2016학년도 신입학 수시모집 논술고사
문제, 출제의도, 채점기준 및 모범답안
(자연계열 - 오후)

광운대학교 입학처

2016학년도 신입학 수시모집
논술고사 문제지 (자연계열-오후)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며,
시험 종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수 험 번 호		**성 명**	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색 볼펜**"으로 정확히 기재하고 진하게 마킹하기 바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색 볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

[회전변환] 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전하는 회전변환의 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$이다.

[닮음변환] 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 k인 닮음변환의 행렬은 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$이다. (단, $k \neq 0$)

[합성변환] 두 일차변환 f와 g의 행렬을 각각 A, B라 하면 합성변환 $g \circ f$는 행렬 BA로 나타내어지는 일차변환이 된다.

[역변환] 일차변환 f의 행렬 A의 역행렬 A^{-1}가 존재하면 f의 역변환 f^{-1}가 존재하고, f^{-1}는 행렬 A^{-1}로 나타내어지는 일차변환이 된다.

[점과 직선과의 거리] 평면 위의 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

※ ([1]~[5]) 평면 위에서 원점을 중심으로 각 $\dfrac{\pi}{4}$만큼 회전하는 회전변환 f와 닮음의 중심이 원점이고 닮음비가 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$인 닮음변환 g의 합성변환을 $h = g \circ f$ 라 하고, $h^n = \overbrace{h \circ h \circ \cdots \circ h}^{n\text{번}}$ 라 하자.

[1] 변환 h와 h^n을 나타내는 행렬을 각각 구하시오. [9점]

[2] 평면 위의 점 $Q(1,1)$이 변환 h와 역변환 h^{-1}에 의하여 옮겨진 점을 각각 R, S라 하자. 이때 두 벡터 $\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$의 내적

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$$

을 만족하는 점 $P(x, y)$가 만드는 곡선의 길이를 구하시오. [11점]

[3] 변환 h^n에 의하여 평면 위의 점 $P_0(1,0)$이 옮겨진 점을 $P_n(x_n, y_n)$이라고 하자. 원점 $O(0,0)$과 두 점 $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $P_n(x_n, y_n)$이 이루는 삼각형 $OP_{n-1}P_n$의 넓이를 S_n이라고 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합을 구하시오. [11점]

[4] 변환 h에 의하여 평면 위의 점 $C\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$이 $D\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$로 옮겨질 때, a^2의 값을 구하시오. (단, $a > 0$) [8점]

[5] 변환 h^n에 의하여 평면 위의 직선 $l_0 : x+y=1$이 옮겨진 직선을 l_n이라고 하자. l_0과 l_n이 평행한 위치 관계가 되는 가장 작은 자연수 m에 대하여 l_0과 l_m 사이의 거리를 구하시오. [11점]

<다음 장에 계속>

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

1. [정적분] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad (\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x)$$

2. [정적분의 기본 정리] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3. [평균값의 정리] 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고, 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (a<c<b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

4. [함수의 증가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 다음 성질을 만족하면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 말한다.

$x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$

5. [부분적분법] 두 함수 $f(x), g(x)$가 각각 연속인 도함수를 가질 때

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

[1] 제시문 1의 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하시오. [9점]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n+1}^{3n}\frac{\sqrt{nk}}{n^2}$$

[2] 양의 실수 t에 대하여 함수 $L(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$$L(t) = \int_t^{t+1}\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}\,dx$$

이때 도함수 $L'(t)$에 대한 다음 합을 구하시오. [9점]

$$\sum_{k=1}^{n} L'(k)$$

<다음 장에 계속>

[3] 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[t,t+h]$에서 연속이고, 열린 구간 $(t,t+h)$에서 미분가능하면

$$\frac{d}{dt}\int_{t}^{t+h} f(x)\,dx = hf'(c)$$

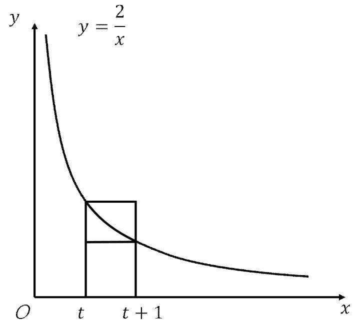
인 c가 구간 $(t,t+h)$에 적어도 하나 존재함을 제시문 2, 3을 이용하여 증명하시오. (단, $h>0$) [11점]

