

2017학년도 신입학 수시모집 논술우수자 전형 문제 및 해설 (자연계열-오후)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며,
시험 종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수험번호		성명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

- 시험시간은 2시간(120분)입니다.
- 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 “검정색 볼펜”으로 정확히 기재 및 마킹(진하게)바랍니다.
- 답안 작성란은 “검정색 볼펜” 또는 “검정색 연필(샤프)”로 작성하십시오.
 ※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
 ※ 지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능
- 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.
- 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.
- 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.



광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

(가) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 조사하여 그릴 수 있다.

- (1) 함수의 정의역과 치역
- (2) 좌표축과의 교점
- (3) 곡선의 대칭성과 주기
- (4) 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
- (5) 곡선의 오목과 볼록, 변곡점
- (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, 점근선

(나) 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

(다) 좌표공간에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (a, b, c)$ 에 평행인 직선 l 위의 점 $P(x, y, z)$ 의 좌표는 $(x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$ 이다. (단, t 는 실수)

(라) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여

$$f(c) = k \quad (a < c < b)$$

인 c 가 적어도 하나 존재한다.

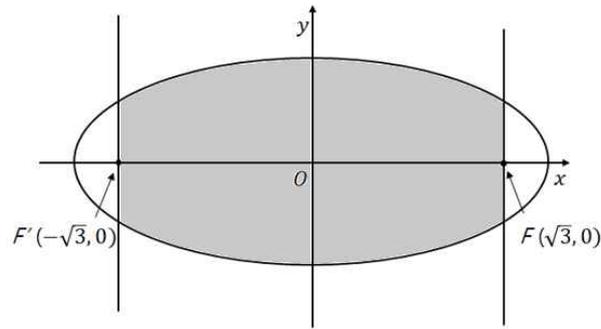
(마) 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f'(x), g'(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

[1] <제시문 (가)>를 이용하여 실수 x 에 대한 부등식 $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq p$ 를 만족하는 p 의 최솟값을 구하시오. [10점]

<다음 장에 계속>

[2] 두 초점 $F(\sqrt{3},0), F'(-\sqrt{3},0)$ 으로부터의 거리의 합이 4인 타원과 두 직선 $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$ 으로 둘러싸여 있는 색칠한 부분의 넓이를 <제시문 (나)>를 이용하여 구하시오. [10점]



[3] 좌표공간의 세 점 $O(0,0,0), A(2,3,0), B(-1,2,1)$ 에 대하여 점 A 에서 직선 OB 에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, \overline{OH} 의 길이를 <제시문 (다)>를 이용하여 구하시오. [10점]

[4] 닫힌 구간 $[-1,1]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 $f(-1) > 0$ 이고 $f(1) < 0$ 이다. <제시문 (라)>를 이용하여 $f(c) = c + \cos\left(\frac{\pi}{2}c\right)$ 가 되는 c (단, $-1 < c < 1$)가 적어도 하나 존재함을 보이시오. [10점]

[5] I_n 이 다음과 같이 정의되어 있다. <제시문 (마)>를 이용하여 $I_{100} + 9900I_{98}$ 의 값을 구하시오. [10점]

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx \quad (n \geq 0)$$

<다음 장에 계속>

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

- (가) 두 집합 X, Y 에 대하여 X 에는 속하지만 Y 에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 X 에 대한 Y 의 차집합이라 하고, $X - Y$ 로 나타낸다.
- (나) 집합 T 는 $T = \{f(x) \mid f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, a_0, a_1, a_2, a_3 \text{ 는 정수}\}$ 이다.
- (다) 다항식 A 를 다항식 B ($B \neq 0$)로 나누었을 때의 몫을 Q , 나머지를 R 라고 하면 $A = BQ + R$ 이다. 이때 R 의 차수는 B 의 차수보다 낮다.
- (라) 지수함수 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 도함수는 $y' = a^x \ln a$ 이다.
- (마) (수학적 귀납법) 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면, 다음 두 가지를 보이면 된다.
- (1) $n = 1$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.
 - (2) $n = k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면 $n = k + 1$ 일 때에도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

