 도출한다.	3

▣ 모범답안

[1] 운동 방향이 바뀌는 시각의 속도는 0이다.

$$v(t) = -3t^2 + 30t = -3t(t-10) = 0 \text{이다. } t > 0 \text{이므로 } t = 10 \text{이다.}$$

[2] $0 < x < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b$

$x > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+3} - x^2 + x + b}{x^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^3 - \frac{x^2}{x^n} + \frac{x}{x^n} + \frac{b}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = ax^3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$ 이다. $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속이므로 $a = b$ 이고 $f(1) = \frac{a}{b} = 1$

이므로 $a = 1, b = 1$

$$\begin{aligned} [3] S(k) &= \int_0^{\frac{k}{2}} (k-2x) dx + \int_{\frac{k}{2}}^1 (2x-k) dx \\ &= [kx - x^2]_0^{\frac{k}{2}} + [x^2 - kx]_{\frac{k}{2}}^1 \\ &= \frac{k^2}{2} - k + 1 \end{aligned}$$

따라서 $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$ 또한 $S(k) = \frac{1}{2}(k^2 - 2k + 2) = \frac{1}{2}(k-1)^2 + \frac{1}{2}$ 이므로
 $S(k)$ 의 최솟값은 $k=1$ ($0 \leq k \leq 2$)일 때 $\frac{1}{2}$ 이다.

[4] (1) $f(0) = f(0) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$ 이다.
 (또는 $|f(0)| \leq 0$ 이므로 $f(0) = 0$ 이다.)

(2) $|f(x)| \leq x^2$ 이므로 $\left| \frac{f(h)}{h} \right| \leq \frac{h^2}{|h|} = |h|$ 즉, $-|h| \leq \frac{f(h)}{h} \leq |h|$
 따라서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$ 이고 $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 0에서
 미분 가능하다.

(3) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0) = 0$
 따라서 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 미분가능하다.

(4) 모든 실수 x 에 대해 $f'(x) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 상수함수이다. 그런데 $f(0) = 0$
 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.