[4] 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $y=e^{x}$는 구간 $(-\infty,\infty)$에서 증가함을 증명하시오. [3점]

(2) 제시문 4와 <그림 1>을 이용하여 다음 부등식을 증명하시오. [7점]

$$e^{\frac{t}{t+1}} < \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} < e \qquad (t>0)$$



<그림 1>

[5] 두 함수 $f(x), g(x)$가 각각 미분가능하고 $f'(x)=g(x)$이고 $g'(x)=f(x)$라고 하자. 제시문 5의 부분적분법을 이용하여 다음 등식이 성립함을 증명하시오. [11점]

$$\int \cos x\,\{f(x)+g(x)\}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\{f(x)+g(x)\}+C \quad (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

<끝>

2016학년도 광운대학교 논술고사 (자연계열 - 오후)

출제의도, 채점기준 및 모범답안

[문제1]

▣ 출제의도

대학에서 학업을 수학하기에 요구되는 종합적 문제이해 능력 및 해결능력을 일차변환의 특성과 기하 도형의 방정식, 벡터적 표현 및 연산을 통해 확인한다. 이 문제들을 통해 일차변환, 합성변환의 정의와 특성, 행렬 표현 및 도형의 정의를 이해하고 있는지, 방정식을 세울 수 있는지, 문제에서 요구하는 기하학적 사고와 수학적 연산 수행 능력을 평가한다.

[1] 일차변환과 합성변환의 정의를 이해하고 이를 행렬식을 이용하여 표현하는 능력을 평가한다.
[2] 일차변환의 합성을 통해 평면 위의 점을 이동하고, 이를 벡터를 이용해 표현하는 능력을 평가한다.
[3] 두 점의 위치벡터를 이용해 도형의 방정식을 만들고 이의 특성을 이해하는 능력을 평가한다.
[4] 반복적인 변환에 의해 만들어지는 점들의 궤적을 수열로 표현하고 이의 극한을 구하는 능력을 평가한다.
[5] 일차변환을 통해 옮겨지는 직선의 방정식을 구하고 위치관계를 기하학적으로 사고하는 능력을 평가한다.

▣ 제시문과 문제의 출제 근거 및 문제 해결에 필요한 내용의 근거

제시문

[회전변환] 기하와 벡터, 좋은책 신사고, 18쪽
기하와 벡터, (주)금성출판사, 19쪽
기하와 벡터, 두산동아, 25쪽
[닮음변환] 기하와 벡터, 좋은책 신사고, 16쪽
기하와 벡터, (주)금성출판사, 18쪽
기하와 벡터, 두산동아, 22쪽
[합성변환] 기하와 벡터, 두산동아, 30쪽
기하와 벡터, (주)금성출판사, 29쪽
기하와 벡터, 좋은책 신사고, 24쪽
[역변환] 기하와 벡터, 좋은책 신사고, 26쪽
기하와 벡터, (주)금성출판사, 31쪽
기하와 벡터, 두산동아, 34쪽
[점과 직선과의 거리] 수학, 대한교과서(주), 192쪽
수학, (주) 미래엔컬처그룹, 209쪽

문제

[1] 일차변환과 합성변환, 기하와 벡터, 두산동아, 30쪽~32쪽
기하와 벡터, 좋은책 신사고, 24쪽
[2] 위치벡터와 도형의 방정식, 기하와 벡터, 두산동아, 161쪽~164쪽
기하와 벡터, 좋은책 신사고, 138쪽
[3] 무한급수의 합, 수학I, (주)교학사, 169쪽
수학I, 좋은책 신사고, 181쪽
[4] 일차변환과 점의 이동, 기하와 벡터, 두산동아, 35쪽
기하와 벡터, 좋은책 신사고, 27쪽
기하와 벡터, (주)금성출판사, 23쪽
[5] 일차변환과 직선의 이동, 기하와 벡터, 두산동아, 36쪽
기하와 벡터, 좋은책 신사고, 28쪽
수학, 대한교과서(주), 193쪽

▣ 문항별 배점

[1] 9점
[2] 11점
[3] 11점
[4] 8점
[5] 11점

▣ 채점 가이드

[1] **(9점)**
회전변환 f와 닮음변환 g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면
합성변환 $h = g \circ f$를 나타내는 행렬은 $H = BA$로 나타낼 수 있다.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{이다.}$$ [3점]

한편, 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전하는 회전변환의 행렬을 F,
닮음의 중심이 원점이고 닮음비가 k인 닮음변환의 행렬을 G 라 하면

$F=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$ 이므로 $F^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$, $G^n=\begin{pmatrix}k^n & 0\\ 0 & k^n\end{pmatrix}$이다.