[1] 집합 $S = \{f(x) \in T \mid f(x) = f(x+p), p \text{ 는 } 0 \text{이 아닌 정수}\}$ 에 대하여 차집합 $T - S$ 를 구하시오. [10점]

[2] 다항식 $f(x^2)$ 을 x 로 나누었을 때의 몫은 $f(x-2)$ 이고 나머지는 12일 때, 다항식 $f(x)$ 를 구하시오. [12점]

[3] 다항식 A 를 다항식 B ($B \neq 0$)로 나누었을 때 몫 Q_1, Q_2 와 나머지 R_1, R_2 가 존재하여 $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ 라고 가정하자. 이때 $Q_1 = Q_2$ 이고 $R_1 = R_2$ 임을 증명하시오. [10점]

[4] $f(x) = x^2 - x - 3$ 과 $g(x) = 2^x$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $g(x) \notin T$ 임을 증명하시오. [10점]

(2) 모든 자연수 n 에 대하여 $2n \leq 2^n$ 임을 이용하여 $f(n) < g(n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오. [8점]

<끝>

2017학년도 광운대학교 논술우수자 전형 문제해설

[자연계열-오후]

[문제 1]

■ 출제의도

- [1] 도함수를 활용해 함수의 최댓값과 최솟값을 구하고 부등식에 활용할 수 있는지 평가한다.
- [2] 타원의 방정식을 구하고 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 활용해 구할 수 있는지 평가한다.
- [3] 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구하고 조건을 만족하는 직선 위의 점을 구할 수 있는지 평가한다.
- [4] 사이값 정리를 활용하여 주어진 구간에서 방정식이 근을 가짐을 보일 수 있는지 평가한다.
- [5] 부분 적분법을 활용해 정적분 계산을 할 수 있는지 평가한다.

■ 문항별 배점

- [1] 10점
- [2] 10점
- [3] 10점
- [4] 10점
- [5] 10점

■ 참고자료

- [1] 미적분 II, 김원경 외, 비상교육, 2016, p.119
- [2] 미적분 I, 신항균 외, (주)지학사, 2016, p.174
- [3] 기하와 벡터, 이준열 외, 천재교육, 2016, p.199
- [4] 미적분 I, 신항균 외, (주)지학사, 2016, p.75
- [5] 미적분 II, 김원경 외, 비상교육, 2016, p.149

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$f'(x)$ 와 $f'(1) = 0$ 을 구하면	5
	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, $\left \frac{x}{1+x^2} \right \leq \frac{1}{2}$ 을 구하면	5
1-2	$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 와 넓이 S 를 구하면	5
	계산 한 적분값을 구하면	5
1-3	H 의 좌표 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 을 구하면	5
	OH 의 길이는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 을 구하면	5
1-4	$g(x) = f(x) - x - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 을 정의하면	5
	양끝점에서 부호가 다름을 보이고 결론을 유도하면	5
1-5	부분 적분법을 올바르게 한번 적용하면	5
	부분 적분법을 올바르게 두 번 적용하고 답이 맞으면	5

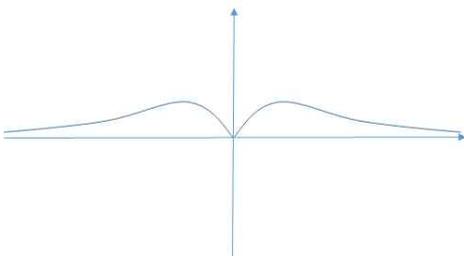
▣ 모범답안

[1] $f(x) = \left| \frac{x}{1+x^2} \right|$ 라고 하면 이 함수는 y 축 대칭이다. 따라서 $x > 0$ 에서 함수의 증감표를 그려보자.

$x > 0$ 이면 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 이고 $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ 이므로 $f'(1) = 0$ 이다.

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ 이고 $f(0) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

x	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	증가	$\frac{1}{2}$ 극대	감소



$\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ 이므로 p 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 이다.