(단, 회전행렬 F^n의 일반항를 구하지 않아도 아래의 합성행렬 H^n을 정확히 구하면 정답으로 인정한다.)

따라서 변환 h를 n번 반복해서 수행한 변환 h^n을 나타내는 행렬은 $H^n=(BA)^n=B^nA^n$이므로

$$H^n=B^nA^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{n}{4}\pi & -\sin\frac{n}{4}\pi\\ \sin\frac{n}{4}\pi & \cos\frac{n}{4}\pi\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n}{4}\pi & -\sin\frac{n}{4}\pi\\ \sin\frac{n}{4}\pi & \cos\frac{n}{4}\pi\end{pmatrix}$$ 이 된다. [6점]

[별해1]

회전변환 행렬 F^n을 구할 때, 아래와 같이 수학적 귀납법을 이용해 유도할 수도 있다.

$n=1$일 때, $F^1=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=F$이므로 성립한다.

$n=k$일 때 성립한다고 가정하면, $F^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}$

$n=k+1$일 때, $F^{k+1}=F^kF=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -\cos k\theta\sin\theta-\sin k\theta\cos\theta\\ \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta+\cos k\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

삼각함수의 변환공식에 의해

$$\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\{\cos(k+1)\theta+\cos(k-1)\theta\}+\frac{1}{2}\{\cos(k+1)\theta-\cos(k-1)\theta\}=\cos(k+1)\theta$$

$$\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\{\sin(k+1)\theta+\sin(k-1)\theta\}+\frac{1}{2}\{\sin(k+1)\theta-\sin(k-1)\theta\}=\sin(k+1)\theta$$

따라서 $F^{k+1}=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta\\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix}$이므로 성립한다.

그러므로 $F=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$일 때, $F^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$이다.

[별해2]

합성변환 행렬 H^n을 구할 때, H를 8번 곱하여 $H^1\sim H^8$로 H^n 행렬을 표현한 경우에는 일반항을 정확히 구하지 못했으므로 부분점수만 인정한다. [최대3점] (단, 행렬 H의 부분점수는 별도)

$$H=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\qquad H^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad H^3=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\qquad H^4=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$H^5=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \qquad H^6=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad H^7=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad H^8=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

[2] **(11점)**

역변환 h^{-1}의 행렬은 $H^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$이다. [2점]

점 $Q(1,1)$에 대하여 $h(Q)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 이고, $h^{-1}(Q)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$이므로

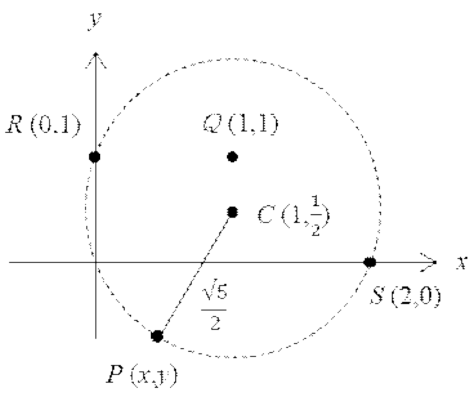
변환 h와 변환 h^{-1}에 의하여 옮겨진 두 점은 각각 $R(0,1)$, $S(2,0)$이 된다. [3점]

따라서, 평면 위의 점 $P(x,y)$에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$를 구하면

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(-x,1-y)$, $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OP}=(2-x,-y)$이다. [4점]

두 벡터의 내적 $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PS}=x(x-2)+y(y-1)=0$이므로 $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$이 된다.

따라서 점 P는 중심이 $C\left(1,\frac{1}{2}\right)$이고 반지름이 $\frac{\sqrt{5}}{2}$인 원으로 그 길이는 $\sqrt{5}\pi$이다. [2점]



[3] **(11점)**

변환 h는 원점 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하면서 원점과의 거리가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$의 비율로 줄어드는 합성변환이다.