[2] 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 이다. 따라서 곡선의 식은 $y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, $(-2 \leq x \leq 2)$ 이므로 빗금친 부분의 넓이

$$S = 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx = 4 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx \text{이다.}$$

$x = 2\cos\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 치환하면 $dx = -2\sin\theta d\theta$ 이다. 또한

적분구간은 $2\cos\theta = 0$, $2\cos\theta = \sqrt{3}$ 로부터 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ 이다. 따라서

$$S = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (-2\sin^2\theta) d\theta = -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi \text{이다.}$$

[3] 직선 OB 의 방향 벡터 \overrightarrow{OB} 는 $(-1, 2, 1)$ 이므로 직선 OB 위의 점 H 의 좌표를 $(-t, 2t, t)$ 라 하자. 직선 AH 의 방향 벡터 $\overrightarrow{AH} = (-t-2, 2t-3, t)$ 와 \overrightarrow{OB} 는 수직이어야 하므로 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = 6t-4=0$ 이다. 따라서 $t = \frac{2}{3}$ 이고 점 H 의 좌표는 $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ 이다. 따라서 선분 \overline{OH} 의 길이는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다.

[4] $g(x) = f(x) - x - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 로 정의하자. $g(-1) = f(-1) + 1 > 0$ 이고 $g(1) = f(1) - 1 < 0$ 이므로 사이값 정리에 의해 $g(c) = f(c) - c - \cos\left(\frac{\pi}{2}c\right) = 0$ 을 만족하는 c 가 $(-1, 1)$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f(c) = c + \cos\left(\frac{\pi}{2}c\right)$ 인 c 가 $(-1, 1)$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

[5] I_n 에 부분 적분법을 적용하면

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n (-\cos x)' dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^{n-1}(-\cos x) dx - [x^n \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \cos x dx \text{이다.}$$

(단, $n \geq 1$).

위 식에 부분 적분법을 적용하면

$$I_n = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} (\sin x)' dx = -n(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2} \sin x dx + [nx^{n-1} \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \text{이다. (단, } n \geq 2).$$

여기서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2} \sin x dx$ 는 I_{n-2} 이고 $[nx^{n-1} \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \text{을 얻는다. 여기에 } n=100 \text{을 대입하면 정답은 } 100\left(\frac{\pi}{2}\right)^{99} \text{이다.}$$

[문제 2]

▣ 출제의도

- [1] 다항식의 항등식에 대한 이해력을 평가하고 두 집합의 차집합을 구체적으로 구할 수 있는지를 평가한다.
- [2] 나머지 정리를 이해하고 구체적인 함수에 대해 나머지 정리를 적용할 수 있는지를 평가한다.
- [3] 다항식에 대한 나머지 정리에서 몫과 나머지가 유일하게 존재하는 것을 증명할 수 있는지를 평가한다.
- [4] (1) 지수함수의 미분법을 이용하여 지수함수가 다항함수가 아님을 증명할 수 있는지를 평가한다.
(2) 수학적 귀납법을 이해함으로써 두 함수의 대소 관계를 수학적 귀납법을 이용하여 증명할 수 있는지를 평가한다.

▣ 문항별 배점

- [1] 10점
- [2] 12점
- [3] 10점
- [4] (1) 10점 (2) 8점

▣ 참고자료

- [1] 수학 I, 류희찬 외, 천재교과서, 2016, p.31
수학 II, 이준열 외, 천재교육, 2016, p.21
- [2] 수학 I, 우정호 외, 동아출판, 2016, p.19
- [3] 수학 I, 김창동 외, 교학사, 2016, p.19
- [4] 미적분 II, 황선욱 외, 좋은책신사고, 2016, p.34
수학 II, 류희찬 외, 천재교과서, 2016, p.159

▣ 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	집합 S 를 구했으면	5
	차집합 $T - S$ 를 구했으면	5
2-2	등식 $f(x^2) = xf(x-2) + 12$ 를 구했으면	2
	$f(x)$ 가 일차식 $f(x) = ax + b$ 임을 보였으면	5
	$f(x) = 6x + 12$ 를 구했으면	5
2-3	$B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$ 임을 보였으면	2
	$Q_1 = Q_2$ 임을 보였으면	6
	$R_1 = R_2$ 임을 보였으면	2
2-4-1	등식 $2^x \ln 2 = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$ 을 구했으면	5
	$a_1 = \ln 2$ 를 구했으면	3
	$\ln 2$ 는 정수가 아니므로 $g(x) \notin T$ 임을 보였으면	2
2-4-2	$f(1) = -3 < 2 = g(1)$ 임을 보였으면	3
	$f(k+1) < g(k+1)$ 임을 보였으면	5

▣ 모범답안

[1] $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in S$ 라면 영이 아닌 정수 p 가 존재하여 $f(x) = f(x+p)$ 이다. 따라서 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_0 + a_1(x+p) + a_2(x+p)^2 + a_3(x+p)^3$ 이다. 각항의 계수를 비교하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 = a_0, \quad a_1 + 2a_2p + 3a_3p^2 = a_1, \quad a_2 + 3a_3p = a_2.$$

그런데 $p \neq 0$ 이므로 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 이다. 즉, $f(x) = a_0$ 이므로 S 는 정수 전체의 집합이다. 따라서

$$T - S = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in T \mid a_1, a_2, a_3 \text{는 동시에 영은 아니다}\}.$$

[2] 가정에 의하여 $f(x^2) = xf(x-2) + 12$ 이다. 다항식 $f(x)$ 의 차수를 m 이라 가정하면 $f(x^2)$ 의 차수는 $2m$ 이고 $xf(x-2) + 12$ 의 차수는 $m+1$ 이다. 따라서 $2m = m+1$ 이고 $m = 1$ 이므로 $f(x)$ 의 차수는 1이다. $f(x) = ax + b$ 라고 놓으면 $f(x^2) = ax^2 + b$ 이고 $xf(x-2) + 12 = x\{a(x-2) + b\} + 12 = ax^2 + (-2a+b)x + 12$ 이다. 그러므로 $ax^2 + b = ax^2 + (-2a+b)x + 12$ 이고 $(2a-b)x + b - 12 = 0$ 이다. 따라서 $2a-b = 0, b-12 = 0$ 이고 $a = 6, b = 12$ 이다. 즉, $f(x) = 6x + 12$ 이다.

[3] $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ 이므로 $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$ 이다. $Q_1 \neq Q_2$ 라고 가정하자. R_1 과 R_2 의 차수는 B 의 차수보다 낮으므로 $R_2 - R_1$ 의 차수는 B 의 차수보다 낮다. 그런데 $B(Q_1 - Q_2)$ 의 차수는 B 의 차수보다 낮지 않으므로 $B(Q_1 - Q_2)$ 의 차수와 $R_2 - R_1$ 의 차수는 같지 않다. 이는 모순이므로 $Q_1 = Q_2$ 이다. 그러므로 $0 = B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$ 이고 $R_1 = R_2$ 이다.

[4] (1) $g(x) \in T$ 라 가정하면 적당한 정수 $a_i, i = 0, 1, 2, 3$ 가 존재하여 $2^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 이다. 양변을 미분하면 $2^x \ln 2 = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$ 이다. $x = 0$ 을 대입하면 $a_1 = \ln 2$ 이다. 그런데 $\ln 2$ 는 정수가 아니므로 $g(x) \notin T$ 이다.

(2) (i) $n = 1$ 일 때 $f(1) = -3$ 이고 $g(1) = 2$ 이므로 $f(1) < g(1)$ 이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 $f(n) < g(n)$ 가 성립한다고 가정하자. 즉 $k^2 - k - 3 < 2^k$ 이라 가정하자. 그런데 $f(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) - 3 = (k^2 - k - 3) + 2k$ 이고 $g(k+1) = 2^{k+1} = 2^k + 2^k$ 이므로 가정에서 주어진 조건 $2k \leq 2^k$ 을 이용하면 $f(k+1) < g(k+1)$ 이다. 따라서 $n = k+1$ 일 때에도 명제 $f(n) < g(n)$ 가 성립하므로 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 명제가 증명된다.