변환 h에 의하여 옮겨진 서로 이웃한 두 점 P_{n-1}과 P_n의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{OP_{n-1}}$, $\overrightarrow{OP_n}$이라 하면

위치벡터 $\overrightarrow{OP_n}$의 크기는 $\left|\overrightarrow{OP_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\overrightarrow{OP_{n-1}}\right|$이고,

두 위치벡터 $\overrightarrow{OP_n}$과 $\overrightarrow{OP_{n-1}}$의 사잇각은 $\frac{\pi}{4}$이다. [5점]

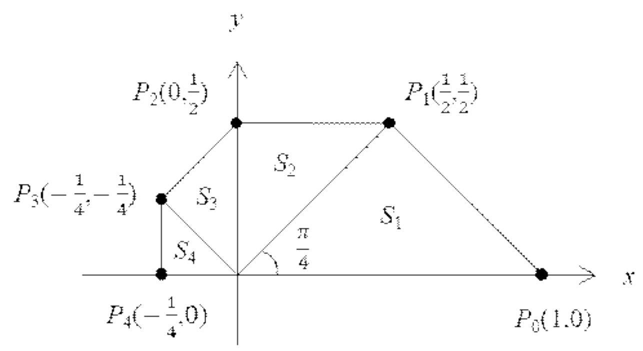
삼각형 $OP_{n-1}P_n$의 넓이 $S_n = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP_{n-1}}\right|\left|\overrightarrow{OP_n}\right|\sin\frac{\pi}{4}$ 이고,

삼각형 OP_nP_{n+1}의 넓이 $S_{n+1} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP_n}\right|\left|\overrightarrow{OP_{n+1}}\right|\sin\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\left|\overrightarrow{OP_{n+1}}\right|}{\left|\overrightarrow{OP_{n-1}}\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$이다. [4점]

따라서, 수열 $\{S_n\}$은 초항 $S_1 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP_0}\right|\left|\overrightarrow{OP_1}\right|\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이 되므로

무한급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$이다. [2점]



[별해1]
처음 몇 개의 점을 변환 h의 행렬을 이용해 직접 구하고, 이 점들의 기하학적인 위치를 통해 삼각형의 넓이의 규칙성을 이용해 답을 구하는 경우에는 삼각형 넓이의 수열 $\{S_n\}$의 일반항을 구하지 못하였으므로 부분점수만을 인정한다. [최대5점]

변환 h에 의하여 점 $P_0(1,0)$이 옮겨진 점을 차례로 계산하면

$P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{4},0\right)$이 된다.

이때 원점을 중심으로 만든 삼각형의 넓이는

$S_1 = \frac{1}{4}$, $S_2 = \frac{1}{8}$, $S_3 = \frac{1}{16}$, $S_4 = \frac{1}{32}$, ... 이 되므로

수열 $\{S_n\}$은 초항 $S_1 = \frac{1}{4}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서 무한급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$이다.

[4] **(8점)**

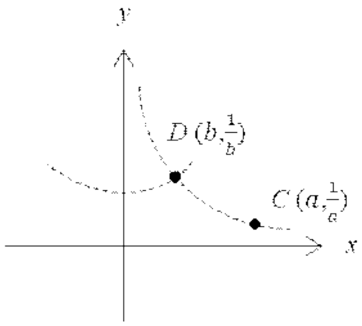
변환 h에 의하여 옮겨진 점 $D(b, \frac{1}{b})$은

$h(C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a - \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix}$이므로

a와 b의 관계식을 구하면 $a - \frac{1}{a} = 2b$, $a + \frac{1}{a} = \frac{2}{b}$가 된다. [4점]

이에 양변을 곱하면 $a^2 - \frac{1}{a^2} = 4$이 되고 이를 정리하면 $a^4 - 4a^2 - 1 = 0$이다.

따라서 $a^2 > 0$이므로 $a^2 = 2 + \sqrt{5}$이다. [4점]



[5] **(11점)**

변환 h의 정의에 의해 변환 h를 $4k$번 적용하면(180° 씩 회전) 직선 l_0와 옮겨진 직선은 서로 평행한 위치 관계가 된다. 따라서 평행한 위치 관계가 되는 최소의 자연수 $m = 4$이다.

이때 변환 h^4의 행렬 $H^4 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \cos\frac{4}{4}\pi & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \sin\frac{4}{4}\pi \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \sin\frac{4}{4}\pi & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \cos\frac{4}{4}\pi \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 된다. [5점]

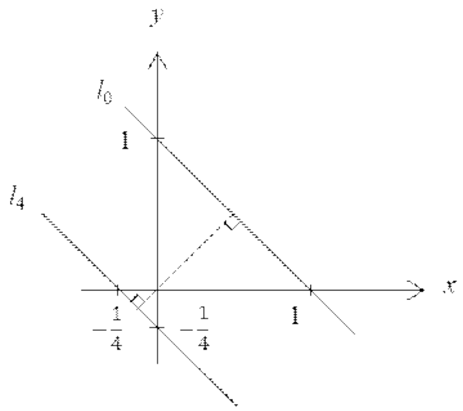
따라서 변환 h^4에 의하여 직선 l_0 위의 점 (x, y)가 직선 l_4 위의 점 (x', y')으로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x \\ -\frac{1}{4}y \end{pmatrix}$이므로 옮겨진 직선 l_4는 $4x' + 4y' = -1$이 된다. [3점]

원점으로부터 직선 l_0까지의 거리 d_0는 $d_0 = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고

직선 l_4까지의 거리 d_4는 $d_4 = \frac{|1|}{\sqrt{4^2+4^2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ 이다.

따라서 두 직선 사이의 거리는 $d_0 + d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$ 이 된다. [3점]



[별해1]

변환 h^4에 의하여 처음으로 평행한 위치 관계가 됨을 설명하고,
옮겨진 직선 l_4를 구하는 대신 직선 l_0 상의 한 점만을 변환 h^4에 의하여 옮기고
옮겨진 점과 l_0간의 거리로 답을 구하는 경우에도 정답으로 인정한다. [최대11점]

변환 h는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하는 변환이므로 4번 회전하면 원래 직선과 처음으로 평행이 된다.

변환 h^4에 의하여 직선 l_0 위의 한 점 $P(1,0)$이 옮겨진 점 Q는 $h^4(P) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}$이 되므로

점 $Q\left(-\frac{1}{4},0\right)$와 직선 $l_0 : x+y=1$간의 거리 $d = \frac{\left|-\frac{1}{4}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$ 이 된다.

▣ 풀이예시

[1] 회전변환 f와 닮음변환 g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\text{이므로}$$

합성변환 $h=g\circ f$를 나타내는 행렬은 $H=BA=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$이다.

변환 h를 n번 반복해서 수행한 변환 h^n을 나타내는 행렬은 $H^n=(BA)^n=B^nA^n$이므로

$$H^n=B^nA^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{n}{4}\pi & -\sin\frac{n}{4}\pi\\ \sin\frac{n}{4}\pi & \cos\frac{n}{4}\pi\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n}{4}\pi & -\sin\frac{n}{4}\pi\\ \sin\frac{n}{4}\pi & \cos\frac{n}{4}\pi\end{pmatrix}\text{이다.}$$

[2] 역변환 h^{-1}의 행렬은 $H^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$이다.

점 $Q(1,1)$에 대하여 $h(Q)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 이고, $h^{-1}(Q)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$이므로

옮겨진 두 점은 각각 $R(0,1)$, $S(2,0)$이 된다.

평면 위의 점 $P(x,y)$에 대하여 $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(-x,1-y)$, $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OP}=(2-x,-y)$이다.

내적 $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PS}=x(x-2)+y(y-1)=0$이므로 $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$이 된다.

따라서 점 P는 중심이 $C\left(1,\frac{1}{2}\right)$이고 반지름이 $\frac{\sqrt{5}}{2}$인 원으로 그 길이는 $\sqrt{5}\pi$이다.

[3] 변환 h는 원점 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전하면서 원점과의 거리가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$의 비율로 줄어드는 합성변환이므로

서로 이웃한 두 점 P_{n-1}과 P_n의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{OP_{n-1}}$, $\overrightarrow{OP_n}$이라 하면

$\left|\overrightarrow{OP_n}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|\overrightarrow{OP_{n-1}}\right|$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{OP_n}$과 $\overrightarrow{OP_{n-1}}$의 사잇각은 $\dfrac{\pi}{4}$이다.

$S_n = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP_{n-1}}\right|\left|\overrightarrow{OP_n}\right|\sin\dfrac{\pi}{4}$ 이고, $S_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP_n}\right|\left|\overrightarrow{OP_{n+1}}\right|\sin\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \dfrac{\left|\overrightarrow{OP_{n+1}}\right|}{\left|\overrightarrow{OP_{n-1}}\right|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$이다.

따라서, 수열 $\{S_n\}$은 초항 $S_1 = \dfrac{1}{4}$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이 되므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$이다.

[4] 변환 h에 의하여 옮겨진 점 $D(b, \dfrac{1}{b})$은 $h(C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a - \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix}$이므로

a와 b의 관계식을 구하면 $a - \dfrac{1}{a} = 2b$, $a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{b}$이 된다.

양변을 곱하여 정리하면 $a^4 - 4a^2 - 1 = 0$이고 $a^2 > 0$이므로 $a^2 = 2 + \sqrt{5}$이다.

[5] 변환 h의 정의에 의해 변환 h를 $4k$번 적용하면 옮겨진 직선은 직선 l_0과 평행한 위치가 된다.
따라서 평행한 위치 관계가 되는 최소의 자연수 $m = 4$이다.

이때 변환 h^4의 행렬 $H^4 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \cos\frac{4}{4}\pi & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \sin\frac{4}{4}\pi \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \sin\frac{4}{4}\pi & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \cos\frac{4}{4}\pi \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 된다.

따라서 변환 h^4에 의하여 직선 l_0 위의 점 (x,y)가 직선 l_4 위의 점 (x',y')으로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x \\ -\frac{1}{4}y \end{pmatrix}$이므로 변환된 직선 l_4는 $4x' + 4y' = -1$이 된다.

원점으로부터 직선 l_0까지의 거리 d_0는 $d_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이고 직선 l_4까지의 거리 d_4는 $d_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$이다.

따라서 두 직선 사이의 거리는 $d_0 + d_4 = \dfrac{5\sqrt{2}}{8}$이 된다.

[문제2]

▣ 출제의도

[1] 주어진 식을 정적분으로 전환할 수 있는지를 물어 정적분의 정의를 이해하고 있는지 판별하고 부정적분을 이용하여 함수의 정적분 값을 계산할 수 있는지 확인한다.
[2] 정적분의 기본정리를 이해하고 이를 활용해 간단한 식의 값을 계산할 수 있는지 평가한다.
[3] 제시문 2에 주어진 미적분학의 기본 정리와 제시문 3에 주어진 평균값의 정리를 정확히 이해하고 이를 활용하여 간단한 등식을 증명할 수 있는지 확인한다.
[4] 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있는지 확인한다. 간단한 함수의 정적분을 계산하고, 함수의 증가에 관한 주어진 제시문을 적용하여 넓이의 대소 관계를 판별할 수 있는지를 평가한다.
[5] 부분적분법을 정확히 이해하고 주어진 등식을 증명할 수 있는지의 여부를 평가한다.

▣ 제시문과 문제의 출제 근거 및 문제 해결에 필요한 내용의 근거

제시문

1. 미적분과 통계 기본, ㈜지학사, p98
2. 미적분과 통계 기본, ㈜두산동아, p114
3. 수학 Ⅱ, ㈜좋은책신사고, p160
4. 수학 Ⅱ, ㈜좋은책신사고, p162
5. 적분과 통계, ㈜ 교학사, p24

문제

1. 적분과 통계 익힘책, ㈜천재교육, p60
2. 적분과 통계, ㈜좋은책신사고, p41
3. 수학 Ⅱ, ㈜좋은책신사고, p160
4. (1) 수학 Ⅱ, ㈜좋은책신사고, p165
   (2) 적분과 통계, ㈜교학사, p44
5. 적분과 통계, ㈜ 교학사, p26

▣ 문항별 배점

[1] 9
[2] 9
[3] 11
[4] 10
[5] 11

▣ 채점 가이드

[1]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n+1}^{3n}\frac{\sqrt{nk}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{3n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{2n+1}{n}}+\sqrt{\frac{2n+2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{2n+n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{2+\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2+\frac{k}{n}}$$ [5점]

$$=\int_0^1\sqrt{2+x}\,dx=\left[\frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$$ 또는

$$=\int_2^3\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_2^3=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$$ [4점]

[2]

$h(x)=\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}$ 라고 놓으면, $L'(t)=\frac{d}{dt}\int_t^{t+1}h(x)\,dx=h(t+1)-h(t)$이다. 따라서,

$L'(t)=\sqrt{1+\frac{4}{(t+1)^4}}-\sqrt{1+\frac{4}{t^4}}$ 이고, [5점]

$\sum_{k=1}^{n}L'(k)=(h(2)-h(1))+(h(3)-h(2))+\ldots+(h(n+1)-h(n))$이다.

여기서 상쇄되는 항들을 제거하면 남는 항은 $h(n+1)-h(1)$이므로 정답은 $\sqrt{1+\frac{4}{(n+1)^4}}-\sqrt{5}$ 이다.

[4점]

[3]

$F'(x)=f(x)$라고 하자. 제시문 2에 의해 $\int_t^{t+h}f(x)\,dx=F(t+h)-F(t)$이다. 이 식의 양변을 t에 대해 미분하면

$$\frac{d}{dt}\int_t^{t+h}f(x)\,dx=f(t+h)-f(t)$$ [5점]

우변에 평균값의 정리를 적용하면 다음을 만족하는 $c\ (t<c<t+h)$가 적어도 하나 존재한다.

$$f(t+h)-f(t)=hf'(c)$$ [6점]

[4]

(1) 실수 전 구간에서 $y'(x)=e^x>0$이므로 이 함수는 증가한다. [3점]

(2) 밑변의 길이가 1이고 높이가 $\frac{2}{t+1}$인 사각형의 넓이 S_1은 $\frac{2}{t+1}$이다.

곡선 $y=\frac{2}{x}$와 x축 및 $x=t$, $x=t+1\ (t>0)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\int_t^{t+1}\frac{2}{x}\,dx=\left[2\ln\frac{x}{2}\right]_t^{t+1}=2\ln\frac{t+1}{t}=2\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$이다.

한편, 밑변의 길이가 1이고 높이가 $\frac{2}{t}$인 사각형의 넓이 S_2는 $\frac{2}{t}$이다.

<그림 1>에 의해 $S_1 < S < S_2$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{2}{t+1} < 2\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) < \frac{2}{t} \qquad (t>0)$$ [3점]

이 식들에 $\frac{t}{2}$를 곱하면 이 값이 양수이므로

$$\frac{t}{t+1} < \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < 1 \qquad (t>0)$$

이다. $y=e^x$는 실수 전 구간에서 증가하므로 제시문 4에 의해 다음을 얻는다.

$$e^{\frac{t}{t+1}} < \left(1+\frac{1}{t}\right)^t < e \qquad (t>0)$$ [4점]

[5]

※ 부분적분법을 활용하지 않고 단지 우변을 미분하여 등식을 증명한 경우 최대 [3]점 부여.

$$\int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int (\sin x)'\{f(x)+g(x)\}dx = \sin x\{f(x)+g(x)\} - \int \sin x\{f'(x)+g'(x)\}\,dx$$

[3점]

이 식에서 $-\int \sin x\{f'(x)+g'(x)\}dx = -\int \sin x\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int(\cos x)'\{f(x)+g(x)\}\,dx$

$= \cos x\{f(x)+g(x)\} - \int \cos x\{f'(x)+g'(x)\}\,dx = \cos x\{f(x)+g(x)\} - \int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx$이다.

[3점]

따라서

$$2\int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx = (\sin x+\cos x)\{f(x)+g(x)\} = \sqrt{2}\left\{\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos x\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}\{f(x)+g(x)\}$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\{f(x)+g(x)\}$$

[3점]

따라서

$\int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})\{f(x)+g(x)\}+C$이다. (여기서 C는 적분 상수). [2점]

[별해1]

$$\int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int \cos x\{f'(x)+g'(x)\}dx = \cos x\{f(x)+g(x)\} + \int \sin x\{f(x)+g(x)\}\,dx$$

[3점]

이 식에서

$$\int \sin x\{f(x)+g(x)\}dx = \int \sin x\{f'(x)+g'(x)\}\,dx = \sin x\{f(x)+g(x)\} - \int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx$$

[3점]

따라서

$$2\int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx = (\sin x+\cos x)\{f(x)+g(x)\} = \sqrt{2}\left\{\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos x\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}\{f(x)+g(x)\}$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\{f(x)+g(x)\}$$

[3점]

따라서

$\int \cos x\{f(x)+g(x)\}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})\{f(x)+g(x)\}+C$이다. (여기서 C는 적분 상수). [2점]

[별해2]

첫 번째 풀이와 [별해1]이 뒤섞여 있는 경우가 있을 수 있습니다.
어떤 경우이건 부분적분을 올바로 1번 적용하면 [3점]
그 중 한 항을 선택해 부분적분을 올바로 2번째 적용하여 원래 문제와 같은 항이 나타나면 [3점].
원래 문제와 같은 항이 나타난 식을 정리한 후 삼각함수의 합성을 올바로 수행하면 [3점]
적분상수를 부가해서 올바로 마무리 하면 [2점]을 부여함을 합니다.

▣ 풀이예시

[1]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n+1}^{3n}\frac{\sqrt{nk}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{3n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{2n+1}{n}}+\sqrt{\frac{2n+2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{2n+n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{2+\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1\sqrt{2+x}\,dx=\left[\frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}\ \text{또는}$$

$$=\int_2^3\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_2^3=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

[2]

$h(x)=\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}$ 라고 놓으면, $L'(t)=\frac{d}{dt}\int_t^{t+1}h(x)\,dx=h(t+1)-h(t)$이다. 따라서,

$L'(t)=\sqrt{1+\frac{4}{(t+1)^4}}-\sqrt{1+\frac{4}{t^4}}$ 이고,

$\sum_{k=1}^{n}L'(k)=(h(2)-h(1))+(h(3)-h(2))+\ldots+(h(n+1)-h(n))$이다.

여기서 상쇄되는 항들을 제거하면 남는 항은 $h(n+1)-h(1)$이므로 정답은 $\sqrt{1+\frac{4}{(n+1)^4}}-\sqrt{5}$ 이다.

[3]

$F'(x)=f(x)$라고 하자. 제시문 2에 의해 $\int_t^{t+h}f(x)\,dx=F(t+h)-F(t)$이다. 이 식의 양변을 t에 대해 미분하면

$$\frac{d}{dt}\int_t^{t+h}f(x)\,dx=f(t+h)-f(t)$$

우변에 평균값의 정리를 적용하면 다음을 만족하는 c $(t < c < t+h)$가 적어도 하나 존재한다.

$$f(t+h) - f(t) = hf'(c)$$

[4]

(1) 실수 전 구간에서 $y'(x) = e^x > 0$이므로 이 함수는 증가한다.

(2) 밑변의 길이가 1이고 높이가 $\frac{2}{t+1}$인 사각형의 넓이 S_1은 $\frac{2}{t+1}$이다.

곡선 $y = \frac{2}{x}$와 x축 및 $x = t$, $x = t+1$ $(t > 0)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S = \int_t^{t+1} \frac{2}{x}\, dx = \left[2\ln\frac{x}{2}\right]_t^{t+1} = 2\ln\frac{t+1}{t} = 2\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$이다.

한편, 밑변의 길이가 1이고 높이가 $\frac{2}{t}$인 사각형의 넓이 S_2는 $\frac{2}{t}$이다.

<그림 1>에 의해 $S_1 < S < S_2$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{2}{t+1} < 2\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) < \frac{2}{t} \qquad (t > 0)$$

이 식들에 $\frac{t}{2}$를 곱하면 이 값이 양수이므로

$$\frac{t}{t+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < 1 \qquad (t > 0)$$

이다. $y = e^x$는 실수 전 구간에서 증가하므로 제시문 4에 의해 다음을 얻는다.

$$e^{\frac{t}{t+1}} < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e \qquad (t > 0)$$

[5]

※ 부분적분법을 활용하지 않고 단지 우변을 미분하여 등식을 증명한 경우 최대 [3]점 부여.

$\int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int (\sin x)'\{f(x)+g(x)\}dx = \sin x\{f(x)+g(x)\} - \int \sin x\{f'(x)+g'(x)\}\,dx$

이 식에서 $-\int \sin x\{f'(x)+g'(x)\}dx = -\int \sin x\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int (\cos x)'\{f(x)+g(x)\}\,dx$

$= \cos x\{f(x)+g(x)\} - \int \cos x\{f'(x)+g'(x)\}\,dx = \cos x\{f(x)+g(x)\} - \int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx$이다.

따라서

$2\int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx = (\sin x + \cos x)\{f(x)+g(x)\} = \sqrt{2}\left\{\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}\{f(x)+g(x)\}$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\{f(x)+g(x)\}$

따라서

$\int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})\{f(x)+g(x)\} + C$이다. (여기서 C는 적분 상수).

[별해 1]

$\int \cos x\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int (\sin x)'\{f(x)+g(x)\}dx = \sin x\{f(x)+g(x)\} - \int \sin x\{f'(x)+g'(x)\}\,dx$